

启航教育

云图
YUN TU

2023版

张宇数学教育系列丛书·二

书课包

张宇考研数学

题源探析经典

1000
题

○ 主编 张宇

○ 副主编 高昆轮

【数学一·习题分册】



北京理工大学出版社

张宇数学教育系列丛书·二

书课包

张宇考研数学

题源探析经典

1000 题

○ 主编 张宇 ○ 副主编 高昆轮

【数学一·习题分册】

张宇数学教育系列丛书编委 (按姓氏拼音排序)

蔡燧林 陈静静 方春贤 冯雅娜 高昆轮 胡金德 贾建厂 李家隆

李志龙 刘芮言 刘硕 柳叶子 吕倩 秦艳鱼 沈利英 史明洁 石臻东

仝雨晨 王慧珍 王爽 王燕星 徐兵 严守权 杨若昕 亦一 (笔名) 曾凡 (笔名)

张乐 张雷 张青云 张宇 郑利娜 朱杰



图书在版编目(CIP)数据

张宇考研数学题源探析经典 1000 题. 数学一. 习题分册 / 张宇主编. — 北京 : 北京理工大学出版社, 2022. 1

ISBN 978-7-5763-0818-1

I. ①张… II. ①张… III. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2022)第 005876 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司

社 址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号

邮 编 / 100081

电 话 / (010)68914775(总编室)
(010)82562903(教材售后服务热线)
(010)68944723(其他图书服务热线)

网 址 / <http://www.bitpress.com.cn>

经 销 / 全国各地新华书店

印 刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司

开 本 / 787 毫米×1092 毫米 1/16

印 张 / 10.75

字 数 / 268 千字

版 次 / 2022 年 1 月第 1 版 2022 年 1 月第 1 次印刷

定 价 / 129.80 元(共 2 册)

责任编辑 / 高 芳

文案编辑 / 胡 莹

责任校对 / 刘亚男

责任印制 / 李志强

前言

PREFACE

“数学成绩是做出来的。”这是我曾经在考研数学大纲解析中写的一句话,这里的“做”指的是做题,在复习的整个过程中做足够量的好题,并搞懂吃透每一道题,便可以取得很好的数学成绩。

本书是我和教学团队对考研数学题源研究的最新成果,供 2023 考研的考生在整个复习过程中使用。

为了突出考研数学新大纲与新的命题趋势,更好地指导即将进入大众化考研的考研群体,这次再版,本书做了大幅修订。一是增加优秀的客观题的数量,反映新大纲的要求;二是进一步优化习题,反映新的命题要求;三是将习题分成两大部分,结合已经出版的《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》(配套《张宇考研数学基础 30 讲》),可在复习的不同阶段使用,具体说明如下。

《张宇考研数学基础 30 讲——基础 300 题》可以看作基础题。所谓基础题,主要包含如下涵义:一是考查基本的概念、公式和定理的题目;二是题型常规且计算量不大的题目。这类题目主要用来热身并巩固所学的基础知识,属于基础知识的再现,难度不大,区分度也不高,属于送分题,在考研中所占分量约为五分之一,一般来说,除非粗心大意,考生不会在这类题目上丢分。考生在基础阶段应该完成这些题目,为强化阶段的复习打下基础。

本书每一章的第一部分——强化训练,可以看作中等难度题。所谓中等难度题,主要包含如下涵义:一是考查比较复杂的概念、公式和定理的题目;二是题型常规但计算量较大的题目;三是基本的应用题目,包括几何应用和专业应用。这类题目主要用来深刻考查考生对所学知识的理解和运用,区分度较高,难度中等及中等偏上,在考研中所占分量约为五分之三,是考研数学试卷上的重头戏,这类题目会决定考生考研数学成绩,甚至考研成败。考生在强化复习阶段要认真操练这类题目,努力提高自己的考研数学水平。

本书每一章的第二部分——巩固提高,可以看作难题。所谓难题,主要包含如下涵义:一是考查冷僻的概念、公式和定理的题目,虽然这类题目综合性不强,计算量也不大,但是冷僻。所谓冷僻,既包括考研知识中几乎不考的边角料知识,也包括考查频率很低(多年不考)的常规知识,会给考生造成措手不及的感觉,极易丢分;二是计算量大的题目,考研数学题大部分是要通过计算才能得出结果的,计算量大的题目,对于平时复习时眼高手低,不注重提高计算能力的考生,着实是一种难题;三是题型新颖的综合性题目,近几年的考研中,尤其从 2019 年开始,为了体现公平公正,反对社会上押题猜宝的不良风气,树立正确的复习备考观,命题单位加大了对从未考查过的新颖命题的设计和考查力度,这类题目命题手法高超、风格独特、行云流水、令人拍案叫绝。难题在考研中所占分量约为五

分之一,而且有加大分量的趋势,这类问题不再只是所谓尖子生的专用考题,对于即将进入大众化考研的庞大考研群体来说,这类题目做得好不好,也是至关重要的。考生在强化阶段和冲刺阶段,除了要完成历年真题的训练之外,还要多做既好又新的题目,这样才能应对考研的激烈竞争,稳操胜券。

感谢命题专家们给予的指导和帮助,感谢历届考生对本书的厚爱和建议,感谢编辑老师们的辛勤工作。希望考生认真研读、操练本书中的每一道题目,提高解题能力,争取考研得到高分。

张宇

2021年12月 于北京



► 第一篇 高等数学 ◀

第 1 章 函数极限与连续	3
强化训练	3
巩固提高	6
第 2 章 数列极限	9
强化训练	9
巩固提高	10
第 3 章 一元函数微分学的概念	11
强化训练	11
巩固提高	12
第 4 章 一元函数微分学的计算	13
强化训练	13
巩固提高	14
第 5 章 一元函数微分学的应用(一)——几何应用	16
强化训练	16
巩固提高	20
第 6 章 一元函数微分学的应用(二)——中值定理、微分等式与微分不等式	22
强化训练	22
巩固提高	23
第 7 章 一元函数微分学的应用(三)——物理应用	25
强化训练	25
巩固提高	25

第8章 一元函数积分学的概念与性质	26
强化训练	26
巩固提高	28
第9章 一元函数积分学的计算	30
强化训练	30
巩固提高	32
第10章 一元函数积分学的应用(一)——几何应用	34
强化训练	34
巩固提高	35
第11章 一元函数积分学的应用(二)——积分等式与积分不等式	37
强化训练	37
巩固提高	38
第12章 一元函数积分学的应用(三)——物理应用	39
强化训练	39
巩固提高	39
第13章 多元函数微分学	40
强化训练	40
巩固提高	45
第14章 二重积分	47
强化训练	47
巩固提高	52
第15章 微分方程	54
强化训练	54
巩固提高	57
第16章 无穷级数	60
强化训练	60
巩固提高	66
第17章 多元函数积分学的预备知识	70
强化训练	70
巩固提高	73
第18章 多元函数积分学	74
强化训练	74
巩固提高	78

▶ 第二篇 线性代数 ◀

第 1 章	行列式	85
	强化训练	85
	巩固提高	87
第 2 章	余子式和代数余子式的计算	89
	强化训练	89
	巩固提高	89
第 3 章	矩阵运算	91
	强化训练	91
	巩固提高	94
第 4 章	矩阵的秩	96
	强化训练	96
	巩固提高	96
第 5 章	线性方程组	98
	强化训练	98
	巩固提高	101
第 6 章	向量组	104
	强化训练	104
	巩固提高	106
第 7 章	特征值与特征向量	108
	强化训练	108
	巩固提高	109
第 8 章	相似理论	111
	强化训练	111
	巩固提高	113
第 9 章	二次型	115
	强化训练	115
	巩固提高	117

▶ 第三篇 概率论与数理统计 ◀

第1章 随机事件和概率	121
强化训练	121
巩固提高	124
第2章 一维随机变量及其分布	126
强化训练	126
巩固提高	128
第3章 一维随机变量函数的分布	130
强化训练	130
巩固提高	131
第4章 多维随机变量及其分布	132
强化训练	132
巩固提高	135
第5章 多维随机变量函数的分布	137
强化训练	137
巩固提高	139
第6章 数字特征	141
强化训练	141
巩固提高	144
第7章 大数定律与中心极限定理	149
强化训练	149
巩固提高	150
第8章 统计量及其分布	152
强化训练	152
巩固提高	155
第9章 参数估计与假设检验	157
强化训练	157
巩固提高	161

第一篇 高等数学

高等数学是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对高等数学的基本概念、基本理论、基本方法的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学一试卷中分值约90分。

第1章 函数极限与连续

强化训练



1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\tan x} - 1}{x^2} = (\quad)$.

- (A) 1 (B) 2 (C) -1 (D) -2

2. 设 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt[3]{\cos 2x}}{x^a \ln(1+x)} = b \neq 0$, 则().

(A) $a = -\frac{2}{3}, b = -1$ (B) $a = \frac{2}{3}, b = 1$

(C) $a = -1, b = -\frac{2}{3}$ (D) $a = 1, b = \frac{2}{3}$

3. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 下列无穷小量中, 与 x 同阶的无穷小是().

(A) $\sqrt{1+x} - 1$ (B) $\ln(1+x) - x$ (C) $\cos(\sin x) - 1$ (D) $x^x - 1$

4. 设当 $x \rightarrow 0$ 时, $e^x - (ax^2 + bx + 1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小, 则().

(A) $a = \frac{1}{2}, b = 1$ (B) $a = 1, b = 1$

(C) $a = -\frac{1}{2}, b = -1$ (D) $a = -1, b = 1$

5. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\sqrt[3]{(e^x - 1)^2}$ 是无穷小量 x^k 的同阶无穷小, 则 $k = (\quad)$.

(A) 1 (B) 2 (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{2}$

6. 当 $x \rightarrow 0$ 时, 下列无穷小量中, 最高阶的无穷小是().

(A) $\ln(x + \sqrt{1+x^2})$ (B) $1 - \cos x$

(C) $\tan x - \sin x$ (D) $e^x + e^{-x} - 2$

7. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = x - \sin x + \int_0^x t^2 e^{t^2} dt$ 是 x 的 k 阶无穷小, 则 $k = (\quad)$.

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6

8. 当 $x \rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^+$ 时, $\pi - 4\arccos\sqrt{2}x$ 与 $a\left(x - \frac{1}{2}\right)^b$ 为等价无穷小, 则().

(A) $a = 4, b = 2$ (B) $a = -4, b = 2$

(C) $a = 8, b = 1$ (D) $a = -8, b = 1$

9. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = ax^3 + bx$ 与 $g(x) = \int_0^{\sin x} (e^t - 1) dt$ 是等价无穷小, 则().

- (A) $a = \frac{1}{3}, b = 1$ (B) $a = 3, b = 0$ (C) $a = \frac{1}{3}, b = 0$ (D) $a = 1, b = 0$

10. 设 $f(x)$ 连续, $f(0) = 1$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $\int_0^{x-\tan x} f(t) dt$ 与 $(1 + \sin^a x)^b - 1$ 为等价无穷小, 则().

- (A) $a = 3, b = \frac{1}{3}$ (B) $a = 3, b = -\frac{1}{3}$
(C) $a = 1, b = \frac{1}{3}$ (D) $a = 1, b = -\frac{1}{3}$

11. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) = \ln(1+x^2) - \ln(1+\sin^2 x)$ 是 x 的 n 阶无穷小, 则正整数 n 为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[-\frac{f(x)}{x^3} + \frac{\sin x^3}{x^4} \right] = 5$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 x 的().

- (A) 等价无穷小量 (B) 同阶但不等价的无穷小量
(C) 高阶无穷小量 (D) 低阶无穷小量

13. 设 $f(x)$ 连续, 且满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3} = 1$, 又设

$$g(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{\ln(1+t^2)} dt, h(x) = \int_0^{\sin x} \frac{f(t)}{\sqrt{1+t^2}-1} dt,$$

则当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x)$ 是 $h(x)$ 的().

- (A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小
(C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

14. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1-x}{1+x^{2n}}$, 则 $f(x)$ ().

- (A) 不存在间断点 (B) 存在间断点 $x = 1$
(C) 存在间断点 $x = 0$ (D) 存在间断点 $x = -1$

15. 设 $g(x) = \begin{cases} 2-x, & x \leq 0, \\ 2+x, & x > 0, \end{cases} f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0, \\ -x-1, & x \geq 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $g[f(x)]$ 的().

- (A) 连续点 (B) 可去间断点 (C) 跳跃间断点 (D) 第二类间断点

16. 若 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [\sqrt{x^2 - x + 1} - (ax + b)] = 0$, 则常数 a, b 的值分别为().

- (A) $1, \frac{1}{2}$ (B) $1, -\frac{1}{2}$ (C) $-1, \frac{1}{2}$ (D) $-1, -\frac{1}{2}$

17. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处连续, 且 $f(2) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left[3 - f\left(\frac{\sin 2x}{x}\right) \right] =$ _____.

18. 极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-4x^2 \sin x} - 1}{x \ln(1+2x^2)} =$ _____.

19. 当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\sqrt{1+\tan \sqrt{x}} - \sqrt{1+\sin \sqrt{x}}$ 是 x 的 k 阶无穷小, 则 $k =$ _____.

20. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $x - \sin x \cos x \cos 2x$ 与 cx^k 为等价无穷小, 则 $c =$ _____, $k =$ _____.

21. 当 $x \rightarrow \pi$ 时, 若有 $\sqrt[4]{\sin \frac{x}{2}} - 1 \sim A(x-\pi)^k$, 则 $A =$ _____, $k =$ _____.

22. 已知 $f(x) = \begin{cases} (\cos x)^{x^{-2}}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$, 在 $x = 0$ 处连续, 则 $a =$ _____.

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{\sin x}^x \sqrt{3+t^2} dt}{x(e^{x^2}-1)} =$ _____.

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2}{x} =$ _____.

25. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}} + \frac{\sin x}{|x|} \right)$.

26. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2-5x} - \sqrt{x^2+7} + \frac{\sin^4 x}{\sqrt{x}} \right);$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{e^{x^2} - 1};$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \ln(1-x) - 1}{x - \arctan x};$ (4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{5x-1} - \sqrt{2x+5}}{x^2 - 4};$

(5) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2};$ (6) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\cos x \ln(x-3)}{\ln(e^x - e^3)};$

(7) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (a^{\frac{1}{x}} + a^{-\frac{1}{x}} - 2), a > 0, a \neq 1;$ (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\cot x - \frac{1}{x} \right);$

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+x}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} \right);$ (10) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\ln \left(\frac{\ln x - 1}{\ln x + 1} \right)};$

(11) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{1-\cos x}};$ (12) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x}{\cos 2x} \right)^{\frac{1}{x^2}};$

(13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x - \sin x};$ (14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x^2 \sin \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1+x)};$

(15) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{a}{x} - \left(\frac{1}{x^2} - a^2 \right) \ln(1+ax) \right], a \neq 0;$ (16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x};$

(17) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, \text{ 且 } a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots, n, n \geq 2;$

(18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1+3x^4} + \cos 4x - 2}{\sqrt[3]{1-x^2} - 1};$ (19) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^x - (\tan x)^x}{x(\sqrt{1+3\sin^2 x} - 1)}.$

27. 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x})$.

28. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{\sin x \int_0^1 \tan(xt)^2 dt}.$

29. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $\sin x(\cos x - 4) + 3x$ 为 x 的几阶无穷小?

30. 确定常数 A, B, C 的值, 使 $e^x(1+Bx+Cx^2) = 1+Ax+o(x^3)(x \rightarrow 0)$.

31. 确定函数 $f(x) = \frac{2x(x-1)}{|x|x^2-|x|}$ 的间断点, 并判定其类型.

32. 设 $a > 0, b > 0, c > 0, a \neq 1, b \neq 1$, 且

$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ c, & x = 0. \end{cases}$$

(1) 讨论 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的连续性;

(2) 讨论 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x), f(-1), f(1)$ 五者之间的大小关系.

33. 求 $f(x) = \frac{1}{1 - e^{\frac{x}{1-x}}}$ 的连续区间、间断点, 并判别间断点的类型.

34. 求函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+2} - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}$ 的间断点, 并指出其类型.

35. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{ax} - x^2 - ax - 1}{2x \arctan x - \ln(1+x^2)}, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ \frac{e^{ax} - ax - 1}{ax \ln(1+x)}, & x > 0, \end{cases}$ 问: 当常数 $a (a \neq 0)$ 为何值时,

(1) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的连续点?

(2) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的可去间断点?

(3) $x = 0$ 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点?

36. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{1+x}}{x^2 + e^{nx}}$, 求 $f(x)$ 的间断点, 并判定其类型.

37. 已知 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$ 是连续函数, 求 a, b 的值.

巩固提高



1. 设 $f(x) = x^2 - (\arcsin x)^2, g(x) = x^2 - (\arctan x)^2$, 若当 $x \rightarrow 0$ 时, 函数 $f(x)$ 是 $kg(x)$ 的等价无穷小, 则常数 $k =$ ().

(A) -2

(B) $-\frac{1}{2}$

(C) 2

(D) $\frac{1}{2}$

2. 设 $\alpha(x) = \int_0^{\sqrt{x}} \frac{\ln(1+t)}{1+t^4} dt, \beta(x) = \int_0^{\tan x} (1+t)^{\frac{1}{t}} dt$, 则当 $x \rightarrow 0^+$ 时, $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 ().

(A) 等价无穷小

(B) 同阶但非等价的无穷小

(C) 低阶无穷小

(D) 高阶无穷小

3. 设 $F(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$, 其中 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 都是不等于 1 的正数, 令 $A = \lim_{x \rightarrow 0} F(x)$,

$B = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x), C = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x)$, 则 A, B, C 的大小关系为 ().

(A) $A \leq B \leq C$

(B) $B \leq C \leq A$

(C) $C \leq A \leq B$

(D) $A \leq C \leq B$

4. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 + nx(1-x)\sin^2 \pi x}{1 + n\sin^2 \pi x}$, 则 $f(x)$ ().

(A) 处处连续

- (B) 只有第一类间断点
(C) 只有第二类间断点
(D) 既有第一类间断点, 又有第二类间断点

5. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{n+3}}{\sqrt{3^{2n} + x^{2n}}} (-\infty < x < +\infty)$, 则 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上().

- (A) 连续 (B) 有一个可去间断点
(C) 有一个跳跃间断点 (D) 有一个第二类间断点

6. 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^n \frac{1}{n^x} (0 < x < +\infty)$, 则 $f(x)$ 在其间断点处的值等于_____.

7. 记 $f(x) = 27x^3 + 5x^2 - 2$ 的反函数为 f^{-1} , 求极限: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(27x) - f^{-1}(x)}{\sqrt[3]{x}}$.

8. 计算极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt[4]{x^4 + x^3 + x^2 + x + 1} - \sqrt[3]{x^3 + x^2 + x + 1} \frac{\ln(x + e^x)}{x} \right]$.

9. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{2}{x}} - e^2 [1 - \ln(1+x)]}{x}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x \frac{\sin 2t}{\sqrt{4+t^2} \int_0^x (\sqrt{t+1} - 1) dt} dt$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + 2x^2 + 1} - xe^{\frac{1}{x}})$;

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{2}x^2 - \sqrt{1+x^2}}{(\cos x - e^{\frac{x^2}{2}}) \sin \frac{x^2}{2}}$;

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - (1+2x)^{\frac{1}{2x}}}{\sin x}$;

(6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin^2 x} \ln(1+t) dt}{(\sqrt[3]{1+x^3} - 1) \sin x}$;

(7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \left[\int_0^u \arctan(1+t) dt \right] du}{x(1 - \cos x)}$;

(8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \left[\left(\frac{2 + \cos x}{3} \right)^x - 1 \right]$;

(9) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - x^x}{1 - x + \ln x}$.

10. 设函数 $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} (x > 0)$, 证明: 存在常数 A, B , 使得当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 恒有 $f(x) = e + Ax + Bx^2 + o(x^2)$,

并求常数 A, B .

11. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x^3)}{\arcsin x - x}, & x < 0, \\ e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 + x - 1, & x > 0, \end{cases} \quad g(x) = \frac{e^{\frac{1}{x}} \arctan \frac{1}{x}}{1 + e^{\frac{2}{x}}}$, 求 $\lim_{x \rightarrow 0} f[g(x)]$.

12. 设 $a \geq 5$ 且为常数, 则 k 为何值时, 极限

$$I = \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^a + 8x^4 + 2)^k - x]$$

存在? 并求此极限值.

13. 已知极限 $I = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x^2} + \frac{b}{x^4} + \frac{c}{x^5} \int_0^x e^{-t^2} dt \right) = 1$, 求常数 a, b, c .

14. 设 $x \geq 0$ 时, $f(x)$ 满足 $f'(x) = \frac{1}{x^2 + f^2(x)}$, 且 $f(0) = 1$, 证明: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在.

15. 设 $f(x;t) = \left(\frac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{t-1}}$ ($(x-1)(t-1) > 0, x \neq t$), 函数 $f(x)$ 由表达式

$$f(x) = \lim_{t \rightarrow x} f(x;t)$$

确定, 求 $f(x)$ 的连续区间和间断点, 并判定间断点的类型.

16. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + (2x)^n + x^{2n}} (x \geq 0)$.

(1) 求函数 $f(x)$ 的表达式;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 的连续性.

第2章 数列极限

强化训练



- 已知数列 $\{x_n\}$ 满足 $x_{n+2} - \frac{4}{3}x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n = 0, n = 1, 2, 3, \dots$, 且 $x_1 = 1, x_2 = 2$, 则 $\{x_n\}$ 收敛于().
 (A) 1 (B) -1 (C) $\frac{5}{2}$ (D) $-\frac{5}{2}$
- 设 $x_n = 1 + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \dots + \frac{1}{1+2+3+\dots+n}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.
- 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\dots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n =$ _____.
- 设 $x > 0, n$ 为正整数, 记 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 [x^{\frac{1}{n}} - x^{\frac{1}{(n+1)^2}}]$, 则 $f'(x) =$ _____.
- 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \left(\arctan \frac{a}{n} - \arctan \frac{a}{n+1} \right), a > 0$.
- 设 $F(x, y) = \frac{f(y-x)}{2x}, F(1, y) = \frac{y^2}{2} - y + 5, x_0 > 0, x_1 = F(x_0, 2x_0), \dots, x_{n+1} = F(x_n, 2x_n), n = 1, 2, \dots$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.
- 设 $x_1 > 0, x_{n+1} = \ln(x_n + 1) (n = 1, 2, \dots)$, 求:
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}} \right)$;
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{x_{n+1}} \right)^{\frac{1}{x_n}}$.
- 证明下列结论:
 - 设比值极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| = q$, 若 $q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $q > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$;
 - 设根值极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = q$, 若 $q < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 若 $q > 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$.
- 设 x_0 为任意正数, $x_n = \frac{2\ 022}{2\ 023}x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^{2\ 022}} (n = 1, 2, \dots)$, 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

巩固提高



1. 设 a, b 均为大于 1 的实数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - a^{\frac{1}{n+1}}}{b^{\frac{1}{n}} - b^{\frac{1}{n+1}}} = (\quad)$.

(A) $\ln \frac{a}{b}$

(B) $\frac{\ln a}{\ln b}$

(C) $\frac{b \ln a}{a \ln b}$

(D) $\frac{a \ln a}{b \ln b}$

2. 记 $a_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a_k} = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < 1, \ln(1+x_n) = e^{x_{n+1}} - 1 (n = 1, 2, \dots)$. 证明:

(1) 当 $0 < x < 1$ 时, $\ln(1+x) < x < e^x - 1$;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求该极限.

4. 设 $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$, 又 $x_1 = a, x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$.

证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛, 且其极限是方程 $x = f(x)$ 的唯一根.

5. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 满足 $0 \leq f(x) \leq x, x \in [0, +\infty)$, 设 $a_1 \geq 0, a_{n+1} = f(a_n) (n = 1, 2, \dots)$, 证明:

(1) $\{a_n\}$ 为收敛数列;

(2) 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = t$, 则有 $f(t) = t$;

(3) 若条件改为 $0 \leq f(x) < x, x \in (0, +\infty)$, 则(2)中的 $t = 0$.

6. 设当 $a \leq x \leq b$ 时, $a \leq f(x) \leq b$, 并设存在常数 $k, 0 \leq k < 1$, 对于 $[a, b]$ 上的任意两点 x_1 与 x_2 , 都有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq k|x_1 - x_2|$. 证明:

(1) 存在唯一的 $\xi \in [a, b]$ 使 $f(\xi) = \xi$;

(2) 对于任意给定的 $x_1 \in [a, b]$, 定义 $x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \xi$.

第3章 一元函数微分学的概念

强化训练



1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{2^x - e^{-x} + x}{\arctan x}, & x \neq 0, \\ a, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处().

(A) 可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}(\ln^2 2 + 1)$

(B) 可导, 且 $f'(0) = \frac{1}{2}(\ln^2 2 - 1)$

(C) 不可导

(D) 是否可导与 a 的取值有关

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{x^2} - 1}{x}, & x > 0, \\ x^2 g(x), & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 为有界函数, 则在 $x = 0$ 处, $f(x)$ ().

(A) 极限不存在

(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导

(D) 可导

3. 设 $f(x) = \int_0^1 \ln \sqrt{x^2 + y^2} dy, 0 \leq x \leq 1$, 则 $f'_+(0) = ()$.

(A) $-\frac{\pi}{2}$

(B) $\frac{\pi}{2}$

(C) $-\pi$

(D) π

4. 设函数 $f(x)$ 是定义在 $(-1, 1)$ 内的奇函数, 且 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$, 则 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的导数为().

(A) a

(B) $-a$

(C) 0

(D) 不存在

5. 设函数 $f(x)$ 可导, 且 $y = f(x^3)$. 当自变量 x 在 $x = -1$ 处取得增量 $\Delta x = -0.1$ 时, 相应的函数增量 Δy 的线性主部为 0.3 , 则 $f'(-1) = ()$.

(A) -1

(B) 0.1

(C) 1

(D) 0.3

6. 若 $f(x) = e^{10x} x(x+1)(x+2) \cdots (x+10)$, 则 $f'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设对任意 $x, f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 且 $f(0) = 1, f'(0) = C$ (常数), 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. 已知 $f(x) = \sqrt{1+x} + \arcsin \frac{1-x}{1+x^2}$, 则 $f'(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 $f(x)$ 可导, $f(0) = f'(0) = 1$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)e^x - 1}{f(x)\cos x - 1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $y = f(x)$ 由方程 $\sin(xy) + \ln y - x = 1$ 确定, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[f\left(\frac{2}{n}\right) - e \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 在区间 $[0, 2]$ 上, $f(x) = x(x^2 - 4)$. 设对任意的 x 都满足 $f(x) = kf(x+2)$, 其中 k 为常数.

(1) 写出 $f(x)$ 在 $[-2, 0)$ 上的表达式;

(2) 问 k 为何值时, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导?

12. 设函数 $y = f(x) = \begin{cases} 1 - 2x^2, & x < -1, \\ x^3, & -1 \leq x \leq 2, \\ 12x - 16, & x > 2. \end{cases}$

(1) 写出 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式;

(2) 讨论 $g(x)$ 是否有不可导点, 若有, 指出这些点.

13. 设 $f(x)$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$ ($a > 0$) 内有定义, 且 $f'(0) = a$, 又对任意的 $x, y, x+y \in \left(-\frac{\pi}{2a}, \frac{\pi}{2a}\right)$, 有 $f(x+y) = \frac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$, 求 $f(x)$.

14. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, 且对任意的 $x, x_1, x_2 \in (-\infty, +\infty)$, 有

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) \cdot f(x_2), f(x) = 1 + xg(x),$$

其中 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$. 证明: $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内处处可导.

巩固提高



1. 已知 $f(0) = 0, f'(0) = 2$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[f\left(\frac{1}{n^2}\right) - \frac{1}{n^2} + 1 \right]^{3n^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. (1) 设 $f(x) = \sqrt{x+5} \cdot \sqrt[3]{2x-7}, g(x) = \sqrt{x-3} \cdot \sqrt[3]{3x-11}$, 求 $f'(4), g'(4)$;

(2) 求极限 $I = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+5} \cdot \sqrt[3]{2x-7} - 3}{1 - \sqrt{x-3} \cdot \sqrt[3]{3x-11}}$.

3. 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上, 对于任意的 x_1, x_2 , 有 $|f(x_1) - f(x_2)| \leq (x_1 - x_2)^2$, 证明: $f(x)$ 是常值函数.

4. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ 都是趋于 0 的正项数列, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(x_0 + \alpha_n) - f(x_0 - \beta_n)}{\alpha_n + \beta_n}$.

第4章 一元函数微分学的计算

强化训练



1. 设函数 $y = f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内二阶可导, $f(0) = 3, f'(0) = f''(0) = \frac{1}{2}$, 则 $\left. \frac{d^2 x}{dy^2} \right|_{y=3} = (\quad)$.
 (A) -4 (B) -2 (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$
2. 设函数 $f(x) = x^2 2^x$, 则对于任意正整数 $n > 1$, $f(x)$ 在 $x = 0$ 处的 n 阶导数 $f^{(n)}(0) = (\quad)$.
 (A) $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$ (B) $n(n-2)(\ln 2)^{n-1}$
 (C) $n(n+1)(\ln 2)^{n-2}$ (D) $n(n+2)(\ln 2)^{n-1}$
3. 设 $f(x) = (x-1)^n x^{2n} \sin \frac{\pi}{2} x$, 则 $f^{(n)}(1) = (\quad)$.
 (A) $(n-1)!$ (B) $n!$
 (C) $n! + 1$ (D) $(n+1)!$
4. 设 $f(x) = x e^{-x}$, 则 $f^{(n)}(x) = (\quad)$.
 (A) $(-1)^n (1+n) x e^{-x}$ (B) $(-1)^n (1-n) x e^{-x}$
 (C) $(-1)^n (x+n) e^{-x}$ (D) $(-1)^n (x-n) e^{-x}$
5. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3 \arctan \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 若 $f^{(n)}(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 则 n 的最大值是 $(\quad)$.
 (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
6. 设函数 $f(x) = x^3 + 2x - 4, g(x) = f[f(x)]$, 则 $g'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
7. 设 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$ 且 $f'(x) = \arctan x^2$, 则 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\ln(x^2 + y) = x^3 y + \sin x$ 确定, 则 $\left. dy \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 已知可微函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = -y e^x + 2e^y \sin x - 7x$ 所确定, 则 $y''(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 设 $x = f(y)$ 是函数 $y = x + \ln x$ 的反函数, 则 $\frac{d^2 f}{dy^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.
11. 设 $y = \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}$, 则 $\left. y'' \right|_{x=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设 $y = \frac{x^2}{1-x} \sqrt[3]{\frac{2+x}{(2-x)^2}} + \sin x$, 则 $y' =$ _____.

13. 若 $f(x) = x^5 e^{6x}$, 则 $f^{(101)}(0) =$ _____.

14. 设 $f(x) = \frac{x}{1-2x^4}$, 则 $f^{(101)}(0) =$ _____.

15. 设 $f'(\ln x) = x \ln x$, 则 $f(x)$ 的 n 阶导数 $f^{(n)}(x) =$ _____.

16. 设函数 $f(x)$ 二阶可导, $f'(0) = 1, f''(0) = 2$, 且 $\begin{cases} x = f(t) - \pi, \\ y = f(e^{3t} - 1), \end{cases}$ 求 $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=0}, \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{t=0}$.

17. 设函数 $y = y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = 1 + t^2, \\ y = \cos t \end{cases}$ 所确定, 求:

(1) $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2 y}{dx^2}$;

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{dy}{dx}$ 和 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{d^2 y}{dx^2}$.

18. 已知 $u = g(\sin y)$, 其中 $g'(v)$ 存在, $y = f(x)$ 由参数方程

$$\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = b \sin t \end{cases} \quad \left(0 < t < \frac{\pi}{2}, a \neq 0, b \neq 0 \right)$$

所确定, 求 du .

19. 设 $u = f[\varphi(x) + y^2]$, 其中 $y = y(x)$ 由方程 $y + e^y = x$ 确定, 且 $f(x), \varphi(x)$ 均有二阶导数, 求 $\frac{du}{dx}$ 和 $\frac{d^2 u}{dx^2}$.

20. 设函数 $f(x)$ 满足 $f(x) + 2f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{3}{x} (x \neq 0)$, 求 $f'(x) (x \neq 0)$.

21. 设 n 为正整数, $f(x) = g'(x), g(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f^{(n)}(0)$.

巩固提高



1. 设 $y = y(x)$ 由 $\begin{cases} x = \arctan t, \\ 2y - ty^2 + e^t = 5 \end{cases}$ 所确定, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____.

2. 设 $\begin{cases} x = \tan t, \\ y = \frac{u(t)}{\cos t}, \end{cases}$ 函数 $y = y(x)$ 满足 $(1+x^2)^2 y'' = y$, 则 $\frac{d^2 u}{dt^2} =$ _____.

3. 设 n 为正整数, $f(x) = \frac{x}{2x^2 - 3x + 1}$, 则 $f^{(n)}(0) =$ _____.

4. 设 $f(x) = (x^2 - 3x + 2)^n \cos \frac{\pi x^2}{16}$, 则 $f^{(n)}(2) =$ _____.

5. 设 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} x \cos 2x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cdots \cos \frac{x}{2^n} (x > 0)$.

(1) 证明 $f(x) = \cos 2x \sin x$;

(2) 求 $f^{(20)}(x)$.

6. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - e^{-x}}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其中 $g(x)$ 有二阶连续导数, 且 $g(0) = 1, g'(0) = -1$.

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续性.

7. 设 $y = \arcsin x$.

(1) 证明其满足方程 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0 (n \geq 0)$;

(2) 求 $y^{(n)} \Big|_{x=0}$.

第5章 一元函数微分学的应用(一)

——几何应用

强化训练



1. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, $f'(a)f'(b) < 0$. 下述命题

- ① 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) < f(a)$;
- ② 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) > f(b)$;
- ③ 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f'(x_0) = 0$;
- ④ 至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)]$.

正确的个数为().

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

2. 设函数 $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + ax + b$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, 其中 a, b 是常数, 则().

- (A) 对任意实数 b , $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 上单调减少
- (B) 对任意实数 a , $f(x)$ 在区间 $(-1, +\infty)$ 上单调增加
- (C) 存在无穷多个实数 a , $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内单调减少
- (D) 存在某个实数 b , $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是单调函数

3. 设曲线 $y = x^3 + ax + b$ 和 $3y = 2x^3 - xy^2 - 4$ 在点 $(1, -2)$ 处相切, 其中 a, b 是常数, 则().

- (A) $a = 2, b = -5$ (B) $a = -5, b = 2$
(C) $a = -4, b = 1$ (D) $a = 1, b = -4$

4. 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y =$

$f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B)0 (C)-1 (D)-2

5. 函数 $f(x) = \int_0^x \sin^2(\pi t) dt - \frac{x^2}{2}$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上的驻点共有().

- (A)1 个 (B)2 个 (C)3 个 (D)4 个

6. 由方程 $2y^3 - 2y^2 + 2xy + y - x^2 = 0$ 确定的函数 $y = y(x)$ ().

- (A) 有驻点且为极小值点
- (B) 有驻点且为极大值点
- (C) 有驻点但不是极值点
- (D) 没有驻点

7. 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且满足 $f(x) + 3 \int_0^x f(t) dt = \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}$, 则 $f(x)$ 必存在().

- (A) 极大值 $-\frac{1}{3}$ (B) 极大值 $-\frac{1}{3} \ln 3$
(C) 极小值 $\frac{1}{3}$ (D) 极小值 $\frac{1}{3} \ln 3$

8. 曲线 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}}, & x < 0, \\ (3-x)\sqrt{x}, & x \geq 0 \end{cases}$ 的拐点个数为().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

9. 设 $f(x)$ 表示曲线 $y = e^x$ 上任意点 (x, e^x) 处的曲率, 则 $f(x)$ 的最大值是().

- (A) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ (B) $\frac{2\sqrt{3}}{9}$
(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (D) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

10. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图 1-5-1 所示, 并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 也存在, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为().

- (A) 1 (B) 2
(C) 3 (D) 4

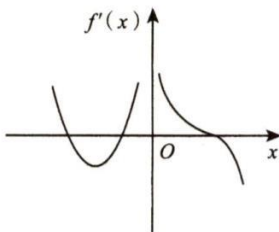


图 1-5-1

11. 设函数 $f(x) = \int_0^x \frac{(1-t^2)\arctan(1+t^2)}{e^{-t} + t^2} dt$ ($-\infty < x < +\infty$), 则().

- (A) $f(x)$ 仅有极小值 (B) $f(x)$ 仅有极大值
(C) $f(x)$ 既有极小值又有极大值 (D) $f(x)$ 没有极值

12. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图 1-5-2 所示, 则 $f(x)$ 有().

- (A) 1 个极小值点和 2 个极大值点
(B) 2 个极小值点和 1 个极大值点
(C) 2 个极小值点和 2 个极大值点
(D) 3 个极小值点和 1 个极大值点

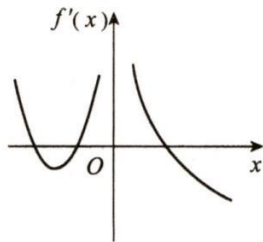


图 1-5-2

13. 设函数 $y = f(x)$ 连续, 且其导函数 $f'(x)$ 除间断点外均可导, 图形如图 1-5-3 所示, 则曲线 $y = f(x)$ ().

- (A) 有两个极大值点, 一个极小值点, 两个拐点
(B) 有两个极大值点, 一个极小值点, 一个拐点
(C) 有一个极大值点, 两个极小值点, 一个拐点
(D) 有一个极大值点, 一个极小值点, 两个拐点

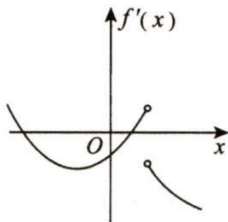


图 1-5-3

14. 设 $f(x) = |x(3-x)|$, 则().

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(B) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点
(D) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, 0)$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点

15. 设 $f(x)$ 的导数在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{x} = 3$, 则 $x=0$ ().

- (A) 是 $f(x)$ 的极小值点
 (B) 是 $f(x)$ 的极大值点
 (C) 不是 $f(x)$ 的极值点, 但 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点
 (D) 不是 $f(x)$ 的极值点, 且 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

16. 设函数 $f(x) = \int_0^1 |x-t| dt + \int_0^x \sqrt{x^2-t^2} dt (0 < x < +\infty)$, 则 $f(x)$ ().

- (A) 仅有最小值
 (B) 仅有最大值
 (C) 既有最小值又有最大值
 (D) 既无最小值又无最大值

17. 设函数 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \arctan t, \\ y = -\frac{1}{3}t^3 - t + \frac{1}{2} \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ ().

- (A) 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上是凸的, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是凹的
 (B) 在区间 $(-\infty, \frac{1}{2})$ 上是凹的, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上是凸的
 (C) 在区间 $(-\infty, \frac{1}{6})$ 上是凸的, 在 $(\frac{1}{6}, +\infty)$ 上是凹的
 (D) 在区间 $(-\infty, \frac{1}{6})$ 上是凹的, 在 $(\frac{1}{6}, +\infty)$ 上是凸的

18. 曲线 $y = \frac{x^2 \arctan x}{x-1}$ 的渐近线的条数为 ().

- (A) 0
 (B) 1
 (C) 2
 (D) 3

19. 设 $f(x) = e^{\frac{1}{x}} + \sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2-x+1}$, 则曲线 $y=f(x)$ 的渐近线 ().

- (A) 只有 1 条
 (B) 只有 2 条
 (C) 只有 3 条
 (D) 至少有 4 条

20. 已知抛物线 $L: y = ax^2 + bx + c$ 在其上的点 $P(1, 2)$ 处的曲率圆的方程为 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{2}$, 则 $(a, b, c) =$ ().

- (A) $(2, 3, -3)$
 (B) $(2, -3, 3)$
 (C) $(-2, 3, -3)$
 (D) $(-2, -3, 3)$

21. 设曲线 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases} x = (1-t)\ln(1+t), \\ y = t + \cos^2 t \end{cases}$ 确定, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 对应的

点处的曲率等于 ().

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
 (B) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
 (C) $\sqrt{2}$
 (D) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$

22. 曲线 $y = \sqrt{4x^2 - 3x + 7} - 2x$ 的渐近线的条数为 ().

- (A) 0
 (B) 1
 (C) 2
 (D) 3

23. 曲线 $y = \ln(e - \frac{1}{x})$ 的全部渐近线为 _____.

24. 设函数 $f(x) = xe^{-x} - \sqrt{4x^2 - 3x + 5}$, 则曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线为 _____.

25. 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[f(x)+1]x^2}{x-\sin x} = 2$, 则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0, f(0))$ 处的切线方程为_____.

26. 设 $y=y(x)$ 是由参数方程 $\begin{cases} x=te^t, \\ y=t^2e^t \end{cases}$ 所确定的函数, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy'(x)}{e^{x^2}-1} =$ _____.

27. 设 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x=3t^2+2t+3, \\ y=e^y \sin t+1 \end{cases}$ 所确定, 则曲线 $y=y(x)$ 在 $t=0$ 对应的点处的曲率 $k=$ _____.

28. 曲线 $4x^2+y^2=4$ 在点 $(0,2)$ 处的曲率为_____.

29. 曲线 $e^x - e^y = xy$ 在点 $(0,0)$ 处的曲率圆的方程为_____.

30. 已知 $a_n = \frac{(1+n)^3}{(1-n)^2}$, $n=2,3,\dots$, 则数列 $\{a_n\}$ 的最小值为_____.

31. 设曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为 $\begin{cases} x(t)=t-\sin t, \\ y(t)=1-\cos t, \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi, P(x,y) (0 < x < \pi)$ 是曲线上的动点, 在点 P 处作曲线的切线, 记该切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{u(x)}{x} =$ _____.

32. 若曲线 $C: y=f(x)$ 由方程 $2x-y=2\arctan(y-x)$ 确定, 则曲线 C 在点 $(1+\frac{\pi}{2}, 2+\frac{\pi}{2})$ 处的切线方程是_____.

33. 曲线 $r = \cos 2\theta$ 在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 处的切线方程为_____.

34. 曲线 $y = \int_2^x \frac{x}{4+t^3} dt$ 在其拐点处的切线方程为_____.

35. 求曲线 $y = x^2 + 5x + 4$ 过点 $(0,3)$ 的切线方程.

36. 已知两曲线分别由 $y=f(x)$ 与 $xy + e^{x+y} = 1$ 所确定, 且在点 $(0,0)$ 处的切线相同, 写出此切线方程, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} nf\left(\frac{2}{n}\right)$.

37. 设函数 $f(x)$ 可导, 且满足 $xf'(x) = f'(-x) + 1, f(0) = 0$, 求:

(1) $f'(x)$;

(2) 函数 $f(x)$ 的极值.

38. 用火车在两地之间运送货物, 设每节车厢的装载量相同. 若每次拖挂 8 节车厢, 则一天最多能来回 10 次, 若每次拖挂 12 节车厢, 则一天最多只能来回 8 次. 已知车厢增多的节数与来回减少的次数成正比, 问每次拖挂多少节车厢才能使一天的运货总量最大?

39. 曲线 $y=y(x)$ 可表示为 $\begin{cases} x=t^3-t, \\ y=t^4+t, \end{cases} t$ 为参数. 证明:

(1) $t=0$ 对应的点为 $y=y(x)$ 的拐点;

(2) $g(t) = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ 在 $t=0$ 处取得极大值.

40. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 3x^2 + 2x^3, & x \leq 0, \\ \ln(1+x) - x^2, & x > 0, \end{cases}$ 求 $f'(x)$ 的极小值.

41. 设函数 $f(x)$ 满足 $3f(x) + 4x^2 f\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{7}{x} = 0 (x \neq 0)$, 求 $f(x)$ 的极大值与极小值.

巩固提高



1. 设 n 为正整数, 则关于函数 $f(x) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ 的极值, 下列说法正确的是().

- (A) 仅有极小值 (B) 仅有极大值
(C) 既无极小值也无极大值 (D) 是否有极值依赖于 n 的取值

2. 设 $f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续正值函数, 满足 $f(x) + \int_{x-1}^x f(t) dt = C$, 其中 C 为正常数, 则函数 $e^{2x}f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上().

- (A) 严格单调递减 (B) 严格单调递增
(C) 存在极小值 (D) 存在极大值

3. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, 且 $f'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调减少, $f(0) = 0$, 则当 $b > a > 0$ 时, 下列关系式正确的是().

- (A) $af(b) > bf(a)$ (B) $af(b) < bf(a)$
(C) $bf(b) > af(a)$ (D) $bf(b) < af(a)$

4. 曲线 $y = a^x$ 与直线 $y = x$ 相交的充要条件是().

- (A) $0 < a \leq 1$ (B) $0 < a \leq e$
(C) $0 < a \leq e^{\frac{1}{e}}$ (D) $0 < a \leq \frac{1}{e^e}$

5. 设函数 $f(x) = \max_{0 \leq y \leq 1} \frac{|x-y|}{x+y+1}$, $0 \leq x \leq 1$, 则 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上的最小值与最大值分别为().

- (A) $0, 2 - \sqrt{3}$ (B) $0, \frac{1}{2}$ (C) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{1}{2}$ (D) $2 - \sqrt{3}, \frac{1}{2}$

6. 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某邻域内连续且在 $x = 0$ 处存在二阶导数 $f''(0)$. 又设

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t f(x-t) dt}{x^4} = a (\text{常数 } a > 0),$$

则().

- (A) $x = 0$ 不是 $f(x)$ 的驻点
(B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的驻点, 但不是 $f(x)$ 的极值点
(C) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极小值点
(D) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的极大值点

7. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其一阶导函数 $f'(x)$ 的图形如图 1-5-4 所示, 并设在 $f'(x)$ 存在处 $f''(x)$ 亦存在, 则曲线 $y = f(x)$ ().

- (A) 只有 1 个极大值点与 1 个拐点
(B) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 1 个拐点

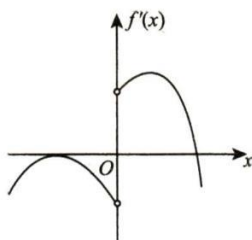


图 1-5-4

(C) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 2 个拐点

(D) 有 1 个极小值点, 1 个极大值点与 3 个拐点

8. 设 $f(x)$ 是四次多项式, 其最高次幂项的系数为 1, 已知曲线 $y = f\left(\sin \frac{\pi x}{2}\right) - \sin f(x)$ 在 $x = 0, x = 1$ 处与 x 轴相切, 则 $f(x)$ 的表达式为_____.

9. 设函数 $y = f(x)$ 由方程 $\int_x^{2y+x} e^{-(t-x)^2} dt = x^2 + 3\sin x$ 确定, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(0, 0)$ 处的切线方程为_____.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 2$ 处可微, 且满足

$$2f(2+x) + f(2-x) = 3 + 2x + o(x), \quad \textcircled{1}$$

这里 $o(x)$ 表示比 x 高阶的无穷小 (当 $x \rightarrow 0$ 时), 求微分 $d[f(x)] \Big|_{x=2}$, 并求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(2, f(2))$ 处的切线方程.

11. 设 $y = \tan^n x$ 在 $x = \frac{\pi}{4}$ 处的切线在 x 轴上的截距为 x_n , 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} y(x_n)$.

12. 求函数 $f(x) = \begin{cases} x^{2x}, & x > 0, \\ x+2, & x \leq 0 \end{cases}$ 的单调区间和极值.

13. 求 $y = \sqrt{4x^2 + x} \ln\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ 的全部渐近线.

14. 设 $f(x)$ 满足方程 $\frac{1}{x}f''(x) + 3x[f'(x)]^2 = \left(1 + \frac{1}{x}\right)\ln^2(1+x) - x$, 若 $x_0 (x_0 > 0)$ 是 $f(x)$ 的一个驻点, 证明: x_0 是 $f(x)$ 的极大值点.

15. 求函数 $f_n(x) = x^n e^{-n^2 x} (n = 2, 3, \dots)$ 在 $[0, +\infty)$ 内的最值, 并求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), x \geq 0$.

$$16. \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(1 + \cos \frac{x}{n} + \cos \frac{2x}{n} + \dots + \cos \frac{n-1}{n}x \right), & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ f(-x), & x < 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f'(0)$;

(2) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的最大值.

17. 设有曲线弧 $y = \sin x (0 < x < \pi)$.

(1) 求出曲线弧的最小曲率半径;

(2) 求与曲线弧在曲率半径最小的点处相切且具有相同曲率和相同凹凸性的抛物线方程.

第6章 一元函数微分学的应用(二)

——中值定理、微分等式与微分不等式

强化训练



1. 设 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 上一阶可导且 $f'(x) \geq \frac{1}{4}$, $f(2) \geq 0$, 则在下列区间上必有 $f(x) \geq \frac{1}{4}$ 成立的是().
- (A) $[0, 1]$ (B) $[1, 2]$ (C) $[2, 3]$ (D) $[3, 4]$
2. 设函数 $f(x) = xe^{\frac{1}{1-x^2}}$, $-1 < x < 1$, 则().
- (A) $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有一个零点 (B) $f(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有两个零点
- (C) $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有一个零点 (D) $f'(x)$ 在 $(-1, 1)$ 内有两个零点
3. 若可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) < 2f(x)$, 则当 $b > a > 0$ 时, 必有().
- (A) $b^2 f(a) > a^2 f(b)$ (B) $b^2 f(a) < a^2 f(b)$
- (C) $b^2 f(\ln a) > a^2 f(\ln b)$ (D) $b^2 f(\ln a) < a^2 f(\ln b)$
4. 设 $f(x)$ 为可导函数, $a < b$. 若 $f(a) = f(b) = 0$, $f'(a) \cdot f'(b) > 0$, 则方程 $f'(x) = 0$ 在 (a, b) 内().
- (A) 至少有一个实根 (B) 至多有一个实根
- (C) 至少有两个实根 (D) 至多有两个实根
5. 若方程 $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + k = 0$ 有四个不同的实根, 则常数 k 的取值范围为_____.
6. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内可导, 且 $f(0) = f(2) = 1$, $f(1) = -1$. 证明:
- (1) 存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi) = 2023f(\xi)$;
- (2) 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$.
7. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上连续, 在 $(0, 2)$ 内二阶可导, 且 $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{f(x)}{\cos \pi x} = 0$, $2 \int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = f(2)$. 证明: 存在 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f''(\xi) = 0$.
8. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 2]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(2)$. 证明:
- (1) 存在一点 $\xi \in (0, 2)$, 使得 $f'(\xi) = \xi - 1$;
- (2) 存在一点 $\eta \in (0, 2)$, 使得 $\eta f''(\eta) + f'(\eta) - 2\eta + 1 = 0$.
9. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$. 证明:
- (1) 对 $\forall x \in (a, b)$, 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f''(\xi) = \frac{2f(x)}{(x-a)(x-b)}$;

(2) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta_1) + f'(\eta_2) = 0$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = a, f(b) = b$. 证明:

(1) 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = a + b - \xi$;

(2) 至少存在一点 $\eta \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta) = 1$;

(3) 存在两个不同的点 $\eta_1, \eta_2 \in (a, b)$, 使得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2) = 1$;

(4) 至少存在一点 $\xi_1 \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi_1) + f(\xi_1) - \xi_1 = 1$.

11. 设 ξ_a 为函数 $f(x) = \arctan x$ 在区间 $[0, a]$ 上使用拉格朗日中值定理时的中值, 求 $\lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{\xi_a}{a}$.

12. 讨论常数 a 的值, 确定曲线 $y = ae^x$ 与 $y = 1 + x$ 的公共点的个数.

13. 讨论方程 $axe^x + b = 0 (a > 0)$ 实根的情况.

14. 证明: 方程 $x^a = \ln x (a < 0)$ 在 $(0, +\infty)$ 内有且仅有一个实根.

15. 设 $\varphi(x) = x^x(1-x)^{1-x} (0 < x < 1)$, 求方程 $\varphi(x) = r \left(\frac{1}{2} \leq r < 1 \right)$ 在区间 $(0, 1)$ 内根的个数.

16. 设函数 $\varphi(x)$ 可导, 且 $\varphi(0) = 0, \varphi'(x)$ 单调减少, 证明: $\forall x \in (0, 1), \varphi(1)x < \varphi(x) < \varphi'(0)x$ 成立.

17. 证明: 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时, $\frac{\sin x}{x} > \sqrt[3]{\cos x}$ 成立.

18. 证明: $e^x + e^{-x} \geq 2x^2 + 2\cos x, -\infty < x < +\infty$.

19. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f'(a) = f'(b) = 0$, 证明存在 $\xi \in (a, b)$, 使

$$|f''(\xi)| \geq \frac{4}{(b-a)^2} |f(b) - f(a)|.$$

20. 证明: 当 $0 < a < b < 1$ 或 $1 < a < b$ 时, $\frac{b^a}{a^b} < \frac{b}{a}$.

21. 若用 $\frac{2(x-1)}{x+1}$ 来近似 $\ln x$, 证明当 $x \in [1, 2]$ 时, 其误差不超过 $\frac{1}{12}(x-1)^3$.

22. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上二阶可导, $f(0) = 0$, 且 $f(1) = 1$. 证明:

(1) 存在 $x_0 \in (0, 1)$, 使得 $f'(x_0) = 1$;

(2) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $\xi f''(\xi) + (1+\xi)f'(\xi) = 1 + \xi$.

23. 设实数 $\rho \geq 1$, 证明: 不等式 $\frac{\rho-1}{\rho}a + \frac{1}{\rho}a^{1-\rho}b^\rho \geq b$ 对一切正实数 a, b 都成立.

24. 设 $f(x_0+h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2!}f''(x_0) + \frac{h^3}{3!}f'''(x_0 + \theta h)$, 其中 $0 < \theta < 1, f^{(4)}(x)$ 连续且 $f^{(4)}(x_0) \neq 0$, 求 $\lim_{h \rightarrow 0} \theta$.

巩固提高



1. 已知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f(a) = f(b) = 0$, 又 $f(x)$ 满足方程 $f''(x) + \cos f'(x) = e^{f(x)}$, 则在 (a, b) 内 $f(x)$ ().

(A) 不小于 0

(B) 不大于 0

(C) 恒为 0

(D) 恒不为 0

2. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上可导, $f(0) = 0$, 且存在常数 $k > 0$, 使得 $|f'(x)| \leq k|f(x)|$ 在 $[0, +\infty)$ 上成立, 则在 $(0, +\infty)$ 上().

(A) 仅当 $0 < k < 1$ 时, $f(x)$ 恒为零(B) 仅当 $k > 1$ 时, $f(x)$ 恒不为零(C) 当 $k = 1$ 时, $f(x)$ 不恒为零(D) k 为任意正常数时, $f(x)$ 均恒为零

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上二阶可导, 且 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上恒大于零或恒小于零, $f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在两个不同的点 $\xi_1, \xi_2 \in (a, b)$, 使得 $2[f'(\xi_i)]^2 + f(\xi_i)f''(\xi_i) = 0 (i = 1, 2)$.

4. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 内具有二阶导数, 且 $|f(x)| \leq 1, 0 < |f''(x)| \leq 2 (0 \leq x < +\infty)$. 证明: $|f'(x)| \leq 2\sqrt{2}$.

5. 证明: $\cos \sqrt{2}x < -x^2 + \sqrt{1+x^4}$, 其中 $x \in (0, \frac{\sqrt{2}\pi}{4})$.

6. 当 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 时, 比较 $(\sin x)^{\cos x}$ 与 $(\cos x)^{\sin x}$ 的大小.

7. 设 $F(x) = \int_{-1}^1 |x-t| e^{-t^2} dt - \frac{1}{2}(e^{-1} + 1)$, 讨论 $F(x)$ 在区间 $[-1, 1]$ 上的零点个数.

8. 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若实数 $x_0 \in I$, 且满足 $f(x_0) = x_0$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 在区间 I 上的一个不动点. 设函数 $f(x) = 3x^2 + \frac{1}{x^2} - \frac{18}{25}$, 则 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上是否有不动点? 若有, 求出所有不动点; 若没有, 说明理由.

9. 设函数 $f(x)$ 在 $[-2, 2]$ 上二阶可导, 且 $|f(x)| \leq 1$, 又 $f^2(0) + [f'(0)]^2 = 4$. 证明: 在 $(-2, 2)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

第7章 一元函数微分学的应用(三)

——物理应用

强化训练



1. 球的半径以 5 cm/s 的速度匀速增长,问球的半径为 50 cm 时,球的表面积和体积的增长速度各是多少?

2. 半径为 $\frac{1}{2}$ 的圆在抛物线 $x = \sqrt{y}$ 凹的一侧上滚动.

(1) 求圆心 (ξ, η) 的轨迹方程;

(2) 当圆心以速率 V_0 匀速上升时,求圆心的横坐标 ξ 的增长速度.

巩固提高



1. 港口甲到港口乙的距离为 $1\,000 \text{ km}$,货船从港口甲出发,沿江以匀速度 v (单位: km/h) 逆流而上驶往港口乙,假定货船在单位时间内的燃料消耗与 $v^{\frac{3}{2}}$ 成正比,比例常数为 1 ,又知道江水流速为 20 km/h . 问货船速度 v 等于何值时,航程中消耗燃料的量 A 最小?

2. 设一质点在单位时间内由点 A 从静止开始做直线运动至点 B 停止, A, B 两点间距离为 1 ,证明:该质点在 $(0, 1)$ 内总有一时刻的加速度的绝对值不小于 4 .

第8章 一元函数积分学的概念与性质

强化训练



1. 已知 $f(x)$ 的一个原函数为 $\cos x$, 则 $f'(x)$ 等于().

- (A) $\cos x$ (B) $-\cos x$ (C) $\sin x$ (D) $-\sin x$

2. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, a 为非零常数, 则下列命题正确的是().

(A) $\int \frac{1}{x} f(\ln ax) dx = \frac{1}{a} F(\ln ax) + C$ (B) $\int \frac{1}{x} f(\ln ax) dx = F(\ln ax) + C$

(C) $\int \frac{1}{x} f(\ln ax) dx = a F(\ln ax) + C$ (D) $\int \frac{1}{x} f(\ln ax) dx = \frac{1}{x} F(\ln ax) + C$

3. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0, \\ 2x + a, & x > 0, \end{cases}$ 其中 a 为常数, $F(x) = \int_{-1}^x f(t) dt$, 则函数 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处

().

- (A) 不一定连续 (B) 一定连续但不可导
(C) 一定连续但不一定可导 (D) 一定可导

4. 设 $f(u)$ 为 $(-\infty, +\infty)$ 上的连续函数, a 为常数. 则下述积分为 x 的偶函数的是().

(A) $\int_a^x du \int_0^u f(v^2) dv$ (B) $\int_a^x du \int_0^u f(v^3) dv$

(C) $\int_a^x du \int_0^u [f(v)]^2 dv$ (D) $\int_a^x du \int_0^u [f(v)]^3 dv$

5. 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的连续函数, $G(x) = 2 \int_0^x f(t) dt - x \int_0^2 f(t) dt$, 则().

- (A) $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $G'(x)$ 也是以 2 为周期的周期函数
(B) $G(x)$ 是以 2 为周期的周期函数, $G'(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数
(C) $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数, $G'(x)$ 是以 2 为周期的周期函数
(D) $G(x)$ 不是以 2 为周期的周期函数, $G'(x)$ 也不是以 2 为周期的周期函数

6. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且为单调减少的正值函数, 记 $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$, $I_2 = \int_0^1 f(\sin x) dx$,

$I_3 = \int_0^1 \sin f(x) dx$, 则().

- (A) $I_1 < I_2 < I_3$ (B) $I_3 < I_2 < I_1$
(C) $I_2 < I_3 < I_1$ (D) $I_3 < I_1 < I_2$

7. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} + x^2, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $\int_0^x f(t) dt$ 是().

(A) 可导的奇函数

(B) 连续,但在 $x = 0$ 处不可导的奇函数

(C) 可导的偶函数

(D) 连续,但在 $x = 0$ 处不可导的偶函数

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上二阶可导, $f''(x) > 0$, 且满足 $|f(x)| \leq x^2$, 记 $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$,

则().

(A) $I > 0$

(B) $I < 0$

(C) $I = 0$

(D) I 与 0 的大小关系不确定

9. 设 $M = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^2} \cos^6 x dx$, $N = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 x + \cos^6 x) dx$, $P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^2 \sin^3 x - \cos^6 x) dx$,

则().

(A) $N < P < M$

(B) $M < P < N$

(C) $N < M < P$

(D) $P < M < N$

10. $\int e^{-|x|} dx = ()$.

(A) $\begin{cases} -e^{-x} + C, & x \geq 0, \\ e^x + C, & x < 0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} -e^{-x} + C, & x \geq 0, \\ e^x - 2 + C, & x < 0 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} -e^{-x} + C, & x \geq 0, \\ e^x + C + 2, & x < 0 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} e^x + C, & x \geq 0, \\ -e^{-x} + C, & x < 0 \end{cases}$

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 2]$ 上连续, 且满足 $f(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t) dt + x$, 则 $\frac{f(0)}{f(2)} = ()$.

(A) $\frac{1}{3e^2}$

(B) $\frac{1}{2e^2}$

(C) $\frac{1}{3}$

(D) $\frac{1}{2}$

12. 下列反常积分中, 收敛的是().

(A) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$

(B) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x(x^2-1)}$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x(x-1)}}$

(D) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-1}}$

13. 设 m 与 n 都是常数, 若反常积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m} dx$ 收敛, 则 m 与 n 的取值范围为().

(A) $n > -2, m > n+1$

(B) $n > -2, m < n+1$

(C) $n < -2, m < n+1$

(D) $n < -2, m > n+1$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}}{n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{2}{n+2} + \cdots + \frac{3n}{4n} \right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 已知 $f(x) = a^{x^3}$, $a > 0$ 且 $a \neq 1$. 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \ln[f(1)f(2)\cdots f(n)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且满足 $f(x) = \frac{\ln x}{(1+x)^2} +$

$\frac{1+x^2}{1+x^4} \int_1^{+\infty} f(x) dx$, 则 $\int_1^{+\infty} f(x) dx =$ _____.

19. 设 $f(x)$ 可导, 且 $f(x) = x + x \int_0^1 f(x) dx + x^2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$, 求 $f(x)$.

20. 已知 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, $f(x) = 3x - \sqrt{1-x^2} \int_0^1 f^2(x) dx$, 求 $f(x)$.

21. 证明: $\int_0^1 \frac{x \sin \frac{\pi}{2} x}{1+x} dx > \int_0^1 \frac{x \cos \frac{\pi}{2} x}{1+x} dx$.

22. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续, 且 $f(x) > 0$, 证明函数 $F(x) = \frac{\int_0^x t f(t) dt}{\int_0^x f(t) dt}$ 在 $(0, +\infty)$ 内单调

增加.

23. 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, $F(1) = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$, 若在定义域 $(0, +\infty)$ 上, 有 $f(x)F(x) = \frac{\arctan \sqrt{x}}{\sqrt{x}(1+x)}$, 求 $f(x)$.

巩固提高



1. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 下述命题

① 对任意 a , $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ 的充要条件是 $f(x)$ 为奇函数;

② 对任意 a , $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$ 的充要条件是 $f(x)$ 为偶函数;

③ 对任意 a , $\int_a^x f(t) dt$ 具有周期 T 的充要条件是 $f(x)$ 具有周期 T .

正确的个数是().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

2. 对于积分 $I = \int_1^2 \left[\frac{1}{x \ln^2 x} - \frac{k}{(x-1)^2} \right] dx$, 其中 k 为常数, 下列结论正确的是().

(A) 当 $k = 1$ 时积分收敛

(B) 当 $k \neq 1$ 时积分收敛

(C) 当 $k = 0$ 时积分收敛

(D) 当 $k \neq 0$ 时积分收敛

3. 下列反常积分中收敛的是().

(A) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x^3}}$

(B) $\int_0^2 \frac{dx}{x \sqrt{x+2}}$

(C) $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt{x+1} \ln(1+x)}$

(D) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{e^{x^4}}$

4. 下列反常积分中, 收敛的是().

(A) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x^3} dx$

(B) $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln x} dx$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}} dx$

(D) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x \ln x}} dx$

5. 设 $a > 0, f(x) = \begin{cases} \frac{\arctan x}{x^{\frac{a+1}{2}}}, & 0 < x < 1, \\ \ln\left(1 + \sin \frac{1}{x^a}\right), & 1 \leq x < +\infty. \end{cases}$ 若 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 则().

(A) $a > 3$ 且 $a + b > 3$

(B) $a > 3$ 且 $a + b < 3$

(C) $a < 3$ 且 $a + b > 3$

(D) $a < 3$ 且 $a + b < 3$

6. 若反常积分 $\int_0^1 x^a (1-x)^b \ln x dx$ 收敛, 则().

(A) $a < -1$ 且 $a + b > -3$

(B) $b < -2$ 且 $a + b > -3$

(C) $a > -1$ 且 $b < -2$

(D) $a > -1$ 且 $b > -2$

7. 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{(n+1)(n+2)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n + \frac{1}{n}} + \frac{1}{n + \frac{1+1}{n}} + \frac{1}{n + \frac{4+1}{n}} + \cdots + \frac{1}{n + \frac{(n-1)^2 + 1}{n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^{\frac{1}{n}}}{n+1} + \frac{3^{\frac{2}{n}}}{n + \frac{1}{2}} + \cdots + \frac{3^{\frac{n}{n}}}{n + \frac{1}{n}} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

10. $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \neq 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{n}{(n+n)^2} \right], & x = 0, \end{cases}$ 求 $f'(0)$.

11. 判别 $\int_1^{+\infty} \left[\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \right] dx$ 的敛散性.

12. 设 $f(x)$ 连续且积分 $\int_0^1 [f(x) + xf(xt)] dt$ 的结果与 x 无关, 求 $f(x)$.

第9章 一元函数积分学的计算

强化训练



1. 计算下列不定积分.

$$(1) \int \frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(2) \int \sin^3 x \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(3) \int \frac{2x-6}{x^2-6x+13} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(4) \int \frac{1}{\sin^2 x \cos^4 x} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(5) \int \frac{\sin x - 3\cos x}{\sin^3 x} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(6) \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(7) \int \frac{1}{(1-x)\sqrt{1-x}} dx = \underline{\hspace{2cm}};$$

$$(8) \int \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

2. 设 $f'(\ln x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leq 1, \\ x, & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设 $\int \frac{1}{x} f(x) dx = \sin x + C$, 则 $\int f(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$4. \int \frac{x \ln(x + \sqrt{1+x^2})}{(1+x^2)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$5. \int_0^3 \arcsin \sqrt{\frac{x}{1+x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$6. \int_1^2 \frac{2x^2 + x + 1}{(2x-1)(2x^2+x-1)} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$7. \text{反常积分} \int_0^1 \arctan \sqrt{\frac{x}{1-x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{1-e^{-x}}{\sqrt{x^3}} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

9. 已知 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数, $\int_0^1 f(x) dx = 1$, $f(1) = 0$, 则 $\int_0^1 x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 设 $\frac{\ln x}{x}$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int_1^e x f'(x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

$$11. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{3e^x \sin^2 x}{1+e^x} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

12. 设 $f(x)$ 连续, 则 $\frac{d}{dx} \left[\int_0^x t f(x^2 - t^2) dt \right] = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. $\int_0^2 |x - x^2| dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. $\int_0^1 \frac{x}{e^x + e^{1-x}} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 计算下列积分.

(1) $\int x^2 \sqrt{1-x^2} dx$;

(2) $\int \frac{dx}{(2x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$;

(3) $\int \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$;

(4) $\int \arccos x dx$;

(5) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x} dx$;

(6) $\int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$;

(7) $\int \frac{1}{x^3+4x^2+5x+2} dx$;

(8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos x dx$;

(9) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{(2-x)^2} dx$;

(10) $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{x^2+3}) dx$;

(11) $\int_0^{+\infty} \frac{x e^{-3x}}{(1+e^{-3x})^2} dx$;

(12) $\int_0^1 x \ln(1-x) dx$;

(13) $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\sin^2 x} dx$;

(14) $\int_0^1 \arctan \sqrt{x} dx$;

(15) $\int \frac{dx}{2+\cos x}$;

(16) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x dx$;

(17) $\int \frac{dx}{x + \sqrt{x+2}}$;

(18) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{2^{x-1}}{2^x+1} \cos^4 2x dx$;

(19) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$;

(20) $\int_0^2 [(x-1)^3 + 2x] \sqrt{1-\cos 2\pi x} dx$;

(21) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(1+x^5)} dx$;

(22) $\int \frac{4x}{(2x+1)^3} dx$;

(23) $\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx$;

(24) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$;

(25) $\int \frac{\cos \theta}{\sin \theta - 2 \cos \theta} d\theta$;

(26) $\int \frac{2x+1}{x^2} e^{-2x} dx$;

(27) $\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx$.

16. 求 $\int_{e^{\frac{1}{4}}}^{e^{\frac{1}{2}}} \frac{dx}{x \sqrt{\ln x (1 - \ln x)}}$.

17. 设 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+e^x}, & x < 0, \end{cases}$ 求 $\int_0^2 f(x-1) dx$.

18. 求 $I = \int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx$, 其中 $f(x) = \int_1^{\sqrt{x}} e^{-t^2} dt$.

19. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 且 $f(x) = x + \int_0^\pi f(x) \sin^5 x dx$, 求 $\int_0^\pi f(x) \cos^4 x dx$.

20. 设 $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 其中

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x^2 + 1), & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{3}(x - 1), & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

求 $g(x)$ 并判定其在 $[0, 2]$ 上的连续性与可导性.

21. 已知 $f(x)$ 为连续函数, $\int_0^x t f(x-t) dt = 1 - \cos x$, 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$ 的值.

22. 设

$$F(x) = \int_0^1 |x-t| e^t dt \quad (-\infty < x < +\infty).$$

(1) 求 $F(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的分段表达式;

(2) 求 $F(x)$ 在区间 $[-2, 3]$ 上的最小值与最大值.

23. 求 $I = \int_0^{\ln 2} \frac{x e^x}{e^x + 1} dx + \int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{x e^x}{e^x - 1} dx$.

巩固提高



1. 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$, $b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$, 则极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{na_n}{b_n} = (\quad)$.

(A) 1

(B) 0

(C) -1

(D) ∞

2. 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 当 $x > 0$ 时, 满足 $f(\ln x) = \frac{1}{x^2}$, 则 $\int_0^1 x f'(x) dx = (\quad)$.

(A) $\frac{3e^{-2} - 1}{2}$

(B) $\frac{3e^2 - 1}{2}$

(C) $\frac{e^{-2} + 1}{2}$

(D) $\frac{e^2 + 1}{2}$

3. 设可导函数 $y = f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上的值域是 $[0, +\infty)$, $f(0) = 0$, $f'(x) > 0$, $x = \varphi(y)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数. 记 $I = \int_0^a f(x) dx + \int_0^b \varphi(y) dy$, 常数 $a, b > 0$, 当 $a < \varphi(b)$ 时, 则 $(\quad)$.

(A) $I > ab$

(B) $I < ab$

(C) $I = ab$

(D) I 与 ab 的大小关系不确定

4. $\int_{-2}^2 \max\left\{x^2, \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right\} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 已知 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (0 \leq t \leq \pi)$, 则 $\int_0^{\pi a} y^3 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. 设 $f(x) = \min\{(x-k)^2, (x-k-2)^2\}$, k 为任意实数, $g(k) = \int_0^1 f(x) dx$. 求 $g(k)$ 在 $-2 \leq k \leq 2$ 上的最值.

7. 求 $\int_0^x f(t) g(x-t) dt (x \geq 0)$, 其中, 当 $x \geq 0$ 时, $f(x) = x$, 且

$$g(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & x \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8. 设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$ (n 为非负整数), 证明:

(1) $I_n + I_{n-2} = \frac{1}{n-1} (n \geq 2)$, 并由此求 I_n ;

(2) $\frac{1}{2(n+1)} < I_n < \frac{1}{2(n-1)} (n \geq 2)$.

9. 求 $I_n = \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx$.

10. 求 $\int_{e^{-2\pi x}}^1 \left[\cos\left(\ln \frac{1}{x}\right) \right]' \ln \frac{1}{x} dx$ (n 为正整数).

11. 设 n 为正整数, $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2nx}{\sin x} dx$.

(1) 证明 $I_n - I_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot \frac{2}{2n-1} (n \geq 2)$;

(2) 求 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 6x}{\sin x} dx$.

12. 求反常积分 $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx (a, b > 0)$.

13. 设 $\lambda \in \mathbf{R}$, 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\tan x)^\lambda} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 + (\cot x)^\lambda} dx = \frac{\pi}{4}$.

14. 设

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 + x(\arcsin x)^2}{\sqrt{4 - x^2}}, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{\arctan x}{x^2}, & x > 1, \end{cases}$$

求 $\int_{-1}^{+\infty} f(x) dx$.

第 10 章 一元函数积分学的应用 (一)

—— 几何应用

强化训练



1. 曲线 $y = \int_0^x e^{-\sqrt{t}} dt$ 与 y 轴及其 $x \rightarrow +\infty$ 方向的水平渐近线所围图形的面积为().

(A) 4

(B) 8

(C) 12

(D) 16

2. 设曲线 $y = 2\sqrt{x}$ 与其上一点 $(t, 2\sqrt{t})$ 处的切线以及直线 $x = 1, x = 3$ 围成的平面区域的面积记为 $A(t)$, 这里 $t > 0$, 则当 $A(t)$ 取得最小值时相应切线的方程为().

(A) $y = \sqrt{2}x + \frac{1}{\sqrt{2}}$

(B) $y = x + \frac{1}{2}$

(C) $y = \frac{x}{2} + 2$

(D) $y = \frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}$

3. 如图 1-10-1 所示, 设立体的底是介于 $y = x^2 - 1$ 和 $y = 0$ 之间的平面区域, 它垂直于 x 轴的任一截面是一个等边三角形, 则此立体的体积为().

(A) $\frac{\sqrt{3}}{15}$

(B) $\frac{2\sqrt{3}}{15}$

(C) $\frac{3\sqrt{3}}{15}$

(D) $\frac{4\sqrt{3}}{15}$

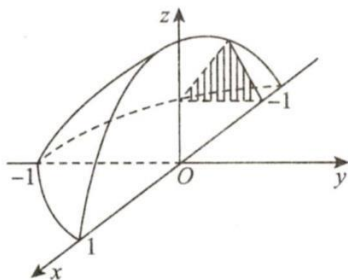


图 1-10-1

4. 由曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$ 与直线 $y = x$ 围成的平面图形绕直线 $x = 2$ 旋转一周得到的旋转体的体积为().

(A) $\frac{\pi^2}{2} + \frac{2\pi}{3}$

(B) $\frac{\pi^2}{2} + \frac{4\pi}{3}$

(C) $\frac{\pi^2}{2} - \frac{2\pi}{3}$

(D) $\frac{\pi^2}{2} - \frac{4\pi}{3}$

5. 设曲线弧方程为 $y = \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \sqrt{\cos t} dt$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), 则其弧长为_____.

6. 曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 介于 $0 \leq \theta \leq \pi$ 的弧长为_____.

7. $f(x) = \int_x^1 \cos t^2 dt$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为_____.

8. 设曲线 $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 与 x 轴, y 轴所围图形被曲线 $y = a \sin x$ ($a > 0$) 分成面积相等的两部分, 则常数 a 的值为_____.

9. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}, x \leq 1\}$, 则 D 绕 y 轴旋转一周所形成的旋转体的体积为

10. 设抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 通过 $(0, 0)$ 和 $(1, 2)$ 两点, 其中 $a < -2$. 求 a, b, c 的值, 使得该抛物线与曲线 $y = -x^2 + 2x$ 所围成区域的面积最小.

11. 设直线 $y = ax (0 < a < 1)$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成图形为 S_1 , 它们相交后的部分与直线 $x = 1$ 所围成图形为 S_2 . 确定 a 的值, 使平面图形 S_1 与 S_2 绕 x 轴旋转一周所得旋转体体积之和最小.

12. 求曲线 $y = x^2 - 2x (1 \leq x \leq 3)$, $y = 0, x = 1$ 与 $x = 3$ 所围封闭图形面积, 并求该平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积.

13. (1) 如图 1-10-2 所示, 设曲线 L 具有如下性质: 中间曲线 $y = 2x^2$ 上每一点 P 都使得图中 A 的面积等于 B 的面积. 求曲线 L 的方程;

(2) 如图 1-10-2 所示, A, B 绕 y 轴旋转一周所得的旋转体体积相等, 求曲线 L 的方程.

14. 如图 1-10-3 所示, 阴影部分由曲线 $y = \sin x (0 \leq x \leq \pi)$, 直线 $y = a (0 \leq a \leq 1)$, $x = \pi$ 以及 y 轴围成. 此图形绕直线 $y = a$ 旋转一周形成旋转体. 问 a 为何值时, 旋转体有最小体积、最大体积.

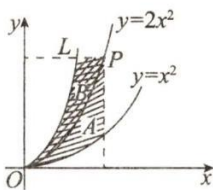


图 1-10-2

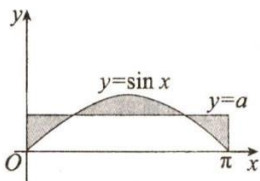


图 1-10-3

15. 设由曲线 $y = y(x) = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{x}{1 + x^2 - e^{ax}}$ 和直线 $y = \frac{1}{2}x$ 围成的平面图形为 D , 求:

(1) D 的面积 S ;

(2) D 绕 y 轴旋转一周成的旋转体的体积 V .

16. 设星形线的方程为 $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = a \sin^3 t \end{cases} (a > 0)$, 求:

(1) 它所围成的面积;

(2) 它的弧长;

(3) 它绕 x 轴旋转一周成的旋转体的体积和表面积.

巩固提高



1. 从点 $O(0, 0)$ 到点 $A(2\pi, 0)$, 有铁路、公路和盘山路三种路线(见图 1-10-4), 它们的方程分别为

$$L_1: y = \sin x;$$

$$L_2: y = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$L_3: y = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

记它们的路线长度分别为 l_1, l_2, l_3 , 则().

(A) $l_2 < l_1 < l_3$

(B) $l_3 < l_2 < l_1$

(C) $l_1 < l_3 < l_2$

(D) $l_1 = l_2 = l_3$

2. 已知摆线的参数方程为 $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ 其中 $0 \leq t \leq 2\pi$, 常

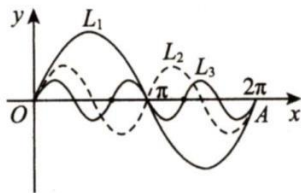


图 1-10-4

数 $a > 0$. 设该摆线一拱的弧长的数值等于该弧段绕 x 轴旋转一周所得旋转曲面面积的数值, 则 $a =$ ().

(A) $\frac{3}{64\pi}$

(B) $\frac{64}{3\pi}$

(C) $\frac{3}{8\pi}$

(D) $\frac{8}{3\pi}$

3. 心形线 $r = 2(1 + \cos \theta)$ 和 $\theta = 0, \theta = \frac{\pi}{2}$ 围成的图形绕极轴旋转一周所成旋转体的体积 $V =$ ().

(A) 20π

(B) 40π

(C) 80π

(D) 160π

4. 当 $x \geq 0$ 时, 曲线 $y = \frac{1}{4} \int_0^x \sqrt{12 - x^2 t^2} dt$ 的全长为 _____.

5. 曲线 $r = 1 + \cos \theta$ 与其在点 $(\frac{\pi}{4}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2})$ 处的切线及 x 轴所围图形面积为 _____.

6. 设 L 是位于 x 轴的区间 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 上的质线, 已知 L 上任一点 $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 处的线密度为 $\rho(x) = 1 + \sin x$, 则该质线的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

7. 双纽线 $r^2 = a^2 \cos 2\theta (a > 0)$ 绕极轴旋转一周所围成的旋转曲面面积 $S =$ _____.

8. 两个相互外切的圆同时内切于半径为 R 的圆 M . 连接三圆心的直线垂直于圆 M 外的直线 EF , 且圆心 M 到 EF 的距离为 $2R$. 求两个小圆的半径, 使得这 3 个圆所围成的平面图形绕 EF 旋转时所得旋转体体积最大.

9. 如图 1-10-5 所示, 在曲线 $\begin{cases} x = 4\cos^3 t, \\ y = 4\sin^3 t \end{cases} (t \in [0, \frac{\pi}{2}])$ 上两点 $A(4, 0)$

与 $B(0, 4)$ 之间求一点 M , 使曲线 BM 的长度是曲线 AM 长度的 3 倍.

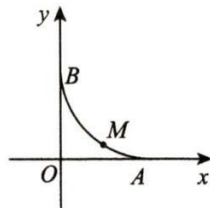


图 1-10-5

第 11 章 一元函数积分学的应用 (二)

—— 积分等式与积分不等式

强化训练



1. 设常数 $\alpha > 0$, 积分 $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+x^\alpha} dx, I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+x^\alpha} dx$, 则 ().

(A) $I_1 > I_2$

(B) $I_1 < I_2$

(C) $I_1 = I_2$

(D) I_1 与 I_2 的大小与 α 有关

2. 设 $f(x)$ 是 $[0, 1]$ 上连续且单调减少的正值函数, 则对于任意的 $a, b (0 < a < b < 1)$, 下列结论不正确的是 ().

(A) $a \int_0^b f(x) dx > b \int_0^a f(x) dx$

(B) $b \int_0^a f(x) dx > a \int_0^b f(x) dx$

(C) $a \int_0^b \sqrt{f(x)} dx < b \int_0^a \sqrt{f(x)} dx$

(D) $b \int_0^a \sqrt{f(x)} dx < a \int_0^b \sqrt{f(x)} dx$

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^2 (\arctan nx)^3 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: 至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^\xi f(x) dx + \int_{a+b-\xi}^b f(x) dx.$$

5. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明: 至少存在一点 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = f(a)(\xi - a) + f(b)(b - \xi).$$

6. 设函数 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上可导, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 1$. 证明:

(1) 存在 $\xi \in (0, 1)$, 使得 $f(\xi) = 1$;

(2) 存在 $\eta \in (0, 1)$, 且 $\eta \neq \xi$, 使得 $\eta f'(\eta) + f(\eta) = 1$.

7. 证明: $\frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e^2$.

8. 已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续且单调增加, 证明:

$$\int_a^b \left(\frac{b-x}{b-a} \right)^n f(x) dx \leq \frac{1}{n+1} \int_a^b f(x) dx (n \in \mathbb{N}).$$

9. 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(x) > 0$, 证明: $\ln \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right] \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b \ln f(x) dx$.

10. 设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上有二阶导数, 且 $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, f''(x) > 0$, 证明 $\int_0^1 f(x) dx \geq 1$.

巩固提高



1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 (n+1)x^n \ln(1+x) dx = (\quad).$

(A) $\ln 2$

(B) 1

(C) e^2

(D) $+\infty$

2. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上具有二阶连续导数, 证明: 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi).$$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上具有连续的导数, 证明:

$$\int_0^1 |f(x)| dx \leq \max \left\{ \int_0^1 |f'(x)| dx, \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \right\}.$$

4. (1) 证明不等式

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n;$$

(2) 证明数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)$ 单调增加, 且 $0 < a_n < 1$;

(3) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}}{\ln n}$.

第 12 章 一元函数积分学的应用 (三)

—— 物理应用

强化训练



1. 已知曲线 $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t \end{cases}$ 上每一点处的线密度等于该点到坐标原点距离的立方, G 为引力常数,

则该曲线在第一象限的部分对坐标原点处单位质点的引力在 x 轴上的分量大小为().

- (A) $\frac{1}{5}G$ (B) $\frac{2}{5}G$ (C) $\frac{3}{5}G$ (D) $\frac{4}{5}G$

2. 有一椭圆形薄板, 长、短半轴分别为 a 与 b . 薄板垂直立于液体中, 其长轴与液面相齐. 设液体的比重为 γ , 则液体对薄板的侧压力为().

- (A) $\frac{2}{3}\gamma a^2 b$ (B) $\frac{2}{3}\gamma ab^2$ (C) $\frac{4}{3}\gamma a^2 b$ (D) $\frac{4}{3}\gamma ab^2$

3. 设沿 y 轴上的区间 $[0, 1]$ 放置一长度为 1 且线密度为 ρ 的均匀细杆, 在 x 轴上 $x = 1$ 处有一单位质点, 则该细杆对此质点的引力 (G 为引力常量) 沿 x 轴正向的分力为_____.

4. 半径为 a 的球沉入水中, 球顶部与水平面相齐平, 若球的密度与水的密度相同记为 ρ , 重力加速度记为 g , 现将球从水中提出, 则至少需做功为_____.

5. 设有一锥形贮水池 (锥顶朝下), 深 15 m, 口径 20 m, 盛满水, 用水泵将水抽尽, 问需做多少功?

6. 一底为 8 cm, 高为 6 cm 的等腰三角形片, 铅直地沉没在水中, 顶在上, 底在下且与水面平行, 而顶离水面 3 cm, 求它的一侧所受的压力.

7. 一容器内表面是由曲线 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 2$, 单位: m) 绕 y 轴旋转一周所得到的曲面. 现以 $2 \text{ m}^3/\text{min}$ 的速率注入某液体, 求:

- (1) 容器的体积;
(2) 当液面升高到 1 m 时液面上升的速率.

巩固提高



1. (1) 设圆盘的半径为 R , 厚度为 h . 点密度为该点到与圆盘垂直的圆盘中心轴的距离平方, 求该圆盘的质量 m ;

(2) 将以曲线 $y = \sqrt{x}$, $x = 1$, $x = 4$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所围成的旋转体记为 V , 设 V 的点密度为该点到旋转轴的距离的平方, 求该物体的质量 M .

第 13 章 多元函数微分学

强化训练



1. 设 $F(x, y) = \left(\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{x-y}}$, 其中 $x \neq y$, 且 $xy > 0$. 又设

$$f(x) = \begin{cases} \lim_{y \rightarrow x} F(x, y), & x \neq 0, \\ e, & x = 0, \end{cases}$$

则点 $x = 0$ 为 $f(x)$ 的().

(A) 连续点

(B) 可去间断点

(C) 跳跃间断点

(D) 无穷间断点

2. 设 $f(x, y) = \frac{x}{y^2} e^{-\left(\frac{x}{y}\right)^2}$, $y \neq 0$, 记 $I_1 = \lim_{y \rightarrow 0} \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right]$, $I_2 = \int_0^1 \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right] dx$, 则().

(A) $I_1 > I_2$

(B) $I_1 < I_2$

(C) $I_1 = I_2$

(D) I_1 与 I_2 的大小关系不确定

3. 设 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ 记 $I_1 = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right]$, $I_2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$,

则().

(A) I_1 存在, I_2 不存在

(B) I_1 不存在, I_2 存在

(C) I_1 存在, I_2 存在

(D) I_1 不存在, I_2 不存在

4. 下列二元函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的是().

(A) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(B) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(C) $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

(D) $f(x, y) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

5. 设 $f(x, y) = e^{x+y} [x^{\frac{1}{3}}(y-1)^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{3}}(x-1)^{\frac{2}{3}}]$, 则在点 $(0, 1)$ 处的两个偏导数 $f'_x(0, 1)$ 和 $f'_y(0, 1)$ 的情况为().

- (A) 两个偏导数均不存在 (B) $f'_x(0, 1)$ 不存在, $f'_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$
 (C) $f'_x(0, 1) = \frac{e}{3}, f'_y(0, 1) = \frac{4}{3}e$ (D) $f'_x(0, 1) = \frac{e}{3}, f'_y(0, 1)$ 不存在

6. 设函数 $f(x, y)$ 连续, $f(0, 0) = 0$, 又设 $F(x, y) = |x - y|f(x, y)$, 则 $F(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处().

- (A) 连续, 但不可微 (B) 连续, 但偏导数不存在
 (C) 偏导数存在, 但不可微 (D) 可微

7. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的某一邻域内有定义, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{\cos(x^2 + y^2) - 1} = 1$, 则下列结论不正确的是().

- (A) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续 (B) $f'_x(0, 0)$ 与 $f'_y(0, 0)$ 都存在但不为零
 (C) $f'_x(0, 0) = f'_y(0, 0) = 0$ (D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微

8. 设 $f(x, y) = |x - y|\varphi(x, y)$, 其中函数 $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某一邻域内有定义, 则函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是().

- (A) $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \varphi(x, y) = 0$ (B) $\varphi'_x(0, 0)$ 与 $\varphi'_y(0, 0)$ 都存在
 (C) $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续 (D) $\varphi(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微

9. 设 $y = f(x, t)$, 而 t 是由方程 $F(x, y, t) = 0$ 所确定的 x, y 的函数, 其中 f, F 均具有一阶连续偏导数, 则 $\frac{dy}{dx} = ()$.

- (A) $\frac{f'_x F'_t + f'_t F'_x}{F'_t}$ (B) $\frac{f'_x F'_t - f'_t F'_x}{F'_t}$ (C) $\frac{f'_x F'_t + f'_t F'_x}{f'_t F'_y + F'_t}$ (D) $\frac{f'_x F'_t - f'_t F'_x}{f'_t F'_y + F'_t}$

10. 设 $y = f(x)$ 是由方程 $F\left(\ln \frac{x}{y}, \frac{x^2 - y^2}{xy}\right) = 0$ 确定的函数, 其中函数 $F(u, v)$ 具有连续偏导数, 且 $F'_u \cdot F'_v > 0$, 则 $\frac{dy}{dx} = ()$.

- (A) $\frac{y}{x}$ (B) $\frac{x}{y}$ (C) $-\frac{y}{x}$ (D) $-\frac{x}{y}$

11. 设 $u = xe^{-y}z^2$, 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+y-z} + xyz = 1$ 确定, 记 $a = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, 0, 1)}$; 若该方程也可确定函数 $y = y(x, z)$, 记 $b = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1, 0, 1)}$, 则().

- (A) $a = 3, b = 3$ (B) $a = 3, b = \frac{3}{2}$ (C) $a = \frac{3}{2}, b = 3$ (D) $a = \frac{3}{2}, b = \frac{3}{2}$

12. 若函数 $u = xyf\left(\frac{x+y}{xy}\right)$, 其中 f 是可微函数, $f \neq 0$, 且 $x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$, 则函数 $G(x, y) = ()$.

- (A) $x + y$ (B) $x - y$ (C) $x^2 - y^2$ (D) $(x + y)^2$

13. 函数 $z = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2$ 的极小值点是().

- (A) $(0, 0)$ (B) $(2, 2)$ (C) $(0, 2)$ (D) $(2, 0)$

14. 函数 $z = \frac{x^2}{2} + xy + \frac{y^2}{2} - 2x - 2y + 5$ ().

- (A) 有无穷多个极小值点, 没有极大值点
 (B) 有无穷多个极大值点, 没有极小值点
 (C) 有无穷多个极大值点, 也有无穷多个极小值点
 (D) 既没有极大值点, 也没有极小值点

15. 设 $f(x, y)$ 是连续函数, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - f(0, 0)}{x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2} = 1$, 则 ().

- (A) $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值 (B) $f(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值
 (C) $f(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值 (D) 不能确定

16. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处的某个邻域内连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{(x^2 + y^2)^2} = -2$, 则 ().

- (A) 点 $(0, 0)$ 不是 $f(x, y)$ 的极值点
 (B) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极大值点
 (C) 点 $(0, 0)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值点
 (D) 根据所给条件无法判定点 $(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值点

17. 设函数 $u = u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有连续偏导数, 且满足 $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 +$

$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = 1 + u^2$, 则 ().

- (A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得
 (B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得
 (C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, 最小值在 D 的边界上取得
 (D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, 最大值在 D 的边界上取得

18. 设 $f(x, y)$ 与 $G(x, y)$ 均为可微函数, 且 $G'_y(x, y) \neq 0$. 已知点 (x_0, y_0) 是 $f(x, y)$ 在约束条件 $G(x, y) = 0$ 下的一个极值点, 下列选项正确的是 ().

- (A) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$
 (B) 若 $f'_x(x_0, y_0) = 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$
 (C) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) = 0$
 (D) 若 $f'_x(x_0, y_0) \neq 0$, 则 $f'_y(x_0, y_0) \neq 0$

19. 设函数 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, 且满足 $z(x, 3x) = x^2$, $z'_1(x, 3x) = x^3$,

则 $z''_{12}(x, 3x) =$ ().

- (A) $\frac{5}{4}x^2 - \frac{1}{12}$ (B) $\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{12}$ (C) $\frac{4}{5}x^2 - \frac{1}{12}$ (D) $\frac{4}{5}x^2 + \frac{1}{12}$

20. 设 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(x^2 y)}{2xy}, & xy \neq 0, \\ x, & xy = 0, \end{cases}$ 则 $f'_x(0, 1) =$ _____.

21. 设 $f(x, y, z) = \sqrt{\frac{x^4 + y^4 + z^4}{x^2 + y^2 + z^2}}$, 则 $xf'_x(x, y, z) + yf'_y(x, y, z) + zf'_z(x, y, z) =$ _____.

22. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $z + e^z = xy$ 确定的二元函数, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \Big|_{z=0} =$ _____.

23. 设 $z = x \ln[(1+y^2)e^{x^2 \sin y}]$, 则 $\frac{\partial^4 z}{\partial y^2 \partial x^2} =$ _____.

24. 设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $x^2 y - z = \varphi(x + y + z)$ 确定的函数, 其中 φ 可导, 且 $\varphi' \neq -1$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ _____.

25. 设 $z = x^y, x = \sin t, y = \tan t$, 则全导数 $\frac{dz}{dt} =$ _____.

26. 已知函数 $f(x, t) = \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{at}}} e^{-u^2} du, t > 0$, 若 $a \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + b \frac{\partial f}{\partial t} \equiv 0, a, b$ 为常数且 $a > 0$, 则 $b =$ _____.

27. 已知 $f(u)$ 可导且 $f(u) \neq 0$, 则对于 $z = \frac{y}{f(x^2 - y^2)}, xy \neq 0$, $\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} =$ _____.

28. 设 $g(x, y) = f(2xy, x^2 - y^2)$, 其中 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = 1$, 则 $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} =$ _____.

29. 设函数 $z = xy \ln x$, 则 $d(dz) =$ _____.

30. 设 $z = z(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 又设 $u = x^2 - y, v = f(xy)$, 其中 f 二阶可导, 满足 $f' + xyf'' = 0$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ _____.

31. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数, $F(x, y) = f\left(\frac{1}{r}\right), r = \sqrt{x^2 + y^2}$, 则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} =$ _____.

32. 函数 $f(x, y) = e^{-x}(ax + b - y^2)$, 若 $f(-1, 0)$ 为其极大值, 则 a, b 满足 _____.

33. 曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 的切平面与三个坐标平面围成的有限区域的体积的最小值为 _____.

34. 设函数 $f(x, y)$ 可微, $f'_y(x, y) = xf(x, y), f(1, 0) = 1$, 且当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x+h, 0)}{f(x, 0)} \right]^{\frac{1}{h}} = e^{\frac{1}{x}}$, 则 $f(x, y) =$ _____.

35. 设 $z = y^2 \ln(1 - x^2)$, 求 $\frac{\partial^n z}{\partial x^n} (n \geq 1)$.

36. 设 $z = e^{-x} - f(x - 2y)$, 且当 $y = 0$ 时, $z = x^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$.

37. 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^0 \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 求 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

38. 设函数 $f(x, y, z) = e^x y z^2$, 其中 $z = z(x, y)$ 是由 $x + y + z + xyz = 0$ 确定的隐函数, 求 $f'_x(0, 1, -1)$.

39. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数, 且函数 $y = y(x)$ 及 $z = z(x)$ 分别由 $e^{xy} - xy = 2$ 和 $z = \int_0^x \sin t^2 dt$ 确定. 求 $\frac{du}{dx}$.

40. 设 $z = \sin(xy) + \varphi\left(x, \frac{x}{y}\right)$, 其中 φ 具有二阶连续偏导数, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

41. 设 $u = yf\left(\frac{x}{y}\right) + xg\left(\frac{y}{x}\right)$, 其中函数 f, g 具有二阶连续导数, 求 $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

42. 设 $x = x(y, z), y = y(z, x), z = z(x, y)$ 均为由方程 $f(x, y, z) = 0$ 确定的具有连续偏导数的函数, 证明 $x'_y \cdot y'_z \cdot z'_x = -1$.

43. 设函数 $f(x, y)$ 可微, 又 $f(0, 0) = 0, f'_x(0, 0) = a, f'_y(0, 0) = b$, 且 $\varphi(t) = f[t, f(t, t^2)]$, 求 $\varphi'(0)$.

44. 设 $u = f(x, y, z), \varphi(x^2, e^y, z) = 0, y = \sin x$, 其中 f, φ 具有一阶连续偏导数, 且 $\frac{\partial \varphi}{\partial z} \neq 0$, 求 $\frac{du}{dx}$.

45. 已知 $\begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 20, \end{cases}$ 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}$.

46. 设函数 $f(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 在点 $(1, 0)$ 的某邻域内, $f(x, y) = 1 - 2x + 3y + o(\sqrt{(x-1)^2 + y^2})$, 问: 函数 $g(x, y) = f(\cos x, x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0)$ 处是否取得极值? 若取得极值, 则判断取极大值还是极小值; 若不取得极值, 则说明理由.

47. 设 $f(x, y)$ 在点 $O(0, 0)$ 处的某邻域 U 内连续, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y) - xy}{x^2 + y^2} = a$, 常数 $a > \frac{1}{2}$. 讨论 $f(0, 0)$ 是否为 $f(x, y)$ 的极值, 若是极值, 判断是极大值还是极小值.

48. 已知矩形的周长为 $2p$, 将它绕其中一边旋转一周构成一个旋转体(圆柱体), 问该圆柱体的半径与高各为多少时, 该圆柱体体积最大?

49. (1) 设 $x > 0, y > 0, z > 0$, 求函数 $f(x, y, z) = xyz^3$ 在约束条件 $x^2 + y^2 + z^2 = 5R^2 (R > 0$ 为常数) 下的最大值;

(2) 由(1)的结论证明: 当 $a > 0, b > 0, c > 0$ 时,

$$abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5} \right)^5.$$

50. 求 $f(x, y) = x + xy - x^2 - y^2$ 在闭区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$ 上的最大值和最小值.

51. 求 $f(x, y) = 2x^2 + 3y^2$ 在有界闭区域 $D = \{(x, y) \mid (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$ 上的最大值与最小值.

52. 求内接于椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0)$ 的长方体的最大体积.

53. 在第一象限的椭圆 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上求一点, 使过该点的法线与原点的距离最大.

54. 求正数 a, b 的值, 使得椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 包含圆 $x^2 + y^2 = 2y$, 且面积最小.

55. 求椭球体 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{4} \leq 1$ 被平面 $x + y + z = 0$ 所截得的椭圆的面积.

56. 已知函数 $u = u(x, y)$ 满足方程 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$. 确定参数 a, b , 利用变换 $u(x, y) = v(x, y)e^{ax+by}$ 将原方程变形, 使新方程中不含有一阶偏导数项.

57. 设 A, B, C 为常数, $AC - B^2 < 0, A \neq 0, u(x, y)$ 具有二阶连续偏导数. 证明: 必存在非奇异线性变换

$$\xi = \lambda_1 x + y, \eta = \lambda_2 x + y (\lambda_1, \lambda_2 \text{ 为常数}),$$

将方程 $A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ 化成 $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

58. 设 $z = z(u, v)$ 具有二阶连续偏导数, 且 $z = z(x+y, x-y)$ 满足微分方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1.$$

(1) 求 $z = z(u, v)$ 所满足关于 u, v 的微分方程;

(2) 由(1) 求出 $z = z(x+y, x-y)$ 的一般表达式.

巩固提高



1. 设 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 若 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - 2x - 3y}{(x^2 + y^2)^\alpha} = 1$, 其中 $\alpha > 0$, 则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处可微的充分必要条件是().

(A) $\alpha < \frac{1}{2}$

(B) $\alpha = \frac{1}{2}$

(C) $\alpha > \frac{1}{2}$

(D) $\alpha > 1$

2. 设函数 $u = u(x, y)$ 的定义域为 $\{(x, y) \mid x + y \neq 0\}$, 其全微分为 $du = \frac{y}{(x+y)^2} dx - \frac{x+ky}{(x+y)^2} dy$, 则 k 等于().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. 设方程 $x + y^2 + \sin(xy) = 0$, 根据隐函数存在定理, 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内, 该方程().

(A) 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $y = y(x)$

(B) 只可以确定一个具有连续导数的隐函数 $x = x(y)$

(C) 可以确定两个具有连续导数的隐函数 $x = x(y)$ 和 $y = y(x)$

(D) 不可以确定任何一个具有连续导数的隐函数

4. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 3\}$ 上可微, $f(0, 0) = 0$, 且对任意 $(x, y) \in D$, 有 $\frac{\partial f}{\partial x} < -\frac{1}{2}, \frac{\partial f}{\partial y} > \frac{1}{2}$, 则下列结论正确的是().

(A) $f(1, 1) < 0$

(B) $f(-1, -1) < -1$

(C) $f(1, -1) > 0$

(D) $f(-1, 1) > 1$

5. 设 $f(x, y)$ 有二阶连续偏导数, $f(x, 0) = 2x + 1, f'_y(1, y) = y + 1 - e^{-y}, f''_{xy}(x, y) = 2x + y$, 则 $f(x, y) = ()$.

(A) $x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 - e^{-y} - 2x$

(B) $xy^2 - \frac{1}{2} x^2 y - e^{-y} - 2x$

(C) $x^2 y + \frac{1}{2} xy^2 + e^{-y} + 2x$

(D) $xy^2 + \frac{1}{2} xy^2 + e^{-y} + 2x$

6. 设二元函数

$$z = f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

则下述命题

① $f'_x(0,0) = 0, f'_y(0,0) = 0$;

② 若 $z = f[\sin t, \ln(1+t)]$, 则 $\left. \frac{dz}{dt} \right|_{t=0} = 0$.

正确与否的结论是().

(A) ① 正确, ② 不正确

(B) ① 不正确, ② 正确

(C) ① 与 ② 都正确

(D) ① 与 ② 都不正确

7. 函数 $f(x,y) = 3 + 9x - 6y + 4x^2 - 5y^2 + 2xy + x^3 + 2xy^2 - y^3$ 在点 $(1, -1)$ 处展开至 $n = 2$ 阶的泰勒公式为 $f(x,y) = \underline{\hspace{2cm}} + R_2$, 其中 R_2 为拉格朗日余项.

8. 设 $z_1(x,y) = \frac{y}{x-y}, z_2(x,y) = \frac{y}{x+y}$, 则 $\left. \frac{\partial^n z_1}{\partial x^n} \right|_{(0,1)} + \left. \frac{\partial^n z_2}{\partial x^n} \right|_{(0,1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设函数 $f(x,y)$ 及它的二阶偏导数在全平面连续, 且 $f(0,0) = 0, \left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq 2|x-y|, \left| \frac{\partial f}{\partial y} \right| \leq 2|x-y|$. 求证: $|f(5,4)| \leq 1$.

10. 设函数 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上连续, $f(1) = 1$, 且满足

$$\int_1^{xy} f(t) dt = x \int_1^y f(t) dt + y \int_1^x f(t) dt \quad (x \geq 1, y \geq 1).$$

求:

(1) $f(x)$ 的表达式;

(2) 由方程 $F[xe^{x+y}, f(xy)] = x^2 + y^2$ 确定的隐函数 $y = y(x)$ 的导数 $\frac{dy}{dx}$ ($F(u,v)$ 是可微的二元函数).

11. 设 $u(x,y)$ 具有二阶连续偏导数, 证明无零值的函数 $u(x,y)$ 可分离变量 (即 $u(x,y) = f(x)g(y)$) 的充分必要条件是 $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$.

12. 在曲线 $\Gamma: \begin{cases} z = x^2 + y^2, \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$ 上求一点, 使函数 $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$ 在该点处沿其梯度方向的方向导数最大.

13. 设有抛物线 $\begin{cases} z = 2 - x^2, \\ y = 0 \end{cases}$, 绕 z 轴旋转一周得到旋转抛物面, 其位于第一卦限部分上的动点 P 处的切平面与三坐标面围成四面体.

(1) 求该四面体体积的表达式 V , 并求其最小值;

(2) 设 $W = \ln V$, 且 $x = x(y,z)$ 由方程 $z + x^2 + y^2 = 2$ 确定, 求 $\left. \frac{\partial W}{\partial z} \right|_{(1,1,0)}$.

14. 在第一卦限内作椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 的切平面, 使该切平面在三坐标轴上的截距之和最小. 求满足要求的切点坐标, 并求截距之和的最小值.

15. 设 $u = u(x,y)$ 可微, 又设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$.

(1) 当 $r \neq 0$ 时, 用 u 对 r, θ 的一阶偏导数表示 $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x}$;

(2) 设 $x \frac{\partial u}{\partial y} - y \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}} (x^2+y^2 \neq 0)$, 求 $u(x,y)$ 的表达式.

第14章 二重积分

强化训练



1. 设区域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq \pi^{\frac{2}{3}} \right\}$, 区域 $D_k (k = 1, 2, 3, 4)$ 是 D 的第 k 象限部分,

$$I_k = \iint_{D_k} \sin(y-x) dx dy,$$

则积分值大于零的是().

- (A) I_1 (B) I_2 (C) I_3 (D) I_4

2. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, $\int_{-\frac{1}{4}}^0 dx \int_{-\frac{1}{2}-\sqrt{x+\frac{1}{4}}}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_{x-1}^{-\frac{1}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}} f(x, y) dy$ 交换积分次序后为().

- (A) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y^2+y}^{y+1} f(x, y) dx$ (B) $\int_{-\frac{1}{2}}^1 dy \int_{y+1}^{y^2+y} f(x, y) dx$
(C) $\int_{-1}^1 dy \int_{y^2+y}^{y+1} f(x, y) dx$ (D) $\int_{-1}^1 dy \int_{y+1}^{y^2+y} f(x, y) dx$

3. 设 $I = \iint_D (x+y) dx dy, J = \iint_D \max\{x+y, 1\} dx dy, K = \iint_D \min\{x+y, 1\} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则 I, J, K 的大小关系为().

- (A) $I < J < K$ (B) $K < I < J$ (C) $K < J < I$ (D) $J < I < K$

4. 设函数 $f(x)$ 连续, $D_t = \{(x, y) \mid t^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4t^2\} (t > 0)$,

$$F(t) = \iint_{D_t} \frac{(2x^2+1)f(x^2+y^2)}{x^2+y^2+1} dx dy,$$

则 $F'(t) =$ ().

- (A) $2\pi[2f(4t^2) - f(t^2)]$ (B) $2\pi[f(4t^2) - f(t^2)]$
(C) $2\pi[4tf(4t^2) - tf(t^2)]$ (D) $2\pi[2tf(4t^2) - tf(t^2)]$

5. 设双纽线 $(x^2 + y^2)^2 = 2^2(x^2 - y^2)$ 围成的平面区域记为 D , 则二重积分 $\iint_D (x^2 + y^2) d\sigma =$ ().

- (A) π (B) 2π (C) 3π (D) 4π

6. 设 $D = \{(x, y) \mid 1 < x \leq e, 1 < y \leq e\}$, 记

$$I_1 = \iint_D [x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2}] \sin(\ln y) d\sigma,$$

$$I_2 = \iint_D [y \ln(y + \sqrt{1+y^2}) - \sqrt{1+y^2}] \sin(\ln y) d\sigma,$$

则().

(A) $I_1 > I_2$

(B) $I_1 < I_2$

(C) $I_1 = I_2$

(D) 无法判断 I_1 与 I_2 的大小关系

7. 设 $I_k = \iint_{D_k} (4x^2 + y^2 - 4) dx dy$ ($k = 1, 2, 3$), 其中 $D_1 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_2 =$

$\{(x, y) | 4x^2 + y^2 \leq 4\}$, $D_3 = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$

(B) $I_3 < I_2 < I_1$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$

(D) $I_2 < I_1 < I_3$

8. 设 D_1 是中心在点 $(0, 1)$ 处, 边长为 2 且平行于坐标轴的正方形区域, D_2, D_3 分别为 D_1 的内切圆区域与外接圆区域, 并设

$$f(x, y) = (2y - x^2 - y^2)e^{-x^2 - y^2},$$

对于

$$I_1 = \iint_{D_1} f(x, y) d\sigma, I_2 = \iint_{D_2} f(x, y) d\sigma, I_3 = \iint_{D_3} f(x, y) d\sigma,$$

其大小顺序是().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$

(B) $I_2 < I_1 < I_3$

(C) $I_3 < I_2 < I_1$

(D) $I_3 < I_1 < I_2$

9. 设平面区域 $D = \{(x, y) | (x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 1\}$, 比较 $I_1 = \iint_D (x+y)^2 d\sigma$ 与 $I_2 =$

$\iint_D (x+y)^3 d\sigma$ 的大小, 则有().

(A) $I_1 = I_2$

(B) $I_1 > I_2$

(C) $I_1 < I_2$

(D) 不能比较

10. $\int_0^1 dy \int_0^1 \sqrt{e^{2x} - y^2} dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 \sqrt{e^{2x} - y^2} dx = ().$

(A) $\frac{\pi}{8}(e^2 - 1)$

(B) $\frac{\pi}{8}(e^2 + 1)$

(C) $\frac{\pi}{4}(e^2 - 1)$

(D) $\frac{\pi}{4}(e^2 + 1)$

11. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $I = \int_0^2 dx \int_0^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{8-x^2}} f(x, y) dy = ().$

(A) $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(B) $\int_0^2 dy \int_1^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(C) $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{2y}}^{\sqrt{8-y^2}} f(x, y) dx$

(D) $\int_0^2 dy \int_{\sqrt{2y}}^1 f(x, y) dx$

12. $\int_0^1 y^2 dy \int_1^y \frac{1}{\sqrt{1+x^4}} dx = ().$

(A) $\frac{1}{6}(1 - \sqrt{2})$

(B) $\frac{1}{6}(\sqrt{2} - 1)$

(C) $\frac{1}{3}(1 - \sqrt{2})$

(D) $\frac{1}{3}(\sqrt{2} - 1)$

13. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 则 $\int_{\frac{\sqrt{2}}{4}}^{\frac{1}{2}} dx \int_{\frac{1}{4x}}^{2x} f(x, y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} dx \int_x^{\frac{1}{2x}} f(x, y) dy = ().$

$$(A) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$$

$$(B) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$$

$$(C) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) dr$$

$$(D) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\arctan 2} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos \theta, r\sin \theta) r dr$$

14. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D (e^{ix} - e^{-iy}) d\sigma (\lambda \neq 0)$ 的值().

(A) 恒为零

(B) 恒为负

(C) 恒为正

(D) 当 $\lambda > 0$ 时为正, 当 $\lambda < 0$ 时为负

15. 设 $f(t)$ 为连续函数, 则累次积分 $\int_0^{2R} dy \int_0^{\sqrt{2Ry-y^2}} f(x^2 + y^2) dx (R > 0)$ 化为极坐标形式的累次积分为().

$$(A) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2R\sin \theta} f(r^2) r dr$$

$$(B) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\cos \theta} f(r^2) r dr$$

$$(C) \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2R\sin \theta} f(r^2) r dr$$

$$(D) \int_0^\pi d\theta \int_0^{2R\cos \theta} f(r^2) r dr$$

16. 设函数 $f(x) = x \int_x^\pi \left(\frac{\sin u}{u}\right)^2 du$, 则 $\int_0^\pi f(x) dx = ()$.

$$(A) \frac{\pi}{6}$$

$$(B) \frac{\pi}{4}$$

$$(C) \frac{\pi}{3}$$

$$(D) \frac{\pi}{2}$$

17. 由 $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi), y = 0$ 所围平面图形 D 的形心纵坐标等于().

$$(A) \frac{1}{6}$$

$$(B) \frac{2}{3}$$

$$(C) \frac{5}{6}$$

$$(D) \frac{11}{2}$$

$$18. \int_0^1 dy \int_y^1 \left(\frac{e^x}{x} - e^{y^2}\right) dx = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$19. \text{ 设 } D = \{(x, y) \mid 2(x-1)^2 + 3(y-2)^2 \leq 6\}, \text{ 则 } \iint_D (x+y) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$20. \int_1^2 dx \int_0^1 x^y \ln x dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$21. \text{ 设平面区域 } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}, \text{ 则 } \iint_D (x-2y)^2 dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$22. \int_{-1}^1 dx \int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}} \frac{x+y}{1+x^2+y^2} dy = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$23. \text{ 设平面区域 } D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2, t > 0\}, \text{ 则极限 } \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^2} \iint_D e^{x^2-y^2} \cos(x+y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$$

24. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, $f(0, 0)$ 已知, 平面区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq t^2\}$, 则

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\pi t^2} \iint_D f(x, y) d\sigma = \underline{\hspace{2cm}}.$$

25. 设 $D_t = \{(x, y) \mid 2x^2 + 3y^2 \leq 6t\} (t \geq 0)$, $f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-xy}-1}{e^{xy}-1}, & xy \neq 0, \\ a, & xy = 0 \end{cases}$ 为连续函数, 令 $F(t) = \iint_{D_t} f(x, y) dx dy$, 则 $F'_+(0) =$ _____.

26. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则二次积分 $\int_1^e dy \int_{\ln y}^1 \frac{f(x)}{y} dx$ 的定积分形式为 _____.

27. 将直角坐标系中的累次积分 $I = \int_0^{\frac{\pi}{5}} dx \int_{2a-\sqrt{4a^2-x^2}}^{\sqrt{2ax-x^2}} f(x, y) dy (a > 0)$ 化为极坐标先 r 后 θ 次序的累次积分 $I =$ _____.

28. 设区域 $D = \{(x, y) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$, 则二重积分 $\iint_D |x-y| dx dy =$ _____.

29. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 则 $\int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{2x-x^2}}^{2-x} f(x, y) dy$ 交换积分次序后等于 _____.

30. 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq 2y\}$, 则平面图形 D 的形心坐标为 _____.

31. 计算 $\iint_D xy dx dy$, 其中 D 是由直线 $y = x-4$ 与曲线 $y^2 = 2x$ 所围成的区域.

32. 计算下列各题.

(1) $I = \iint_D \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dx dy$, 其中 D 是由圆弧 $y = \sqrt{1-x^2} (x > 0)$ 与直线 $y = x, y = 0$ 所围成的区域;

(2) $I = \int_{-\sqrt{2}}^0 dx \int_{-x}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy + \int_0^2 dx \int_{\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x^2 + y^2) dy$;

(3) $\iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$;

(4) $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$;

(5) $I = \iint_D \frac{1+y+y \ln(x+\sqrt{1+x^2})}{1+x^2+y^2} d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$;

(6) 设 $f(x)$ 为连续的奇函数, 平面区域 D 由 $y = -x^3, x = 1$ 与 $y = 1$ 围成, 计算

$$I = \iint_D [x^2 + f(xy)] d\sigma;$$

(7) 若 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面区域, 计算 $I = \iint_D y dx dy$;

(8) 若 D 是由圆 $x^2 + y^2 = 4$ 与 $(x+1)^2 + y^2 = 1$ 所围成的平面区域 (见图 1-14-1 阴影部分), 计算 $I = \iint_D (\sqrt{x^2 + y^2} + y) d\sigma$;

(9) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1 \text{ 且 } x+y \geq 0\}$, f 为连续函数, 计算

$$I = \iint_D xy [x + f(x^2 - y^2)] dx dy.$$

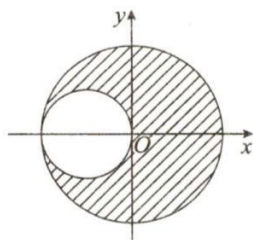


图 1-14-1

33. 设 $I(a) = \iint_D (x+y) dx dy$, 其中 D 由直线 $x=a, x=0, y=a, y=-a$ 及曲线 $x^2+y^2=ax$ ($a>0$) 所围成, 计算 $I(a)$.

34. 记平面区域 $D = \{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$, 计算如下二重积分:

$$(1) I_1 = \iint_D \frac{af(x) + bf(y)}{f(x) + f(y)} d\sigma, \text{ 其中 } f(t) \text{ 为定义在 } (-\infty, +\infty) \text{ 内的连续正值函数, 常数 } a>0, b>0;$$

$$(2) I_2 = \iint_D (e^{\lambda x} - e^{-\lambda y}) d\sigma, \text{ 常数 } \lambda > 0.$$

35. 设 $f(x, y)$ 为连续函数, 且

$$f(x, y) = xy + \iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中 D 是由 $y=0, y=x^2, x=1$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

36. 计算下列各题.

$$(1) \int_0^1 dy \int_{3y}^3 e^{x^2} dx;$$

$$(2) \int_0^1 dy \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1} dx;$$

$$(3) \int_0^1 dx \int_{x^2}^1 x^3 \sin y^3 dy;$$

$$(4) \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}} dy;$$

$$(5) \int_1^2 dx \int_0^x \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x} dy;$$

$$(6) \iint_D e^{\frac{y}{x+y}} d\sigma, \text{ 其中 } D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1-x, y \leq x\}.$$

37. 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 8, y \geq \frac{x^2}{2}\}$, 计算

$$I = \iint_D [(x-1)^2 + y^2] d\sigma.$$

38. 计算 $I = \iint_D (x^2 + xy)^2 dx dy$, 其中 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2x\}$.

39. 计算 $I = \iint_{\sqrt{x}+\sqrt{y} \leq 1} \sqrt[3]{\sqrt{x}+\sqrt{y}} dx dy$.

40. 设函数 $f(x, y)$ 连续, 且

$$f(x, y) = x + y \iint_D f(x, y) dx dy,$$

其中 D 是由 $y = \frac{1}{x}, x=1, y=2$ 所围成的区域, 求 $f(x, y)$.

41. 设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 2\}$, 计算

$$I = \iint_D |x^2 + y^2 - 1| d\sigma.$$

42. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2e\}$, 计算 $\iint_D x |y - e^x| d\sigma$.

43. 计算二重积分 $\iint_D |\sin(x-y)| dx dy$, 其中 D 是由直线 $y=x, y=2\pi$ 及 $x=0$ 围成的闭区域.

44. 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - \sqrt{2}(x+y)| dx dy$, 其中 $D: x^2 + y^2 \leq 4$.

45. 计算

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_x^{2-|x|} [e^{|y|} + \sin(x^3 y^3)] dy.$$

46. 计算二重积分 $\iint_D f(x, y) dx dy$, 其中 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y+1}{x^2+y^2+1}, & x^2+y^2 \leq 2, \\ x^2+y+1, & x^2+y^2 > 2, \end{cases}$ D 是由直线 $y =$

$x, y = -x$ 及 $x = \sqrt{2}$ 围成的闭区域.

47. 计算 $\int_0^a dx \int_0^b e^{\max\{b^2 x^2, a^2 y^2\}} dy$, 其中 $a, b > 0$.

48. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明: $\int_0^1 e^{f(x)} dx \int_0^1 e^{-f(y)} dy \geq 1$.

49. 求柱体 $x^2 + y^2 \leq 2x$ 被 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 所截得部分的体积.

50. 设区域 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$, 求 $\iint_D x^2(x^2 + y^2) dx dy$.

51. 计算二重积分 $\iint_D |x^2 + y^2 - 2x| d\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

巩固提高



1. 设 $D_t = \{(x, y) \mid -t \leq x \leq t, -t \leq y \leq t\} (t > 0)$, $f(x)$ 为可导函数, 且 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, 若当 $t \rightarrow 0^+$ 时, 函数 $F(t) = \iint_{D_t} f(x^2) dx dy$ 是 t^k 的同阶无穷小, 则 $k =$ ().

(A) 2

(B) 3

(C) 4

(D) 5

2. 设 $f(x)$ 是连续的正值函数, $I = \int_0^1 f(x) dx = \iint_D f(x)f(y) dx dy$, $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, 0 \leq x \leq y\}$, 则 $I =$ ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. 若 $y(x) = \int_0^x \arctan(u-1)^2 du$, 则 $y(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的平均值为 _____.

4. 由曲线 $y = x^2, y = x+2$ 所围成的平面薄片, 其上各点处的面密度 $\mu = 1+x^2$, 则此薄片的质量 $M =$ _____.

5. 设 $p(x)$ 在 $[a, b]$ 上非负且连续, $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且有相同的单调性, 设 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$, 比较

$$I_1 = \iint_D p(x)f(x)p(y)g(y) dx dy, I_2 = \iint_D p(x)f(y)p(y)g(y) dx dy$$

的大小, 并说明理由.

6. 设 $F(x, y) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y}$ 在 $D = [a, b] \times [c, d]$ 上连续, 求

$$I = \iint_D F(x, y) dx dy (\text{用 } f(x, y) \text{ 的函数值表示}),$$

并证明: $I \leq 2(M-m)$, 其中 M 和 m 分别是 $f(x, y)$ 在 D 上的最大值和最小值.

7. 设平面薄片所占的区域 D 由抛物线 $y = x^2$ 及直线 $y = x$ 所围成, 它在 (x, y) 处的面密度 $\rho(x, y) = x^2 y$, 求此薄片的重心.

8. 设 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, $g(x, y) = \int_a^x du \int_c^y f(u, v) dv$, 证明:

$$g''_{xy} = g''_{yx} = f(x, y) (a < x < b, c < y < d).$$

9. 设函数 $f(x)$ 为 $[0, 1]$ 上的连续函数, 且 $0 \leq f(x) < 1$, 利用二重积分证明不等式:

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{1-f(x)} dx \geq \frac{\int_0^1 f(x) dx}{1 - \int_0^1 f(x) dx}.$$

10. 证明: $\frac{\pi}{4}(1 - e^{-1}) < \left(\int_0^1 e^{-x^2} dx \right)^2 < \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2})$.

第 15 章 微分方程

强化训练



1. 微分方程 $xdy = (y - \sqrt{x^2 + y^2})dx (x > 0)$ 满足 $y(1) = 0$ 的特解是().

(A) $\sqrt{x^2 + y^2} + 2y = x$

(B) $\sqrt{x^2 + y^2} + y = 1$

(C) $\sqrt{x^2 + y^2} - 2y = x$

(D) $\sqrt{x^2 + y^2} - y = 1$

2. 以 $y = x$ 与 $y = xe^{-2x}$ 为特解的最低阶常系数齐次线性微分方程为().

(A) $y''' + 2y'' = 0$

(B) $y''' + 4y'' + 4y' - 4y = 0$

(C) $y^{(4)} + 2y''' = 0$

(D) $y^{(4)} + 4y''' + 4y'' = 0$

3. 设函数 $p(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, $y(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上具有二阶导数且满足

$$y''(x) + p(x)y'(x) - y(x) = 0, y(a) = y(b) = 0,$$

则在 $[a, b]$ 上, $y(x)$ ().

(A) 有正的最大值, 无负的最小值

(B) 有负的最小值, 无正的最大值

(C) 既有正的最大值, 又有负的最小值

(D) 既无正的最大值, 又无负的最小值

4. 设以下 A, B, a, b 均为常数, 则微分方程 $y'' - 4y' + 5y = e^{2x} \sin x - 3x + 2$ 的特解形式为().

(A) $(a \sin x + b \cos x)e^{2x} + Ax + B$

(B) $x(a \sin x + b \cos x)e^{2x} + Ax + B$

(C) $(a \sin x + b \cos x)e^{2x} + x(Ax + B)$

(D) $x(a \sin x + b \cos x)e^{2x} + x(Ax + B)$

5. 设以下 A, B, a, b 均为常数, 则微分方程 $y'' - 3y' + 2y = xe^{2x} - 2x + 1$ 的特解形式为().

(A) $x(ax + b)e^{2x} + Ax + B$

(B) $(ax + b)e^{2x} + Ax + B$

(C) $x(ax + b)e^{2x} + x(Ax + B)$

(D) $(ax + b)e^{2x} + x(Ax + B)$

6. 设 $p(x), q(x), f(x)$ 均是 x 的已知连续函数, $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 分别是非齐次方程 $y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$ 的 3 个线性无关的解, C_1, C_2 是两个任意常数, 则该非齐次方程对应的齐次方程的通解是().

(A) $C_1 y_1 + (C_2 - C_1) y_2 + (1 - C_2) y_3$

(B) $(C_1 - C_2) y_1 + (C_2 - 1) y_2 + (1 - C_1) y_3$

(C) $(C_1 + C_2) y_1 + (C_1 - C_2) y_2 + (1 - C_1) y_3$

(D) $C_1 y_1 + C_2 y_2 + (1 - C_1 - C_2) y_3$

7. 设 $y = e^{2x} + (1+x)e^x$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y'' + \alpha y' + \beta y = \gamma e^x$ 的一个特解, 则该方程的通解为().

(A) $y = (C_1 + C_2 x)e^x + e^{2x}$

(B) $y = (C_1 + C_2 x)e^x - e^{2x}$

(C) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + x e^x$

(D) $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 2x e^x$

8. 设函数 $f(x)$ 二阶导数连续且满足方程

$$f(x) - 1 = \int_0^x f(1-t) dt,$$

则 $f(x) = (\quad)$.

(A) $\cos x + \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x$

(B) $\cos x - \frac{1 + \sin 1}{\cos 1} \sin x$

(C) $\sin x + \frac{\cos 1}{1 + \sin 1} \cos x$

(D) $\sin x - \frac{\cos 1}{1 + \sin 1} \cos x$

9. 微分方程 $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = 2y^2 \ln x$ 满足初始条件 $y|_{x=e} = \frac{1}{e}$ 的特解为 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 微分方程 $(y^2 - 2x)dy - ydx = 0$ 满足 $x = 1$ 时 $y = 2$ 的特解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 微分方程 $(y^2 + 1)dx = y(y - 2x)dy$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

12. 微分方程 $(1 + e^{-\frac{x}{y}})ydx + (y - x)dy = 0$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

13. 微分方程 $3e^x \tan y dx + (1 - e^x) \sec^2 y dy = 0$ 的通解是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

14. 微分方程 $ydx - xdy = x^2 y dy$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}$.

15. 以 $y_1(x) = e^x, y_2(x) = x e^x, y_3(x) = \cos x, y_4(x) = \sin x$ 为特解的四阶常系数齐次线性微分方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

16. 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{1-y} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0, \frac{dy}{dx}|_{x=0} = 2$ 的特解是 $y = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 设可导函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = f(\pi - x)$, 且 $f(0) = 1$, 则 $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 求二阶常系数线性微分方程 $y'' + \lambda y' = 2x + 1$ 的通解, 其中 λ 为常数.

19. 已知曲线 $y = y(x)$ 经过点 $(1, e^{-1})$, 且在点 (x, y) 处的切线在 y 轴上的截距为 xy , 求该曲线方程的表达式.

20. 设 $f(x)$ 为可导的正值偶函数, 且 $f(x)$ 不为常值函数, $f(0) = 1$. 已知对于 x 轴上的任意闭区间 $[a, b]$, 以 $[a, b]$ 为底边, 以曲线 $y = f(x)$ 为曲边的曲边梯形的面积在数值上总等于曲线 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的弧长, 求函数 $f(x)$ 的解析式.

21. 设 $a > 0$, 函数 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内连续有界, 证明: 微分方程 $y' + ay = f(x)$ 的解在 $[0, +\infty)$ 内有界.

22. 设方程 $y' + P(x)y = x^2$, 其中 $P(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1, \\ \frac{1}{x}, & x > 1. \end{cases}$ 求在 $(-\infty, +\infty)$ 内的连续函数

$y = y(x)$, 使之在 $(-\infty, +\infty)$ 内都满足方程, 且满足初值条件 $y(0) = 2$.

23. 求 $xy'' - y' \ln y' + y' \ln x = 0$ 满足 $y(1) = 2$ 和 $y'(1) = e^2$ 的特解.

24. 求 $y'^2 - yy'' = 1$ 的通解.

25. 求解 $y'' = e^{2y} + e^y$, 且 $y(0) = 0, y'(0) = 2$.

26. 设函数 $y(x) (x \geq 0)$ 二阶可导且 $y'(x) > 0, y(0) = 1$. 过曲线 $y = y(x)$ 上任意一点 $P(x, y)$ 作该曲线的切线及到 x 轴的垂线, 上述两直线与 x 轴所围成的三角形的面积记为 S_1 , 区间 $[0, x]$ 上以 $y = y(x)$ 为曲边的曲边梯形面积记为 S_2 , 并设 $2S_1 - S_2$ 恒为 1, 求此曲线 $y = y(x)$ 的方程.

27. 位于上半平面且图形是凹的曲线 $y = y(x)$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线斜率为 0, 在点 $(2, 2)$ 处的切线斜率为 1. 已知曲线上任一点处的曲率半径与 $\sqrt{y}$ 及 $(1 + y'^2)$ 的乘积成正比, 求该曲线方程.

28. 有一登山爱好者,欲攀登一表面为椭圆抛物面 $z = 75 - x^2 - 2y^2$ 的小山. 为了挑战自我,他总是沿着最陡峭的路线攀登. 设他从山脚下的点 $P_0(5, 5, 0)$ 处出发,求攀登路线的表达式.

29. 设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数,且满足 $f(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f'(t) dt + x^2$, 求 $f(x)$ 的表达式.

30. 设 $y_1(x) = x(1 - 2x)$, $y_2(x) = 2x(1 - x)$, $y_3(x) = x(e^x - 2x)$ 是微分方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的 3 个解,其中 $p(x), q(x), f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上的连续函数,求此微分方程及其通解.

31. 已知二阶微分方程 $y'' + ay' + by = ce^x$ 有特解 $y = e^{-x}(1 + xe^{2x})$, 求此微分方程的通解.

32. 设函数 $y = f(x)$ 满足方程 $y'' + 2y' + y = 3xe^{-x}$ 及条件 $y(0) = \frac{1}{3}, y'(0) = -2$, 求反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

33. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上具有连续的一阶导数,且满足 $f(0) = 1$ 及

$$f'(x) + f(x) - \frac{1}{x+1} \int_0^x f(t) dt = 0.$$

(1) 求导函数 $f'(x)$;

(2) 证明: 当 $x > 0$ 时, 有 $e^{-x} < f(x) < 1$.

34. 设函数 $f(u)$ 具有二阶连续导数,且 $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 2$, 又 $z = f(e^y \cos x)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{2y} z,$$

求 $f(u)$ 的表达式.

35. 设函数 $f(t)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续,且满足方程

$$f(t) = e^{-4\pi t^2} - \iint_{x^2 + y^2 \leq 4t^2} f\left(\frac{1}{2} \sqrt{x^2 + y^2}\right) d\sigma,$$

求 $f(t)$ 的表达式.

36. 求微分方程 $\begin{cases} y'' + y = x, & x \leq \frac{\pi}{2}, \\ y'' + 4y = 0, & x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$ 满足条件 $y|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = 0$ 且在 $x = \frac{\pi}{2}$ 处可导

的特解.

37. 用变量代换 $x = \tan t \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right)$ 将微分方程

$$(1 + x^2)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x(1 + x^2) \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

化为以 $y = y(t)$ 为未知函数的微分方程,并求原方程满足初始条件 $y|_{x=0} = y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

巩固提高



1. 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $\frac{x^2}{a^2+k} + \frac{y^2}{b^2+k} = 1 (x, y > 0)$ 确定, 其中参数 $|a| \neq |b|, k > 0$, 则 $y = y(x)$ 满足微分方程().

(A) $(a^2 - b^2) \frac{dy}{dx} = \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)$

(B) $(a^2 - b^2) \frac{dy}{dx} = \left(x - y \frac{dy}{dx}\right) \left(x \frac{dy}{dx} + y\right)$

(C) $(a^2 + b^2) \frac{dy}{dx} = \left(x + y \frac{dy}{dx}\right) \left(x \frac{dy}{dx} + y\right)$

(D) $(a^2 + b^2) \frac{dy}{dx} = \left(x - y \frac{dy}{dx}\right) \left(x \frac{dy}{dx} - y\right)$

2. 设曲线 $y = y(x)$ 是方程 $y'' - y = e^x + 4\cos x$ 的解, 且其在点 $(0, 1)$ 处与抛物线 $y = x^2 - x + 1$ 相切, 则 $y =$ ().

(A) $\frac{9}{4}e^x - \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^x + 2\sin x$

(B) $\frac{9}{4}e^x + \frac{3}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - 2\cos x$

(C) $\frac{3}{4}e^x - \frac{9}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^x + 2\sin x$

(D) $\frac{3}{4}e^x + \frac{9}{4}e^{-x} + \frac{1}{2}xe^x - 2\cos x$

3. 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上连续可导, 且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = \frac{1}{3}$. 当 $x > 0$ 时, 曲线 $y = f(x)$ 上点 $(x, f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距等于 $\frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$, 则 $f(x) =$ ().

(A) $\frac{1}{3} \ln x + 3, x > 0$

(B) $\frac{1}{3} \ln x + 1, x > 0$

(C) $3 \ln x + 1, x > 0$

(D) $3 \ln x + 3, x > 0$

4. 设函数 $y = f(x)$ 满足微分方程 $y' + y = \frac{e^{-x} \cos x}{2\sqrt{\sin x}}$, 且 $f(\pi) = 0$, 则曲线 $y = f(x) (x \geq 0)$ 绕 x 轴旋转一周所生成旋转体的体积是().

(A) $\frac{\pi}{5(1 + e^{-2\pi})}$

(B) $\frac{\pi}{5(1 - e^{-2\pi})}$

(C) $\frac{\pi}{5(1 + e^{-\pi})}$

(D) $\frac{\pi}{5(1 - e^{-\pi})}$

5. 已知 $f(xy) = yf(x) + xf(y)$ 对任意正的 x, y 均成立, 且 $f'(1) = e$, 则 $f(xy)$ 的极小值为().

(A) e

(B) e^{-1}

(C) 1

(D) -1

6. 设 $p(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上是连续的非负函数, 若微分方程 $dy + p(x)ydx = 0$ 的任一解均满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0$, 则 $p(x)$ 必然满足().

(A) $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = 0$

(B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = +\infty$

(C) $\int_a^{+\infty} p(x)dx$ 收敛

(D) $\int_a^{+\infty} p(x)dx$ 发散

7. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续且有水平渐近线 $y = b \neq 0$, 则().

(A) 当 $a > 0$ 时, $y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a}$

(B) 当 $a > 0$ 时, $y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{a}{b}$

(C) 当 $a < 0$ 时, $y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{b}{a}$

(D) 当 $a < 0$ 时, $y' + ay = f(x)$ 的任意解都满足 $\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \frac{a}{b}$

8. 微分方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} + (x + \sin y) \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 0$ 满足初值条件 $y(0) = 0, y'(0) = \frac{2}{3}$ 的特解是_____.

9. 设 $y_0 = 2xe^{-3x}$ 是二阶常系数齐次线性微分方程 $y'' + ay' + by = 0$ 的一个特解, 函数 $y(x)$ 是该方程满足条件 $y(0) = 2, y'(0) = -5$ 的解, 则 $\int_0^{+\infty} y(x)dx =$ _____.

10. 设函数 $y = y(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, $y(1) = 1$, 且当 $x \neq 0$ 时满足方程 $y'(x) = \frac{y(x)}{x} + x \int_0^1 y(x)dx$, 则 $\int_0^1 y(x)dx =$ _____.

11. 已知 $y = f(x)$ 是微分方程 $xy' - y = \sqrt{2x - x^2}$ 满足初值条件 $f(1) = 0$ 的特解, 则 $\int_0^1 f(x)dx =$ _____.

12. 设曲线 $y = y(x)$ 满足微分方程 $y''' - y' = 0$, 且该曲线在原点处有拐点并以 $y - 2x = 0$ 为切线, 则 $y(x) =$ _____.

13. 已知某三阶常系数齐次线性微分方程有两个特解, 分别为 $e^{-\frac{1}{2}x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}x$ 与 e^x , 则该微分方程为_____.

14. 设可微函数 $f(x)$ 满足方程 $f(x) = e^x + e^x \int_0^x f(t)dt$, 则 $\int_{-\infty}^0 f(x)dx =$ _____.

15. 设定义在 $(0, +\infty)$ 内的函数 $y = f(x)$ 满足微分方程 $xy'' + 3y' = 3$, 且有 $f(1) = 3$, $\int_1^2 f(x)dx = \frac{5}{2}$. 求:

(1) 函数 $y = f(x)$ 的表达式;

(2) 函数 $y = f(x)$ 的单调区间与极值;

(3) 曲线 $y = f(x)$ 在 $x \geq 1$ 的部分绕其斜渐近线旋转一周所得的旋转体的体积 V .

16. 设 $\varphi(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数, 且 $\Phi'(x) = \varphi(x), \Phi(0) = 0$.

(1) 求方程 $y' + y \sin x = \varphi(x)e^{\cos x}$ 的通解;

(2) 在(1)中方程是否有以 2π 为周期的解? 若有, 请写出所需条件, 若没有, 请说明理由.

17. 设 $y(x)$ 是方程 $y^{(4)} - y'' = 0$ 的解, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $y(x)$ 是 x 的 3 阶无穷小, 求 $y(x)$.

18. 求 $(y^3 - 3xy^2 - 3x^2y)dx + (3xy^2 - 3x^2y - x^3 + y^2)dy = 0$ 的通解.

19. 求解微分方程 $(1+x)^3 \frac{d^3 y}{dx^3} - 3(1+x)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 6(1+x) \frac{dy}{dx} - 6y = 0$.

20. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的二阶可导函数, 满足关系式 $f(x) + 2f'(x + \pi) = \sin x$, 求 $f(x)$.

21. 设 $L: y = f(x)$ 是第一象限内的光滑曲线, 已知 L 与 x 轴相切于点 $(1, 0)$, $f''(x) \geq 0$, 且 L 上任意两点间的弧长等于这两点处的切线在 y 轴上截下的线段之长, 求曲线 L 的方程.

22. 如图 1-15-1 所示, 正圆柱形水桶中装满水, 当打开水桶底部的水龙头时, 随着水的流出, 水面高度 y 逐渐下降. 当水面高度 y 较大时, 水的流出速率较快; 当水面高度 y 越来越小时, 流出速率也越来越小. 设水面高度 y 的下降速率与 y 的平方根成正比, 即

$$\frac{dy}{dt} = -k\sqrt{y},$$

其中 k 为正的比例常数.

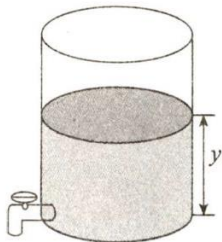


图 1-15-1

(1) 求水面高度 y 对于时间 t 的函数关系;

(2) 设 $k = \frac{1}{10}$, 当 $t = 0$ 时, $y = 9$, 需要多长时间水桶中的水才能流光 (t 的单位是 min, y 的单位是 m)?

第 16 章 无穷级数

强化训练



1. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则().

(A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 必收敛

(B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 必收敛

(C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 必收敛

(D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+1}}{2}$ 必收敛

2. 考虑下列 3 个级数: ① $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^n + \beta^n}$, ② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\alpha^n + \beta^n}$, ③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta^n}{\alpha^n + \beta^n}$, 则当 $0 < \alpha < 1 < \beta$ 时, 收敛的级数是().

(A) ①②

(B) ②③

(C) ①③

(D) ①②③

3. 设级数 $\sum_{n=2}^{\infty} |u_n - u_{n-1}|$ 收敛, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n v_n^2$ ().

(A) 条件收敛

(B) 绝对收敛

(C) 发散

(D) 敛散性无法判断

4. 设 $a_n \leq b_n \leq c_n$, 则下列结论正确的是().

(A) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散

(B) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 也收敛

(C) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也发散

(D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 都收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛

5. 设 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上连续, 且 $0 \leq f(x) \leq 1$, 又设 $a_n = \int_0^1 \sqrt{1 + f^n(x)} dx$, 则级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ ().

(A) 发散

(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛

(D) 敛散性与 $f(x)$ 有关

6. 下列命题中正确的是().

- (A) 若 $u_n < v_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} v_n$
 (B) 若 $u_n < v_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 (C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛
 (D) 若 $w_n < u_n < v_n (n = 1, 2, 3, \dots)$, $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

7. 下列命题正确的是().

- (A) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)^2$ 收敛
 (B) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n v_n|$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2$ 都收敛
 (C) 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, 则 $u_n \geq \frac{1}{n}$
 (D) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 且 $u_n \geq v_n (n = 1, 2, \dots)$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛

8. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散, 有下述命题:

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必收敛; ② $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 必发散;
 ③ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 必收敛; ④ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$ 必发散.

其中结论正确的有().

- (A) 1 个 (B) 2 个 (C) 3 个 (D) 4 个

9. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛, 则下述结论不成立的是().

- (A) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 必收敛 (B) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$ 必收敛
 (C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ 必收敛 (D) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 必收敛

10. 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n-1})$ 收敛, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ ().

- (A) 发散 (B) 条件收敛
 (C) 绝对收敛 (D) 敛散性不确定

11. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 下面 4 个级数,

- ① $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$; ② $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+1})$;
 ③ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} + a_{2n})$; ④ $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n-1} - a_{2n})$.

必收敛的个数为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

12. 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n^2}$ 收敛, λ 为正常数, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|a_n|}{\sqrt{b_n^2 + \lambda}}$ ().

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛 (C) 发散 (D) 敛散性与 λ 有关

13. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处收敛, 则在 $x = 2$ 处().

- (A) 条件收敛 (B) 绝对收敛
(C) 发散 (D) 敛散性不确定

14. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 2$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处().

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 敛散性要看具体的 $\{a_n\}$

15. 若数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n (x+2)^n$ 在 $x = -\sqrt{2}$ 处().

- (A) 绝对收敛 (B) 条件收敛
(C) 发散 (D) 敛散性不能确定

16. 设数列 $\{a_n\}$ 严格单调减少, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 无界, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 的收敛域为().

- (A) $(-2, 2]$ (B) $[-2, 2)$ (C) $[1, 3)$ (D) $(1, 3]$

17. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-a)^n}{n}$ 在点 $x = -1$ 处收敛, 则实数 a 的取值范围是().

- (A) $-2 < a \leq 0$ (B) $-2 \leq a < 0$
(C) $-1 < a \leq 1$ (D) $-1 \leq a < 1$

18. 已知 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^n x}{\cos x} dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_{n+1} - a_{n-1}) = ()$.

- (A) -2 (B) -1 (C) 1 (D) 2

19. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^n$ 在 $x = -2$ 处条件收敛, $a_n > 0, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-2)^{2n+1}$ 的收敛域为().

- (A) $(1, 3)$ (B) $(0, 4)$ (C) $[-2, 2)$ (D) $[-4, 4)$

20. 若把函数 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{3+2x-x^2}}$ 展开为 $(x-1)$ 的幂级数, 则该幂级数的收敛半径为().

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) 2 (D) 4

21. 设 $f(x) = x^2 (0 < x < 1)$, 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$, 其中

$$b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx, n = 1, 2, 3, \dots,$$

则 $S\left(-\frac{1}{2}\right) = ()$.

(A) $-\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{4}$

(C) $-\frac{1}{2}$

(D) $\frac{1}{2}$

22. 设函数 $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 1)$, 而 $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x, x \in (-\infty, +\infty)$, 其中

$a_n = 2 \int_0^1 f(x) \cos n\pi x dx, n = 0, 1, 2, \dots$, 则 $S(-\frac{1}{2}) = (\quad)$.

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $-\frac{1}{4}$

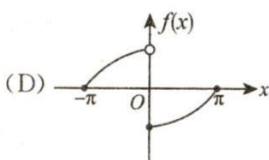
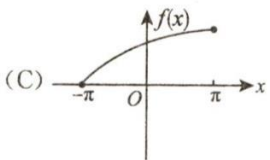
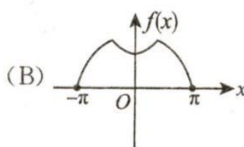
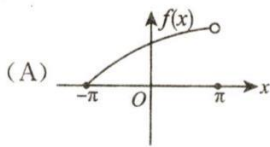
(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{2}$

23. 已知函数 $f(x)$ 以 2π 为周期,

$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, n = 0, 1, 2, \dots, b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, n = 1, 2, \dots$,

则下列选项中可使得 $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上处处成立的 $f(x)$ 的图像是().



24. 数项级数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{10 \times 2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{10n} + \dots$ 的敛散性为_____.

25. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n3^n} x^{n-1}$ 的收敛域为_____.

26. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ 的收敛域为_____.

27. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{2n+1} x^{2n+1}$ 的收敛区间为_____.

28. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 在 $x=2$ 处收敛, 在 $x=-4$ 处发散, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域为_____.

29. 幂级数 $\frac{1}{a} + \frac{2x}{a^2} + \dots + \frac{nx^{n-1}}{a^n} + \dots$ 在收敛区间 $(-a, a)$ 内的和函数 $S(x)$ 为_____.

30. 设 $x_1 = r > 0, x_{n+1} = x_n + x_n^3, n = 1, 2, 3, \dots$, 则数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{1+x_n^2} =$ _____.

31. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^n(2n-1)} =$ _____.

32. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n^2}{(2n)!} \frac{1}{2^n}$ 的和为_____.

33. 无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (1-\sqrt{x})^n dx$ 的和为_____.

34. 函数 $f(x) = \ln(1-x-2x^2)$ 展开成 x 的幂级数为_____.

35. 若将 $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$ 在 $[0, 2]$ 上展开成正弦级数, 则该级数的和函数 $S(x) =$ _____.

36. 设 $f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi < x \leq 0, \\ 1+x^2, & 0 < x \leq \pi, \end{cases}$ 则其以 2π 为周期的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处收敛于_____.

37. 设 $f(x) = 2-x$ ($0 \leq x < 2$), 而 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{2}$ ($-\infty < x < +\infty$), 其中

$$b_n = \int_0^2 f(x) \sin \frac{n\pi x}{2} dx (n=1, 2, 3, \dots),$$

则 $S(3) =$ _____.

38. 设 $f(x) = \begin{cases} x+1, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 0, & -\pi \leq x < 0, \end{cases}$ $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 是 $f(x)$ 的以 2π

为周期的傅里叶级数, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n =$ _____.

39. 设 $f(x) = \pi x + x^2$, $-\pi \leq x \leq \pi$, 且 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的傅里叶级数为 $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, 则 $b_3 =$ _____.

40. 设 $x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nx$ ($-\pi \leq x \leq \pi$), 则 $a_2 =$ _____.

41. 若函数 $f(x) = \sin^4 x$ 的幂级数展开式为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ ($-\infty < x < +\infty$), 则 $a_4 =$ _____.

42. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{n!} x^n$ 的和函数 $S(x)$ 的单调递增区间为_____.

43. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! a^n}{n^n}$ (a 为常数, $0 < |a| < e$).

44. 判别正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\int_0^n \sqrt[4]{1+x^4} dx}$ 的敛散性.

45. 证明: 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$ 条件收敛.

46. 设 $u_n = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, 判定 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2$ 的敛散性, 如果收敛, 指出是绝对收敛, 还是条件收敛.

47. 设 $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} - \sqrt{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$ ($n=1, 2, \dots$), 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的敛散性.

48. 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, 反常积分 $\int_0^{+\infty} f^2(x) dx$ 收敛. 令

$$a_n = \int_0^1 f(nx) dx (n=1, 2, \dots),$$

证明:级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{n}$ 收敛.

49. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n n!} x^n$ 的和函数 $S(x)$, 并计算 $\int_{-\infty}^0 S(x) dx$.

50. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ 的收敛域与和函数.

51. 求解下列各题.

(1) 将 $f(x) = \frac{1}{x^2-3x-4}$ 展开为 $x-1$ 的幂级数, 并指出收敛区间;

(2) 将 $y = \sin x$ 展开为 $x - \frac{\pi}{4}$ 的幂级数;

(3) 将 $f(x) = \frac{1}{x^2}$ 展开为 $x+1$ 的幂级数.

52. 设 $f(x) = \frac{1}{1-2x-x^2}$.

(1) 将 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数;

(2) 分别判断级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{f^{(n)}(0)}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ 的敛散性.

53. 将函数 $f(x) = \ln \left| \frac{x}{x-3} \right|$ 展开成 $x-2$ 的幂级数, 并求出其收敛域.

54. 求解下列各题.

(1) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ 的和函数;

(2) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}$ 的和;

(3) 求 $x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \cdots + \frac{1}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots$ 的收敛域与和函数.

55. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} x^{3n}$ 的收敛域与和函数, 并求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$ 的和.

56. 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1} - 1 \right) x^{2n}$ 的收敛域与和函数.

57. 已知 $f_n(x)$ 满足 $f'_n(x) = f_n(x) + x^{n-1} e^x$ (n 为正整数), 且 $f_n(1) = \frac{e}{n}$, 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$

的和函数.

58. (1) 求函数项级数 $e^{-x} + 2e^{-2x} + \cdots + ne^{-nx} + \cdots$ 收敛时 x 的取值范围;

(2) 当(1)中级数收敛时, 求其和函数 $S(x)$, 并求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} S(x) dx$.

59. 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1$, 且 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$, $n = 2, 3, \cdots$. 证明在 $|x| < \frac{1}{2}$ 时幂级数

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ 收敛, 并求其和函数与系数 a_n .

60. 设曲线 $y = x^n$ 与 $y = x^{n+1}$ 所围成区域的面积为 a_n ($n = 1, 2, \cdots$), 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ 的和.

61. 设曲线 $y = \frac{1}{x^3} (x > 0)$, $y = \frac{x}{n^4}$ 及 $y = \frac{x}{(n+1)^4}$ 所围成区域的面积为 $a_n (n = 1, 2, \dots)$, 求

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的和.

62. 将函数 $f(x) = x \arctan \frac{1+x}{1-x} - \ln \sqrt{1+x^2}$ 展开成 $\frac{\pi}{4}x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+2} (-1 \leq x < 1)$ 的形式,

求 a_n 的表达式.

63. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 + n)}{(2n+1)!}$ 的和.

64. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的周期函数, 且 $f(x) = e^{\alpha x} (0 \leq x < 2\pi)$, 其中 $\alpha \neq 0$, 将 $f(x)$ 展开成傅里叶级数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$ 的和.

65. 将 $f(x) = 1 - x^2 \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$ 展开为傅里叶级数.

巩固提高



1. 设 $\{a_n\}$ 是等差数列, $a_1 > 0$, 公差 $d > 0$, $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{S_n} (\quad)$.

(A) 发散

(B) 条件收敛

(C) 绝对收敛

(D) 敛散性取决于公差 d

2. 下列级数发散的是 ().

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{1}{n}} \frac{\sqrt{x}}{1+x} dx$

(B) $\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin x}{1+x} dx$

(C) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt{n}}$

(D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

3. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x)}{x} \right]^{\frac{1}{x}} = (\quad)$.

(A) 1

(B) $e^{\frac{1}{2}}$

(C) $e^{\frac{3}{2}}$

(D) e^4

4. 已知 $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $n = 1, 2, \dots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{3^n} = (\quad)$.

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{3}{5}$

(C) $\frac{5}{3}$

(D) 2

5. 已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n$, 则和函数 $S(x) = (\quad)$.

(A) $\frac{\ln(1-x)}{1-x}, |x| < 1$

(B) $\frac{\ln(1-x)}{x-1}, |x| < 1$

(C) $\frac{\ln(1+x)}{1+x}, |x| < 1$

(D) $\frac{\ln(1+x)}{x-1}, |x| < 1$

6. 设 $a_n > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln a_n}{\ln n} = q$, 则().

(A) 当 $q < -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $q > -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(B) 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛; 当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散

(C) 当 $q < -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $q > -1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

(D) 当 $q < 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散; 当 $q > 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛

7. 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-4, 4]$, 则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$ 的收敛域为().

(A) $(-2, 2]$ (B) $[-2, 2]$ (C) $(-4, 4]$ (D) $[-4, 4]$

8. 下列命题正确的是().

(A) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n a_n = 0$

(B) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时 a_n 与 b_n 是等价无穷小, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 亦收敛

(C) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n b_n|$ 也收敛

(D) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛

9. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \sin \frac{1}{2^n} \right) x^n$ 的收敛域为().

(A) $(-2, 2)$ (B) $[-2, 2]$ (C) $(-8, 8)$ (D) $[-8, 8]$

10. 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 3$ 处条件收敛, 则 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-1)^n$ 在 $x = -1$ 处().

(A) 条件收敛

(B) 绝对收敛

(C) 发散

(D) 敛散性要看具体的 $\{a_n\}$

11. 设函数 $f(x)$ 连续且满足 $f(x+\pi) + f(x) = 0$, 则 $f(x)$ 以 2π 为周期的傅里叶系数 $(n=1, 2, \dots)$ ().

(A) $a_{2n} = 0, b_{2n} = 0$

(B) $a_{2n} = 0, b_{2n-1} = 0$

(C) $a_{2n-1} = 0, b_{2n-1} = 0$

(D) $a_{2n-1} = 0, b_{2n} = 0$

12. 设曲线族 $y_n(x) = |\sin x|^{\frac{n}{2}}, n=1, 2, \dots, V_n$ 表示 $y_n(x)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上与 x 轴所围图形绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积, 则 $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot \frac{V_{n-2}}{V_n} = ()$.

(A) $-\ln 2 + 1$

(B) $\ln 2 + 1$

(C) $-\ln 2 - 1$

(D) $\ln 2 - 1$

13. 设 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = 2, \sum_{n=1}^{\infty} u_n = 6$, 又 $v_n = 3u_{2n-1} - u_{2n}$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) \sec \pi x = 1$, $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\pi x$, $-\infty < x < +\infty$,

其中 $b_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin n\pi x dx$ ($n = 1, 2, 3, \dots$), 则函数值 $S\left(\frac{3}{2}\right) =$ _____.

15. 设 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内可导, 且导函数 $f'(x)$ 有界, 证明:

(1) 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right]$ 绝对收敛;

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 存在.

16. 设函数 $f_n(x) = \int_0^x t(1-t) \sin^{2n} t dt$ ($x > 0$), 其中 n 为正整数.

(1) 证明 $f_n(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上存在最大值;

(2) 记 a_n 为函数 $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值 ($n \geq 1$), 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

17. 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ 的收敛半径.

18. (1) 设 $f(x)$ 为任意阶可导函数, 且 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 若 $f(x)$ 为奇函数, 证明

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} x^{2n-1};$$

(2) 将函数 $f(x) = \int_0^x e^{x^2-t^2} dt$ 展开为 x 的幂级数.

19. (1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx$;

(2) 求 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{3n-2}$.

20. 设 $x > 2$, 证明 $\ln \frac{x+2}{x-2} = \ln \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \left(\frac{2}{x^3-3x} \right)^{2n-1}$.

21. 已知 $a_0 = 3, a_1 = 5$, 且 $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \cdot \left(\frac{2}{3} - n \right) a_n$ ($n \geq 1$), 证明当 $|x| < 1$ 时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

收敛, 并求和函数.

22. 设正数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a_2 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n = 3, 4, \dots$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 已知某

数项级数的部分和为

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{2}{2^3} + \frac{3}{2^4} + \frac{5}{2^5} + \frac{8}{2^6} + \frac{13}{2^7} + \dots + \frac{a_n}{2^n} (n \geq 1).$$

(1) 证明此级数收敛;

(2) 求出此级数的和 S .

23. 设函数 $f(x) = \frac{7+2x}{2-x-x^2}$, 当 $-1 < x < 1$ 时, 其幂级数展开式为 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

(1) 求 a_n ($n = 0, 1, 2, \dots$);

(2) 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{(a_n - 2)(a_{n+1} - 2)}$ 的和.

24. 设 $a_0 = 1, a_1 = -2, a_2 = \frac{7}{2}, a_{n+1} = -\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)a_n (n \geq 2)$. 证明: 当 $|x| < 1$ 时, 幂级数

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 收敛, 并求其和函数 $S(x)$.

25. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{12}(3x^2 - 6\pi x + 2\pi^2) (0 \leq x \leq \pi)$, 并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^3}$ 的和.

26. 将函数 $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 12}{x^3 - 3x^2 - 9x + 27}$ 展开成 $x-1$ 的幂级数.

第 17 章 多元函数积分学的预备知识

强化训练



1. 已知 $|a| = 1$, $|b| = \sqrt{2}$, 且 $(a, b) = \frac{\pi}{4}$, 则 $|a+b| = (\quad)$.

- (A) 1 (B) $1+\sqrt{2}$ (C) 2 (D) $\sqrt{5}$

2. 已知曲面 $2z = x^2 + y^2$ 上点 M 的切平面平行于平面 $x - y + z = 1$, 则 M 点的坐标是 $(\quad)$.

- (A) $(-1, -1, 1)$ (B) $(-1, 1, 1)$ (C) $(1, -1, 1)$ (D) $(1, 1, 1)$

3. 过点 $P(2, 0, 3)$ 且与直线

$$\begin{cases} x - 2y + 4z - 7 = 0, \\ 3x + 5y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$$

垂直的平面方程是 $(\quad)$.

- (A) $(x-2) - 2(y-0) + 4(z-3) = 0$
(B) $3(x-2) + 5(y-0) - 2(z-3) = 0$
(C) $-16(x-2) + 14(y-0) + 11(z-3) = 0$
(D) $-16(x-2) - 14(y-0) + 11(z-3) = 0$

4. 设 $F(u, v)$ 具有连续偏导数, a, b 是非零常数, $a \frac{\partial F}{\partial u} + b \frac{\partial F}{\partial v} \neq 0$, 则曲面

$$F(x - az, y - bz) = 0$$

上任一点处的切平面都平行于一条固定直线 $(\quad)$.

- (A) $x = \frac{y}{a} = \frac{z}{b}$ (B) $\frac{x}{a} = y = \frac{z}{b}$ (C) $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$ (D) $x = \frac{y}{b} = \frac{z}{a}$

5. 设 a, b 均为非零向量, 且 $|a| = |b|$. 若 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(xa - b) \times (a - xb)}{(a - xb) \cdot (xa + b)} = \frac{1}{2}$, 则向量 a, b 的夹角为 $(\quad)$.

- (A) $\arctan \frac{1}{2}$ (B) $\arctan \left(-\frac{1}{2} \right)$ (C) $\pi - \arctan \frac{1}{2}$ (D) $\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{2}$

6. 两条平行直线 $L_1: \begin{cases} x = 1 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = t, \end{cases} L_2: \begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = 1 + t \end{cases}$ 之间的距离为 $(\quad)$.

- (A) $\frac{2}{3}$ (B) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$ (C) 1 (D) 2

7. 设有直线 $L_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-2}$ 与直线 $L_2: \begin{cases} 2x+y+4=0, \\ y+2z+2=0, \end{cases}$ 则直线 L_1 与 L_2 的夹角为().

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

8. 设平面 $\Pi_1: x-2y+z+5=0$, $\Pi_2: x+y-2z+3=0$, 则 Π_1 与 Π_2 的夹角为().

- (A) $\frac{\pi}{6}$ (B) $\frac{\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{\pi}{2}$

9. 设直线 $L_1: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{0}$, $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z}{1}$, 则 L_1 与 L_2 ().

- (A) 平行 (B) 垂直
(C) 相交但不垂直 (D) 异面

10. 与直线 $L_1: \begin{cases} x=1, \\ y=-2+t, \\ z=1+t \end{cases}$ 及直线 $L_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$ 都平行, 且过原点的平面 π 的方程为().

- (A) $x+y+z=0$ (B) $x-y+z=0$
(C) $x+y-z=0$ (D) $x-y+z+2=0$

11. 曲线 $L: \begin{cases} x^2+y^2+z^2=2, \\ x+y+z=0 \end{cases}$ 在点 $(1, -1, 0)$ 处的切线方程为().

- (A) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{1}$ (B) $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{3}$
(C) $\frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$ (D) $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-2}$

12. 点 $P(1, 0, 1)$ 到直线 $\begin{cases} 2x-y-z+1=0, \\ x+y-3z=0 \end{cases}$ 的距离 $d =$ ().

- (A) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ (B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{3}$

13. 若曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 (c < a < b)$ 与平面 $z = ky (k > 0)$ 的交线是圆, 则 $k =$ ().

- (A) $\frac{c\sqrt{b^2-a^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$ (B) $\frac{a\sqrt{b^2-c^2}}{b\sqrt{a^2-c^2}}$ (C) $\frac{c\sqrt{b^2-a^2}}{a\sqrt{b^2-c^2}}$ (D) $\frac{b\sqrt{a^2-c^2}}{c\sqrt{b^2-a^2}}$

14. 点 $(-1, 2, 0)$ 在平面 $x+2y-z+1=0$ 上的投影为_____.

15. 点 $(1, 2, 1)$ 到平面 $x+2y+2z-13=0$ 的距离是_____.

16. 过原点且过直线 $L: \frac{x+2}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{1}$ 的平面方程为_____.

17. 设 Ω 是以 $A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(3, 0, 3), D(0, 1, 1)$ 为顶点的四面体, 则 Ω 的体积为_____.

18. xOz 坐标面上的抛物线 $z^2 = x-2$ 绕 x 轴旋转而成的旋转抛物面的方程是_____.

19. 已知直线 $L_1: \begin{cases} x+y=0, \\ 2y+z+1=0 \end{cases}$ 和 $L_2: \begin{cases} x=1-t, \\ y=-1+2t, \\ z=1+t, \end{cases}$ 则过直线 L_1 和 L_2 的平面是_____.

20. 已知点 $P(1, 2, 3)$ 与 $Q(3, 2, 1)$, 点 M 在平面 $x + y + 2z - 3 = 0$ 上, 若点 M 与 P, Q 的距离之和最小, 则点 M 的坐标为 _____.

21. 设 L 表示过直线 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2, \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ 的平面与 xOy 面垂直相交的交线, 则点 $P(1, 2, -4)$ 到直线 L 的距离为 _____.

22. 已知可微函数 $f(x, y)$ 满足 $f(tx, ty) = tf(x, y), t > 0$, 且 $f'_1(1, -2) = 4$, 则曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(1, -2, 2)$ 处的切平面方程为 _____.

23. 函数 $u = e^z - z + xy$ 在点 $(2, 1, 0)$ 处沿曲面 $e^z - z + xy = 3$ 的法线方向的方向导数为 _____.

24. 设 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 处可微, $u = \frac{i - 2j}{\sqrt{5}}, v = \frac{-i - j}{\sqrt{2}}$, 若 $\left. \frac{\partial f}{\partial u} \right|_{P_0} = 0, \left. \frac{\partial f}{\partial v} \right|_{P_0} = 1$, 则 $d[f(x, y)] \Big|_{P_0} =$ _____.

25. 若二元函数 $u(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(-1, 1)$ 处沿 $l = (\cos \theta, \sin \theta)$ 的变化率为零, $\pi < \theta < 2\pi$, 则 $\theta =$ _____.

26. 设一直线经过点 $P(1, 0, 1)$ 且与已知直线 $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{1}$ 垂直相交, 则交点的坐标为 _____.

27. 通过点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0)$, 且与圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2$ 的交线为抛物线的平面方程为 _____.

28. 设曲线 Γ 位于曲面 $z = x^2 + y^2$ 上, Γ 在 xOy 坐标面上的投影方程为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y = 2, \\ z = 0, \end{cases}$ 则曲线 Γ 在点 $(1, -1, 2)$ 处的切线方程为 _____.

29. 设一平面过原点及点 $M(4, -1, 2)$, 且与平面 $6x - 3y + 2z = 0$ 垂直, 求此平面方程.

30. 求直线 $L: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{3} = z+1$ 绕直线 $L_1: \begin{cases} x = 2, \\ y = 3 \end{cases}$ 旋转一周所成的曲面方程.

31. 设直线 L 在 yOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases} 2y - 3z = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ 在 xOz 平面上的投影直线为 $\begin{cases} x + z = 2, \\ y = 0, \end{cases}$ 求直线 L 在 xOy 平面上的投影直线方程.

32. 设 n 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数 $u = \frac{1}{z}(6x^2 + 8y^2)^{\frac{1}{2}}$ 在此处沿方向 n 的方向导数.

33. 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5}{(y-x^2)^2 + x^6}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$ 求使方向导数 $\left. \frac{df}{d\tau} \right|_{(0,0)}$ (方向 $\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha), \alpha \in [0, 2\pi)$) 最大和最小时 α 的值.

34. 确定常数 λ , 使得在右半平面 $x > 0$ 上的向量

$$A(x, y) = 2xy(x^4 + y^2)^{\lambda} i - x^2(x^4 + y^2)^{\lambda} j$$

为某个二元函数 $u(x, y)$ 的梯度, 并求 $u(x, y)$ 的表达式.



巩固提高

1. 设有曲面 Σ 为 $z = x + f(y - z)$, 其中函数 $f(u)$ 可导, 则该曲面上任意一点 (x, y, z) 处的切平面的法向量 $\mathbf{n}$ 与向量 $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ 的夹角 θ 为().

- (A) $\frac{\pi}{2}$ (B) $\frac{\pi}{3}$ 或 $\frac{2\pi}{3}$ (C) $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ (D) 0 或 π

2. 设三元函数 $u = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 3z^2}$, 点 $M(0, 0, 0)$, 始于点 M 的单位向量 $\mathbf{l} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$. 考虑点 M 处的偏导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M$ 与方向导数 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M$, 则().

- (A) $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M$ 与 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M$ 都存在 (B) $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M$ 与 $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M$ 都不存在
(C) $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M$ 存在, $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M$ 不存在 (D) $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_M$ 不存在, $\left. \frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}} \right|_M$ 存在

3. 设可微函数 $f(u, v)$ 满足 $f(x - y, x + e^y) = x^2 - y^2$, 则 $f(u, v)$ 在点 $(1, 2)$ 处的方向导数的最大值等于().

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

4. 曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = 4$ 上任一点的切平面在三个坐标轴上的截距的平方和为().

- (A) 48 (B) 64 (C) 36 (D) 16

5. 以下 4 个平面方程: ① $7x + 5y + 2z + 10 = 0$, ② $-7x - 5y + 2z - 10 = 0$, ③ $7x - y + 14z + 26 = 0$, ④ $x - 7y + 14z - 26 = 0$, 是平面 $x + 2y - 2z + 6 = 0$ 和平面 $4x - y + 8z - 8 = 0$ 的夹角的平分面方程的是().

- (A) ①② (B) ②③ (C) ②④ (D) ①④

6. 求经过直线 $L: \frac{x-6}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{2z-1}{-2}$ 且与椭球面 $\Sigma: x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 相切的切平面方程.

7. 设有空间直线 $L: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$ 和平面 $\pi: x - y + 2z - 1 = 0$, 求:

- (1) 直线 L 在平面 π 上的投影直线 L_0 的方程;
(2) 投影直线 L_0 绕 y 轴旋转一周所成的旋转曲面方程 $F(x, y, z) = 0$.

8. 设有直线 $L: \begin{cases} 2x + y = 0, \\ 4x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$ 和曲线 $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6, \\ x + y + z = 0. \end{cases}$

- (1) 求曲线 C 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线和法平面方程;
(2) 求通过直线 L 且与平面 $x - z = 0$ 垂直的平面方程.

9. 设在平面区域 D 上数量场 $u(x, y) = 50 - x^2 - 4y^2$, 问在点 $P_0(1, -2) \in D$ 处沿什么方向时 $u(x, y)$ 升高最快, 并求一条路径, 使从点 $P_0(1, -2)$ 处出发沿这条路径 $u(x, y)$ 升高最快.

10. 求常数 a, b, c 的值, 使函数

$$f(x, y, z) = axy^2 + byz + cx^3z^2$$

在点 $(1, 2, -1)$ 处沿 z 轴正向的方向导数有最大值 64.

第 18 章 多元函数积分学

强化训练



1. 设 $I_1 = \iiint_{\Omega} (x^3 + \cos^2 y + z) dv$, $I_2 = \iiint_{\Omega} (x^3 + \sin y + z) dv$, $I_3 = \iiint_{\Omega} (x^3 - \cos^2 y + z^3) dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$, 则下列命题正确的是().

(A) $I_1 < I_2 < I_3$

(B) $I_3 < I_1 < I_2$

(C) $I_2 < I_3 < I_1$

(D) $I_3 < I_2 < I_1$

2. 设 $\Omega_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, $\Omega_2 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 0\}$, 且 $I_1 = \iiint_{\Omega_1} xyz^2 e^{xyz} dv$, $I_2 = \iiint_{\Omega_2} xyz^2 e^{xyz} dv$, 则().

(A) $I_1 = I_2$

(B) $I_1 < I_2$

(C) $I_1 > I_2$

(D) 以上结论都不对

3. 设 L 是星形线: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$, 则 $\oint_L (x^{\frac{4}{3}} + y^{\frac{4}{3}}) ds = ()$.

(A) $2a^{\frac{7}{3}}$

(B) $4a^{\frac{7}{3}}$

(C) $2a^3$

(D) $4a^3$

4. 设 $\widehat{AB}$ 为曲线 $y = x^2$ 上自点 $A(-1, 1)$ 到点 $B(1, 1)$ 的弧段.

$$I_1 = \int_{\widehat{AB}} (x^3 y + y^2) ds, I_2 = \int_{\widehat{AB}} xy^2 ds, I_3 = \int_{\widehat{AB}} (xy - y^2) ds,$$

则().

(A) $I_1 > I_2 > I_3$

(B) $I_2 > I_3 > I_1$

(C) $I_3 > I_1 > I_2$

(D) $I_1 > I_3 > I_2$

5. 设 $f(x)$ 为 x 的连续奇函数, $g(x)$ 为 x 的连续偶函数, 点 $A(1, 1)$, $B(-1, -1)$, $\widehat{AB}$ 为曲线 $y = x^3$ 上的弧段, 则().

(A) $\int_{\widehat{BO}} f(x)g(y) ds = \int_{\widehat{OA}} f(x)g(y) ds$

(B) $\int_{\widehat{BO}} f(x)g(y) ds = -\int_{\widehat{OA}} f(y)g(x) ds$

(C) $\int_{\widehat{BO}} f(y)g(x) ds = \int_{\widehat{OA}} f(y)g(x) ds$

(D) $\int_{\widehat{BO}} f(y)g(x) ds = -\int_{\widehat{OA}} f(y)g(x) ds$

6. 在力场 $\mathbf{F} = \left(-\frac{1}{y}, \frac{x}{y^2}\right)$ 中将质点从点 $A(1, 2)$ 沿曲线 $L: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ 顺时针方向移动到点 $B(2, 1)$ 所做的功为().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{3}{2}$ (D) $-\frac{3}{2}$

7. 设 $f(t)$ 具有连续导函数, 且 $f(t)$ 在 $[0, 4]$ 上的平均值为 $a (a \neq 0)$, 又 L 为曲线 $y = \sqrt{2x - x^2}$, 起点为 $O(0, 0)$, 终点为 $A(2, 0)$, 则 $\int_L f(x^2 + y^2)(xdx + ydy) = (\quad)$.

- (A) 0 (B) a (C) $2a$ (D) $4a$

8. 设曲线积分 $\int_L [f(x) - e^x] \sin y dx - f(x) \cos y dy$ 与路径无关, 其中 $\cos y \neq 0$, $f(x)$ 具有一阶连续导数, 且 $f(0) = 0$, 则 $f(x) = (\quad)$.

- (A) $\frac{1}{2}(e^{-x} - e^x)$ (B) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$
(C) $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) - 1$ (D) $1 - \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$

9. 设 L 是摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 从 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段, 则 $\int_L \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = (\quad)$.

- (A) $-\pi$ (B) π (C) 2π (D) -2π

10. 设 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 1)$, 则曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS = (\quad)$.

- (A) $\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ (B) $\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ (C) $\sqrt{2}\pi$ (D) π

11. 设曲面 $\Sigma: |x| + |y| + |z| = 1$, Σ_1 是 Σ 在第一卦限中的部分, 则有 $(\quad)$.

- (A) $\oiint_{\Sigma} (x \sin y + |z|) dS = 8 \iint_{\Sigma_1} (xy + z) dS$
(B) $\oiint_{\Sigma} (y \sin z + |x|) dS = 8 \iint_{\Sigma_1} (yz + x) dS$
(C) $\oiint_{\Sigma} (z \sin x + |y|) dS = 8 \iint_{\Sigma_1} (zx + y) dS$
(D) $\oiint_{\Sigma} [\sin(xyz) + |xyz|] dS = 8 \iint_{\Sigma_1} xyz dS$

12. 设 Σ 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2} (0 \leq z \leq 2)$, 取下侧, 则 $\iint_{\Sigma} dydz + 2dzdx + 3dxdy = (\quad)$.

- (A) 6π (B) -6π (C) 12π (D) -12π

13. 设 $f(u)$ 为可导函数, 且 $f(0) = 0, f'(0) = 1, F(t) = \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dv (t > 0)$.

若当 $t \rightarrow 0^+$ 时, $F(t)$ 是 at^n 的等价无穷小, 则常数 a, n 的值分别为 $(\quad)$.

- (A) $\pi, 4$ (B) $\frac{\pi}{2}, 4$ (C) $\frac{4}{5}\pi, 5$ (D) $\frac{2}{5}\pi, 5$

14. $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{\frac{y}{2}} \frac{\cos z}{(2z-1)^2} dz = \underline{\hspace{2cm}}$.

15. 空间曲面 $z = xy$ 被圆柱体 $x^2 + y^2 \leq 1$ 所截部分的面积 $A = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 l 为圆周 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x + y + z = a \end{cases} (a > 0)$, 则空间第一型曲线积分 $\oint_l x^2 ds =$ _____.

17. 设曲线 L 为上半圆周 $y = \sqrt{1-x^2}$, 则曲线积分 $\int_L (x^2 + y^2) ds =$ _____.

18. 设 $f(x)$ 为连续函数, Ω 是由球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 围成的空间闭区域, 则三重积分 $\iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) f(x) dx dy dz$ 的定积分形式为 _____.

19. 设曲线 $\Gamma: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt (0 \leq t \leq 2\pi)$, 则 $\int_{\Gamma} (x^2 + y^2) ds =$ _____.

20. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 外侧在第一卦限的部分, 则 $\iint_{\Sigma} z^2 dx dy =$ _____.

21. 设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2 (a > 0)$ 的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} xy^2 dy dz + yz^2 dz dx + zx^2 dx dy =$ _____.

22. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 被锥面 $z = \sqrt{Ax^2 + By^2}$ 截下的小的那部分, 并设其中 A, B, R 均为正常数且 $A \neq B$, 则第一型曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS =$ _____.

23. 设 Σ 是 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 1$ 所割下的有限部分, 则 $\iint_{\Sigma} |xyz| dS =$ _____.

24. 设 Σ 为球面 $(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3$, 则 $\oiint_{\Sigma} (x^2 + 2y^2 + 3z^2) dS =$ _____.

25. 微分方程 $(2xy + e^x \sin y) dx + (x^2 + e^x \cos y) dy = 0$ 的通解为 _____.

26. 设 $\Gamma: \begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 3, \\ x + y + z = 3, \end{cases}$ 则 $\oint_{\Gamma} (x^2 + y^2 + z^2) ds =$ _____.

27. 设曲线 $\Gamma: \begin{cases} y - z = 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1, \end{cases}$ 从 z 轴正向看去, Γ 沿逆时针方向, 则 $\oint_{\Gamma} xyz dz =$ _____.

28. 设 L 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线, 则 $\oint_L (y^2 - 2x - 2y - 2z) ds =$ _____.

29. 计算 $I = \iiint_{\Omega} (x + y + z)^2 dx dy dz$, 其中 $\Omega: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 (a > 0, b > 0, c > 0)$.

30. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} \frac{x + y + 1}{(x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2} dx dy dz$, 其中 Ω 是由曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 1$ 所围成的空间闭区域.

31. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} |x^2 + y^2 + z^2 - 1| dv$, 其中 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

32. 求 $\iiint_{\Omega} (x + y + z) dx dy dz$, 其中 Ω 为 $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ 与 $z = 1$ 所围成的区域.

33. 计算 $\iiint_{\Omega} z^2 dx dy dz$, 其中 Ω 为 $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2R^2 (R > 0)$ 重合的区域.

34. 设 $\Omega = \{(x, y, z) | z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq \sqrt{3}z, 0 \leq z \leq 4\}$, 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} z dv$.

35. 计算三重积分 $\iiint_{\Omega} (x\sqrt{1-z^2} + y\sqrt{1-x^2} + z\sqrt{1-y^2}) dv$, 其中 Ω 由平面 $y=1$, 圆柱面 $x^2+z^2=1$ 和半球面 $y=-\sqrt{1-x^2-z^2}$ 围成, 如图 1-18-1 所示.

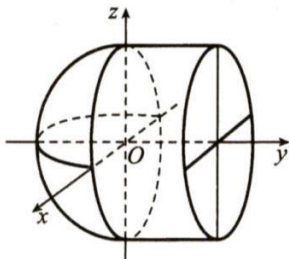


图 1-18-1

36. 求曲面 $z=2(x^2+y^2)$, $x^2+y^2=x$, $x^2+y^2=2x$ 和 $z=0$ 所围几何体的体积.
 37. 求曲面 $\Sigma: (x^2+y^2+z^2)^2 = a^2(x^2+y^2-z^2)$ (常数 $a>0$) 围成的立体在第一卦限部分 Ω 的体积.
 38. 设连续函数 $f(u)$ 满足 $f(0)=0$, $f'(0)=1$, 求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{t^5} \iiint_{\Omega_t} f(x^2+y^2+z^2) dv,$$

其中 $\Omega_t = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{t^2-x^2-y^2}\} (t>0)$.

39. 设 Σ 为平面 $y+z=5$ 被柱面 $x^2+y^2=25$ 所截得的部分, 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x+y+z) dS$.

40. 计算 $\iint_{\Sigma} x^2 dS$, 其中 Σ 为圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ ($a>0$) 介于 $z=0$ 和 $z=h$ 之间的部分.

41. 计算曲线积分 $\oint_L \frac{ydx - xdy}{2(x^2+y^2)}$, 其中 $L: (x-1)^2+y^2=2$, 其方向为逆时针方向.

42. 计算曲线积分

$$\int_L \left(\frac{xy^2}{\sqrt{4+x^2y^2}} + \frac{1}{\pi} x \right) dx + \left(\frac{x^2y}{\sqrt{4+x^2y^2}} - x + y \right) dy,$$

其中 L 是摆线 $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} (a>0)$ 上自点 $O(0,0)$ 至点 $A(2\pi a, 0)$ 的一段有向曲线弧.

43. 计算 $\int_{\widehat{AB}} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy$, 其中 $\widehat{AB}$ 是自点 $A(-1,0)$ 沿 $y=x^2-1$ 到点 $B(2,3)$ 的弧段.

44. 设函数 $u=u(x)$ ($x>0$) 可导, 且 $u(1)=1$. 已知曲线积分

$$\int_L (x+4y)u(x)dx + [2x+u^3(x)]u(x)dy$$

在右半坐标平面内与路径无关, 求 $\int_{(1,0)}^{(8,1)} (x+4y)u(x)dx + [2x+u^3(x)]u(x)dy$.

45. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{5} = 1$, 其周长为 a , 求 $\oint_L (4xy + 5x^2 + 3y^2) ds$.

46. 求 $\oint_L x^2 ds$, 其中 L 为 $x^2+y^2=a^2$ ($a>0$).

47. 计算 $I = \oint_L e^{\sqrt{x^2+y^2}} ds$, 其中 L 为由圆周 $x^2+y^2=a^2$ ($a>0$) 及直线 $y=x$ 和 $y=0$ 在第一

象限内所围成的区域的边界.

48. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)^2 dS$, 其中 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

49. 计算 $\iint_{\Sigma} \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$, 其中 Σ 为平面 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ 在第一卦限的部分.

50. 在过点 $O(0,0)$ 和 $A(\pi,0)$ 的曲线族 $y = a \sin x (a > 0)$ 中, 求一条曲线 L , 使沿该曲线从 O 到 A 的积分 $I = \int_L (1 + y^3) dx + (2x + y) dy$ 的值最小.

51. 证明

$$\oint_{\Gamma} x f(y) dy - \frac{y}{f(x)} dx \geq 2\pi,$$

其中 Γ 为圆周曲线 $(x-a)^2 + (y-a)^2 = 1$ 正向, $f(x)$ 是正值的连续函数.

52. (1) 设函数 $f(x)$ 具有一阶连续导数, $f(x) \geq 0$ 且 $f(1) = 1$, D 为不包含原点的单连通区域, 在 D 内曲线积分 $\int_L \frac{y dx - x dy}{2x^2 + f(y)}$ 与路径无关, 求 $f(y)$;

(2) 在(1)的条件下, 求 $\oint_{L'} \frac{y dx - x dy}{2x^2 + f(y)}$, 其中 L' 为曲线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}, a > 0$, 且取逆时针方向.

53. 求 $\oint_L |y| dx + |x| dy$, 其中 L 是以 $A(1,0), B(0,1), C(-1,0)$ 为顶点的三角形的正向边界曲线.

54. 计算曲面积分 $I = \iint_{\Sigma} (x^3 + az^2) dy dz + (y^3 + ax^2) dz dx + (z^3 + ay^2) dx dy$, 其中 Σ 为上半球面 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, $a > 0$.

55. 计算 $I = \iint_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy$, 其中 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4 (x + y + z \geq \sqrt{3})$, 取上侧.

56. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} \frac{ax dy dz + (z+a)^2 dx dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}}$, 其中 Σ 为下半球面 $z = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 的上侧, a 为大于零的常数.

巩固提高



1. 设 L 为第一卦限内沿曲线 $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ 从 $A(0,0,2)$ 到 $B(2,0,0)$ 的一段弧(见图 1-18-2), 则 $I = \int_L y dx - y(x-1) dy + y^2 z dz = ()$.

(A) $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}$

(B) $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}$

(C) $\frac{2}{3} - \frac{\pi}{2}$

(D) $\frac{1}{3} - \frac{\pi}{4}$

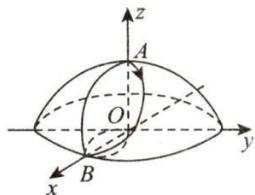


图 1-18-2

2. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 的上半部分, Σ_+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ 的上半部分并且其法向量 $\mathbf{n}$ 与 z 轴正向的夹角 γ 满足 $0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}$, 则下列四组积分中, 同一组的两个积分均为零的是().

- (A) $\iint_{\Sigma} y dS, \iint_{\Sigma_+} x dy dz$ (B) $\iint_{\Sigma} x dS, \iint_{\Sigma_+} y dz dx$
(C) $\iint_{\Sigma} xy dS, \iint_{\Sigma_+} x^2 dy dz$ (D) $\iint_{\Sigma} z dS, \iint_{\Sigma_+} y dx dy$

3. 设函数 $f(t)$ 连续, 且 $\int_0^{2x+3y+1} f(t) dt = 4x^2 + 9y^2 + 12xy - 2$, 并设起点 $O(0,0)$, 终点 $A(1,3)$, l 为连接 O 与 A 的逐段光滑曲线, 则 $\int_l xy^2 f(xy) dx + x^2 y f(xy) dy$ 的值().

- (A) 与曲线 l 有关 (B) 为 3
(C) 为 4 (D) 为 9

4. 设 $y' = f(x, y)$ 是一条简单封闭曲线 L (取正向), $f(x, y) \neq 0$, 其所围区域记为 D , D 的面积为 1, 则 $I = \oint_L xf(x, y) dx - \frac{y}{f(x, y)} dy =$ _____.

5. 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上二阶偏导数连续, 且满足 $(f''_{xx} + f''_{yy})e^{x^2+y^2} = 1$, 则 $\iint_D (xf'_x + yf'_y) d\sigma =$ _____.

6. 设函数 $u(x, y)$ 具有连续的一阶偏导数, L 为自点 $O(0,0)$ 沿曲线 $y = \sin x$ 至点 $A(\pi, 0)$ 的有向弧段, 则曲线积分 $\int_L [yu(x, y) + xyu'_x(x, y) + y + x \sin x] dx + [xu(x, y) + xyu'_y(x, y) + e^x - x] dy =$ _____.

7. 设 $u = u(x, y, z)$ 具有二阶连续偏导数, 且满足 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = x^2 + y^2 + z^2$. 又设 Σ 为曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2az (a > 0)$ 的外侧, 则 $\oiint_{\Sigma} \frac{\partial u}{\partial x} dy dz + \frac{\partial u}{\partial y} dz dx + \frac{\partial u}{\partial z} dx dy =$ _____.

8. 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 证明:

$$\int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(x) f(y) f(z) dz = \frac{1}{3!} \left[\int_0^1 f(t) dt \right]^3.$$

9. 计算曲线积分 $I = \int_{\Gamma} y dx + z dy + x dz$, 其中曲线 Γ 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x + z = 1 \end{cases}$ 的第一卦限部分上从点 $A(1, 0, 0)$ 到点 $B(0, 0, 1)$ 的一段有向弧.

10. 在密度 $\rho = 1$ 的半球体 $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} (R > 0)$ 的底面接上一个相同材料的柱体: $-h \leq z < 0, x^2 + y^2 \leq R^2 (h > 0)$, 求 h 的值, 使整个球柱体的重心恰好落在球心.

11. 求抛物柱面 $y = \sqrt{x}$ 被平面 $z = 0, z = y$ 和 $y = 1$ 所截部分的面积.

12. 已知
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

(1) 求 $f''_{xy}(0, 0)$;

(2) 求微分方程 $(y^2 + 6x)y' - 2y = 0$ 满足条件 $x \Big|_{y=1} = f''_{xy}(0, 0)$ 的特解;

(3) 求曲线积分 $\int_L f(x, y) ds$, 其中 L 为 $x^2 + y^2 = 1$ 位于第一象限的部分.

13. 设某曲线 L 的线密度 $\mu = x^2 + y^2 + z^2$, 其方程为

$$x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = \sqrt{2}e^t, -\infty < t \leq 0.$$

(1) 求曲线 L 的弧长 l ;

(2) 求曲线 L 对 z 轴的转动惯量 J ;

(3) 求曲线 L 对位于原点处质量为 m 的质点的引力 (G 为引力常数).

14. 设 $f(x, y, z)$ 为曲面 Σ 上的连续函数, Σ 为平面 $x + y + z = 1$ 位于第一卦限的部分, 且

$$f(x, y, z) = xy + z \iint_{\Sigma} f(x, y, z) dS,$$

求 $f(x, y, z)$.

15. 设 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 4$ 正向一周, 求 $I = \oint_L y^3 dx + |3y - x^2| dy$.

16. 计算曲线积分 $I = \int_L [u'_x(x, y) + xy] dx + u'_y(x, y) dy$, 其中 L 是从点 $A(0, 1)$ 沿曲线 $y = \frac{\sin x}{x}$ 到点 $B(\pi, 0)$ 的曲线段. $u(x, y)$ 在 xOy 平面上具有二阶连续偏导数, 且 $u(0, 1) = 1, u(\pi, 0) = \pi$.

17. 设 $f(x, y)$ 在全平面有连续偏导数, 曲线积分 $\int_L f(x, y) dx + x \cos y dy$ 在全平面与路径无关, 且 $\int_{(0,0)}^{(t,t^2)} f(x, y) dx + x \cos y dy = t^2$, 求 $f(x, y)$.

18. 设函数 $g(x)$ 具有连续二阶导数, 曲线积分

$$\int_L [e^{2x} + g'(x) - 2g(x)] y dx - g'(x) dy$$

与路径无关.

(1) 求满足条件 $g(0) = -\frac{1}{4}, g'(0) = -\frac{1}{2}$ 的函数 $g(x)$;

(2) 利用(1)中的 $g(x)$, 计算 $\int_{(0,0)}^{(1,1)} [e^{2x} + g'(x) - 2g(x)] y dx - g'(x) dy$.

19. 设 $f(x), g(x)$ 二阶导数连续, 且 $f(0) = -2, g(0) = 0$. 对于任意一条逐段光滑的封闭曲线 L , 有

$$\oint_L 2[xf(y) + g(y)] dx + [x^2 g(y) + 2xy^2 + 2xf(y)] dy = 0.$$

(1) 求 $f(x), g(x)$;

(2) 计算 $\int_{(1,1)}^{(0,0)} 2[xf(y) + g(y)] dx + [x^2 g(y) + 2xy^2 + 2xf(y)] dy$.

20. 设 Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 介于三坐标平面间的有限部分, 法向量与 z 轴夹角为锐角, $f(x, y, z)$ 连续, 计算

$$I = \iiint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy dz + [2f(x, y, z) + y] dz dx + [f(x, y, z) + z] dx dy.$$

21. 计算 $I = \oint_{\Sigma} \frac{2dy dz}{x \cos^2 x} + \frac{dz dx}{\cos^2 y} - \frac{dx dy}{z \cos^2 z}$, 其中 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

22. 设函数 $f(x, y, z)$ 在区域 $\Omega = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上具有连续的二阶偏导数, 且满足

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

计算 $I = \iiint_{\Omega} \left(x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} + z \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx dy dz.$

23. 计算曲线积分 $I = \oint_L y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中曲线 L 为 $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4, \\ x^2 + y^2 = 2x \end{cases} (z \geq 0)$, 从 x 轴的正向往负向看去, 取逆时针方向.

24. 设闭曲线 $L: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2z \end{cases}$ 的方向与 z 轴正向满足右手法则, 求曲线积分

$$\oint_L |y - x| dx + z dz.$$

第二篇

线性代数

线性代数是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对线性代数的基本概念、基本理论、基本运算的理解和掌握以及考生的抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想象能力、综合运用能力和解决实际问题的能力。在考研数学一试卷中分值约30分。

第1章 行列式

强化训练



1. 排列 123ijk689 是偶排列, 那么 i, j, k 分别为().

(A) $i = 4, j = 5, k = 7$

(B) $i = 4, j = 7, k = 5$

(C) $i = 7, j = 4, k = 5$

(D) $i = 5, j = 7, k = 4$

2.
$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{vmatrix} = ().$$

(A) 240

(B) 480

(C) -240

(D) -480

3. n 阶行列式 $D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & a & b & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$ 的值为().

(A) $(-1)^{\frac{n-1}{2}} a^n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} b^n$

(B) $(-1)^{\frac{n+n+2}{2}} a^n + (-1)^{\frac{n+1}{2}} b^n$

(C) $(-1)^{\frac{n-n+4}{2}} a^n + (-1)^{\frac{n-3n+2}{2}} b^n$

(D) $(-1)^{\frac{n-3n+2}{2}} a^n + (-1)^{\frac{n-n+4}{2}} b^n$

4. 多项式 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 2x & -x & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ 的常数项是().

(A) 1

(B) -2

(C) 3

(D) 4

5. 行列式 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b_n \end{vmatrix}$ 的值为().

(A) $\sum_{i=1}^n a_i b_i$

(B) $-\sum_{i=1}^n a_i b_i$

(C) $(-1)^n \sum_{i=1}^n a_i b_i$

(D) $(-1)^{n+1} \sum_{i=1}^n a_i b_i$

6. 设 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = m, c \neq 0$, 则 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}c & a_{13}c^2 & a_{14}c^3 \\ a_{21}c^{-1} & a_{22} & a_{23}c & a_{24}c^2 \\ a_{31}c^{-2} & a_{32}c^{-1} & a_{33} & a_{34}c \\ a_{41}c^{-3} & a_{42}c^{-2} & a_{43}c^{-1} & a_{44} \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $c^{-2}m$ (B) m (C) cm (D) c^3m

7. 设 A 是 3 阶方阵, 满足 $|3A + 2E| = 0, |A - E| = 0, |3E - 2A| = 0$, 则 $|A| = (\quad)$.

(A) 2

(B) 1

(C) -1

(D) -2

8. 设 A 是 $n (n \geq 2)$ 阶方阵, $|A| = 3$, 则 $|(A^*)^*| = (\quad)$.

(A) $3^{(n-1)^2}$ (B) 3^{n^2-1} (C) 3^{n^2-n} (D) 3^{n-1}

9. 设 $f(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$ ($a_1, a_2, \dots, a_n$ 为互不相同的正实数, $n > 2$), 则方程

$f'(x) = 0$ 的实根个数为 $(\quad)$.

(A) 1

(B) $n-1$ (C) n (D) $n+1$

10. 设 $a, b, a+b$ 均非零, 则行列式 $\begin{vmatrix} a & b & a+b \\ b & a+b & a \\ a+b & a & b \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

11. 设 3 阶矩阵 A 的伴随矩阵为 A^* , 且 $|A| = \frac{1}{2}$, 则 $|A^{-1} + 2A^*| = \underline{\hspace{2cm}}$.

12. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix}$, 则 $|A^{-1}B^* - A^*B^{-1}| = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 设 A 是 n 阶矩阵, α, β 是 n 维列向量, a, b, c 是实数, 已知 $|A| = a$, $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & b \end{vmatrix} = 0$, 则 $\begin{vmatrix} A & \alpha \\ \beta^T & c \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

14. 计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & x & y & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}.$$

15. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1+x \\ 1 & 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1+y & 1 & 1 \\ 1-y & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

16. 计算 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}.$$

17. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} x+1 & x & x & \cdots & x \\ x & x+\frac{1}{2} & x & \cdots & x \\ x & x & x+\frac{1}{3} & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \cdots & x+\frac{1}{n} \end{vmatrix}.$$

巩固提高



1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 n 维列向量, $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$, $B = [\alpha_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}]$. 若 $|A| = 1$, 则 $|A - B| = (\quad)$.

- (A) $1 + (-1)^n$ (B) $1 + (-1)^{n+1}$ (C) $(-1)^n$ (D) 0

2. 设多项式函数 $f(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & 2 & 3 \\ 2 & x+1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & x & 4 \\ 5 & 1 & 0 & x-1 \end{vmatrix}$, 则 $f(x)$ 的四阶导数 $f^{(4)}(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 行列式 $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a^n & (a+1)^n & \cdots & (a+n)^n \\ a^{n-1} & (a+1)^{n-1} & \cdots & (a+n)^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a+1 & \cdots & a+n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. 行列式 $\begin{vmatrix} 1-x & x & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-x & x & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-x & x & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-x & x \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. 设 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix},$$

则 $\sum_{i=1}^n D_i = \underline{\hspace{2cm}}$.

6. 设 $D_n = \begin{vmatrix} a+2 & 2a & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+2 & 2a & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+2 & 2a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+2 \end{vmatrix}$, 则 $n \geq 3$ 时, $\frac{D_n - aD_{n-1}}{D_{n-1} - aD_{n-2}} = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 计算 $|A_n| = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 6 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

8. $D_{n+1} = \begin{vmatrix} a & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ ax & a & -1 & \cdots & 0 \\ ax^2 & ax & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ ax^n & ax^{n-1} & ax^{n-2} & \cdots & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

9. 设 A 为奇数阶矩阵, 且 $AA^T = A^T A = E$, $|A| > 0$, 则 $|A - E| = \underline{\hspace{2cm}}$.

10. 计算行列式 $\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{vmatrix}$.

第2章 余子式和代数余子式的计算

强化训练



1. 已知 $D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} (n > 2)$, 则 $A_{11} + A_{12} + \cdots + A_{1n} = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $|A|$ 的所有元素的代数余子式之和.

3. $|A|$ 是 n 阶行列式, 其中有一行(列)元素全是 1, 证明: 这个行列式全部元素的代数余子式的和等于该行列式的值.

巩固提高



1. 设 A 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $a_{ij} = A_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$, 其中 A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式, 则下列结论中:

- ① A 是可逆矩阵; ② A 是对称矩阵; ③ A 是不可逆矩阵; ④ A 是正交矩阵.
正确的个数为().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

2. 设 $D = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$, 则其第 4 行各元素的余子式之和的值为().

(A) 28

(B) -28

(C) 20

(D) -29

3. 已知 3 阶方阵 A 的特征值为 $1, -2, 3$, 则 A 的行列式 $|A|$ 中元素 a_{11}, a_{22}, a_{33} 的代数余子式的和 $A_{11} + A_{22} + A_{33} = (\quad)$.

(A) 6

(B) -5

(C) -2

(D) 3

4. 设 $n(n > 1)$ 阶行列式 $|A| = 4$, A 中各列元素之和均为 2, 记 A 的元素 a_{ij} 的代数余子式为 A_{ij} , 则 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} = \underline{\hspace{2cm}}$.

第3章 矩阵运算

强化训练



1. 设 A, B, C 均为 n 阶矩阵, E 为单位矩阵, 若 $B = E + AB, C = A + CA$, 则 $B - C = (\quad)$.

- (A) E (B) $-E$ (C) A (D) $-A$

2. A 为 3 阶矩阵, 将 A 的第二列加到第一列得矩阵 B , 再交换 B 的第二行与第三行得单位矩阵, 记

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则 $A^{-1} = (\quad)$.

- (A) $P_1 P_2$ (B) $P_1^{-1} P_2$ (C) $P_2 P_1$ (D) $P_2 P_1^{-1}$

3. 设 n 阶矩阵 A 与 B 等价, 则下列命题错误的是().

- (A) 存在可逆矩阵 P 和 Q , 使得 $PAQ = B$
 (B) 若 A 与 E 等价, 则 B 可逆
 (C) 若 $|A| \neq 0$, 则存在可逆矩阵 P , 使得 $PB = E$
 (D) 若 $|A| > 0$, 则 $|B| > 0$

4. 设 E 是 n 阶单位矩阵, $E + A$ 是 n 阶可逆矩阵, 则下列关系式中不恒成立的是().

- (A) $(E - A)(E + A)^2 = (E + A)^2(E - A)$
 (B) $(E - A)(E + A)^T = (E + A)^T(E - A)$
 (C) $(E - A)(E + A)^{-1} = (E + A)^{-1}(E - A)$
 (D) $(E - A)(E + A)^* = (E + A)^*(E - A)$

5. 设 A 为 n 阶可逆矩阵, 则下列等式中, 不一定成立的是().

- (A) $(A + A^{-1})^2 = A^2 + 2AA^{-1} + (A^{-1})^2$ (B) $(A + A^T)^2 = A^2 + 2AA^T + (A^T)^2$
 (C) $(A + A^*)^2 = A^2 + 2AA^* + (A^*)^2$ (D) $(A + E)^2 = A^2 + 2AE + E^2$

6. 设 n 维行向量 $\alpha = \left[\frac{1}{2}, 0, \dots, 0, \frac{1}{2} \right]$, 矩阵 $A = E - \alpha^T \alpha, B = E + 2\alpha^T \alpha$, 则 $AB = (\quad)$.

- (A) O (B) $-E$ (C) E (D) $E + \alpha^T \alpha$

7. 设 α, β 为 n 维单位列向量, P 是 n 阶可逆矩阵, 则下列矩阵中可逆的是().

- (A) $A = E - \alpha \alpha^T$ (B) $B = \alpha^T P \alpha P^{-1} - \alpha \alpha^T$
 (C) $C = \alpha^T P^{-1} \beta P - \beta \alpha^T$ (D) $D = E + \beta \beta^T$

8. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} + a_{11} & a_{32} + a_{12} & a_{33} + a_{13} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

则必有().

(A) $AP_1P_2 = B$

(B) $AP_2P_1 = B$

(C) $P_1P_2A = B$

(D) $P_2P_1A = B$

9. 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{bmatrix},$$

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

其中 A 可逆, 则 B^{-1} 等于().

(A) $A^{-1}P_1P_2$

(B) $P_1A^{-1}P_2$

(C) $P_1P_2A^{-1}$

(D) $P_2A^{-1}P_1$

10. 设 A, B 均为 3 阶矩阵, 将 A 的第二行加到第三行得到矩阵 C , 将 B 的第一列的 -3 倍加到第三列得到矩阵 D , 已知 $CD = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 则 $AB =$ ().

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

11. 设 $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $A = E + B + B^2 + B^3$, 则 $A^{-1} =$ _____.

12. 设 A, Λ, P 为 4 阶矩阵, 其中 P 可逆, $\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $A = P^{-1}\Lambda P$, 则 $A^{10} =$ _____.

13. 设 A 为实对称矩阵, 若 $A^2 = O$, 则 $A =$ _____.

14. 设 A 是 3 阶矩阵, 满足 $A^2 = A$, 则 $(A + 3E)^{-1} =$ _____.

15. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = (E + A)^{-1}(E - A)$, 则 $(E + B)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

16. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -3 & -2 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $A^2(BA)^*(AB^{-1})^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

17. 设 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$, 则 $(A^*)^{-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

18. 设 n 阶矩阵 A, B 满足 $A^2 = A, B^2 = B, (A + B)^2 = A + B$. 证明: $AB = O$.

19. 设 A, B, C, D 为 n 阶矩阵, 若 $ABCD = E$, 证明:

(1) A, B, C, D 均为可逆矩阵;

(2) $BCDA = CDAB = E$.

20. 设 A, B 为 n 阶矩阵, E 为 n 阶单位矩阵.

(1) 计算 $\begin{bmatrix} E & E \\ O & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ B & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & -E \\ O & E \end{bmatrix}$;

(2) 利用(1)的结果证明 $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} = |A + B| |A - B|$.

21. 已知 $E_2(3)AE_{12}E_{13}(-1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, 其中 $E_2(3), E_{12}, E_{13}(-1)$ 均为 3 阶初等矩阵, 求

矩阵 A .

22. 设 A 为 4 阶可逆矩阵, 若将矩阵 A 的第二、三列交换位置, 再将第四列乘 -2 加至第二列, 得到矩阵 B , 求 $B^{-1}A$.

23. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 $A^n (n \geq 3)$.

24. 已知 n 阶方阵 A 满足矩阵方程 $A^2 - 3A - 2E = O$. 证明 A 可逆, 并求出其逆矩阵 A^{-1} .

25. 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$ ($a_1 a_2 \cdots a_n \neq 0, n \geq 3$), 求:

(1) 矩阵 A 的所有元素的代数余子式之和;

(2) 矩阵 X , 使得 $AXA^* = A^* + |A|E$.

26. 设 A, B 均是 n 阶矩阵, 且 $AB = A + B$. 证明 $A - E$ 可逆, 并求 $(A - E)^{-1}$.

27. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $X = AX + B$, 求 X .

28. 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 A 满足 $(2E - C^{-1}B)A^T = C^{-1}$, 求

矩阵 A .

巩固提高



1. 设 A 是 n 阶矩阵, 则下列说法错误的是().

- (A) 对任意的 n 维列向量 ξ , 有 $A\xi = 0$, 则 $A = O$
 (B) 对任意的 n 维列向量 ξ , 有 $\xi^T A\xi = 0$, 则 $A = O$
 (C) 对任意的 n 阶矩阵 B , 有 $AB = O$, 则 $A = O$
 (D) 对任意的 n 阶矩阵 B , 有 $B^T AB = O$, 则 $A = O$

2. 设 A 是 3 阶可逆矩阵, 把 A 的第 1 列的 2 倍加到第 2 列得到 B , A^* , B^* 分别是 A, B 的伴随矩阵, 则 B^* 可由().

- (A) A^* 的第 1 行的 -2 倍加到第 2 行得到
 (B) A^* 的第 2 行的 -2 倍加到第 1 行得到
 (C) $-A^*$ 的第 1 行的 -2 倍加到第 2 行得到
 (D) $-A^*$ 的第 2 行的 -2 倍加到第 1 行得到

3. 设 n 阶实矩阵 $A = (a_{ij})$, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式, $|a_{ij}|$, $|A_{ij}|$ 分别表示两个表达式的绝对值, 则下列结论不正确的是().

- (A) 若 $|A| = 1$ 且对任意 i, j 均有 $a_{ij} = -A_{ij}$, 则 A 为正交矩阵
 (B) 若 $|A| = -1$ 且对任意 i, j 均有 $a_{ij} = -A_{ij}$, 则 A 为正交矩阵
 (C) 若 A 为正交矩阵且 $|A| = 1$, 则对任意 i, j , 有 $|a_{ij}| = |A_{ij}|$
 (D) 若 A 为正交矩阵且 $|A| = -1$, 则对任意 i, j , 有 $|a_{ij}| = |A_{ij}|$

4. 已知 A 是 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵, 且 $A^3 = E$, 则 $\begin{bmatrix} O & -E \\ A & O \end{bmatrix}^{98} = ()$.

- (A) $\begin{bmatrix} A & E \\ O & A \end{bmatrix}$ (B) $\begin{bmatrix} A & O \\ E & A \end{bmatrix}$ (C) $\begin{bmatrix} A & O \\ O & A \end{bmatrix}$ (D) $\begin{bmatrix} -A & O \\ O & -A \end{bmatrix}$

5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, 且 $AB = A + B$, 则下列命题中:

- ① 若 A 可逆, 则 B 可逆; ② 若 $A + B$ 可逆, 则 B 可逆;
 ③ 若 B 可逆, 则 $A + B$ 可逆; ④ $A - E$ 恒可逆.

正确的个数为().

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

6. 设 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$, 其中 a, b, c 为实数, 则下列选项中, 不能使得 $A^{100} = E$ 的是().

- (A) $a = 1, b = 2, c = -1$ (B) $a = 1, b = -2, c = -1$
 (C) $a = -1, b = 2, c = 1$ (D) $a = -1, b = 2, c = -1$

7. 已知 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^4$, 则 $A^{-1} =$ _____.

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 X 满足 $A^* X = A^{-1} + 2X$, 则 $X^* =$ _____.

9. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 已知 $E_m + AB$ 可逆.

(1) 验证 $E_n + BA$ 可逆, 且 $(E_n + BA)^{-1} = E_n - B(E_m + AB)^{-1}A$;

(2) 设 $W = \begin{bmatrix} 1+a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & 1+a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & 1+a_3b_3 \end{bmatrix}$, 其中 $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$. 证明 W 可逆, 并求 W^{-1} .

10. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 证明当 $n \geq 3$ 时, 有 $A^n = A^{n-2} + A^2 - E$; (2) 求 A^{100} .

11. 已知 $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$, 求 $A^n (n \geq 2)$.

12. 已知 $\alpha = [1, 2, 3]$, $\beta = \left[1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right]$, $A = \alpha^T \beta$, 若 A 满足方程 $A^3 - 2\lambda A^2 - \lambda^2 A = O$, 求解其中 λ 的取值.

13. 设 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T \neq 0$, $\beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T \neq 0$, 且 $\alpha^T \beta = 0$, $A = E + \alpha \beta^T$, 计算:

(1) $|A|$; (2) A^n ; (3) A^{-1} .

14. 设 A 是主对角元素为 0 的 4 阶实对称矩阵, E 是 4 阶单位矩阵, $B = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 2 & \\ & & & 2 \end{bmatrix}$, 且 $E + AB$

是不可逆的对称矩阵, 求 A .

第4章 矩阵的秩

强化训练



1. 已知 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = r < \min\{m, n\}$, 则 A 中().

- (A) 没有等于零的 $r-1$ 阶子式, 至少有一个不为零的 r 阶子式
- (B) 有不为零的 r 阶子式, 所有 $r+1$ 阶子式全为零
- (C) 有等于零的 r 阶子式, 没有不等于零的 $r+1$ 阶子式
- (D) 所有 r 阶子式不等于零, 所有 $r+1$ 阶子式全为零

2. 已知 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & t \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$, P 为 3 阶非零矩阵, 且满足 $PQ = O$, 则().

- (A) 当 $t = 6$ 时, P 的秩必为 1
- (B) 当 $t = 6$ 时, P 的秩必为 2
- (C) 当 $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 1
- (D) 当 $t \neq 6$ 时, P 的秩必为 2

3. 求矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & b \\ 2 & 3 & a & 4 \\ 3 & 5 & 1 & 7 \end{bmatrix}$ 的秩, 其中 a, b 为参数.

4. 设 3 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} a & b & -3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b-1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, 已知 $r(AB) < r(A)$, $r(AB) < r(B)$, 求 a ,

b 的值与 $r(AB)$.

5. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 且 $\sum_{j=1}^n a_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, n$, 求 $r(A^*)$ 及 A^* 的表示形式.

巩固提高



1. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & a \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}$, 矩阵 Q 满足 $AQA^* = B$, 且 $r(Q) = 2$, 其中 A^* 是 A

的伴随矩阵,则 $a = (\quad)$.

(A) -1

(B) 1

(C) -2

(D) 2

2. 设 A, B, C, D 都是 2×2 矩阵, $r\left(\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\right) = 2$, 则行列式 $\begin{vmatrix} |A| & |B| \\ |C| & |D| \end{vmatrix} = (\quad)$.

(A) $|A||D|$ (B) $-|B||C|$

(C) 1

(D) 0

3. 设有三条直线 $l_1: a_1x + b_1y = c_1, l_2: a_2x + b_2y = c_2, l_3: a_3x + b_3y = c_3$, 其中 $a_i, b_i, c_i \neq$

$0 (i = 1, 2, 3)$, 记 $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{bmatrix}$, 则 $r(A) = 2$ 是三条直线相交于一点的 $(\quad)$.

(A) 充分必要条件

(B) 充分而非必要条件

(C) 必要而非充分条件

(D) 既非必要也非充分条件

4. 设矩阵 $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, 矩阵 $A \sim B$, 则 $r(A - E) + r(A - 3E) = (\quad)$.

(A) 6

(B) 7

(C) 5

(D) 4

5. 设 A, B 都是 3 阶矩阵, 其中 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & a \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $AB - A + B = E$, 且 $B \neq E, r(A + B) = 3$, 则常数

$a = (\quad)$.

(A) $\frac{7}{2}$

(B) 7

(C) $\frac{13}{2}$

(D) 13

6. 设 A 是 3 阶方阵, 有 3 个特征值为 0, 1, 1, 且不相似于对角矩阵, 则 $r(E - A) + r(A) = \underline{\hspace{2cm}}$.

7. 设有两个 n 维非零列向量 $\alpha = [a_1, a_2, \dots, a_n]^T, \beta = [b_1, b_2, \dots, b_n]^T$.

(1) 计算 $\alpha\beta^T$ 与 $\alpha^T\beta$;

(2) 求矩阵 $\alpha\beta^T$ 的秩 $r(\alpha\beta^T)$;

(3) 设 $C = E - \alpha\beta^T$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵. 证明: $C^T C = E - \beta\alpha^T - \alpha\beta^T + \beta\beta^T$ 的充要条件是 $\alpha^T\alpha = 1$.

第5章 线性方程组

强化训练



1. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均为线性方程组 $Ax = b$ 的解, 则下列向量

$$\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3, \frac{1}{4}(\alpha_1 - \alpha_3), \alpha_1 + 3\alpha_2 - 4\alpha_3,$$

其中是相应的齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量的个数为().

- (A) 4 (B) 3 (C) 2 (D) 1

2. 设 $\xi_1 = [1, -2, 3, 2]^T, \xi_2 = [2, 0, 5, -2]^T$ 是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, 则下列向量中是齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的解向量的是().

- (A) $\alpha_1 = [1, -3, 3, 3]^T$ (B) $\alpha_2 = [0, 0, 5, -2]^T$
(C) $\alpha_3 = [-1, -6, -1, 10]^T$ (D) $\alpha_4 = [1, 6, 1, 0]^T$

3. 设 $n(n \geq 2)$ 为正整数, A 是 $(n-1) \times n$ 矩阵, 划去 A 的第 j 列后构成的 $n-1$ 阶行列式记为 a_j , 令 $b_j = (-1)^{j-1} a_j (j = 1, 2, \dots, n)$. 则对于 n 元齐次线性方程组 $Ax = 0$, 下列结论一定正确的是().

- (A) 向量 $[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解
(B) 向量 $[b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个解
(C) 向量 $[a_1, a_2, \dots, a_n]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系
(D) 向量 $[b_1, b_2, \dots, b_n]^T$ 是 $Ax = 0$ 的一个基础解系

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 均是 4 维列向量, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4], B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5]$. 已知方程组 $Ax = \alpha_5$ 有通解 $k[1, -1, 2, 0]^T + [2, 1, 0, 1]^T$, 其中 k 是任意常数, 则下列向量不是方程组 $Bx = 0$ 的解的是().

- (A) $[1, -2, -2, 0, -1]^T$ (B) $[0, 3, -4, 1, -1]^T$
(C) $[2, 1, 0, 1, -1]^T$ (D) $[3, 0, 2, 1, -1]^T$

5. 设 A 是 $m \times n$ 实矩阵, 则对任意 m 维列向量 b , 线性方程组 $A^T Ax = A^T b$ ().

- (A) 无解 (B) 有解
(C) 必有唯一解 (D) 必有无穷多解

6. 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵为 A , 若存在 3 阶矩阵 $B \neq O$, 使得 $AB = O$, 则 ().

- (A) $\lambda = -2$ 且 $|B| = 0$ (B) $\lambda = -2$ 且 $|B| \neq 0$
(C) $\lambda = 1$ 且 $|B| = 0$ (D) $\lambda = 1$ 且 $|B| \neq 0$

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的解空间的维数是 ().

- (A) 3 (B) 2
(C) 1 (D) 与常数 a 的取值有关

8. 设 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 为实矩阵, 且 $A_{ij} = -a_{ij}$ (A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式), $a_{22} = -1$, $|A| = -1$,

则方程组 $A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ 的解为 _____.

9. 已知非齐次线性方程组

$$A_{3 \times 4} x = b \quad \text{①}$$

有通解 $k_1[1, 2, 0, -2]^T + k_2[4, -1, -1, -1]^T + [1, 0, -1, 1]^T$, 则满足方程组 ① 且满足条件 $x_1 = x_2, x_3 = x_4$ 的解是 _____.

10. 已知 4 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 α_1, α_2 线性无关, 若

$$\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 + 2\alpha_4,$$

则 $Ax = \beta$ 的通解为 _____.

11. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 若向量组 $\beta_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3, \beta_2 = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3, \beta_3 = \alpha_1 + t\alpha_2$ 同为该方程组的一个基础解系, 则 t _____.

12. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ a & b & c \end{bmatrix}$, 且矩阵方程 $AX = B$ 有无穷多解, 则 $X =$ _____.

13. 若方程组

$$(I) \begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = a^3, \\ (1+a)x_1 + (1+a)x_2 + 2x_3 = a(a^2 + 1) \end{cases}$$

与方程组

$$(II) \begin{cases} x_1 + x_2 + ax_3 = a^2, \\ (1+a)x_1 + 2x_2 + (1+a)x_3 = 1 + a^2, \\ (1+a)x_1 + (1+a)x_2 + 2x_3 = 1 + a \end{cases}$$

同解, 则 $a =$ _____.

14. 求下述线性方程组的解空间的维数,

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 + x_5 = 0, \end{cases}$$

并判断 $\xi_1 = [9, -1, 2, -1, 1]^T$ 是否属于该解空间.

15. 设 A 为 3 阶方阵, A^* 为其伴随矩阵, 且 $A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -6 \end{bmatrix}$.

(1) 确定矩阵 A^* 和 A 的秩;

(2) 讨论线性方程组 $Ax = 0$ 的基础解系由多少个线性无关解向量构成, 并给出该方程组的通解.

16. 设三元非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的系数矩阵 A 的秩为 1, 已知 η_1, η_2, η_3 是它的三个解向量, 且 $\eta_1 + \eta_2 = [1, 2, 3]^T$, $\eta_2 + \eta_3 = [2, -1, 1]^T$, $\eta_3 + \eta_1 = [0, 2, 0]^T$, 求该非齐次方程组的通解.

17. 已知 4 阶方阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 其中 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, $\alpha_1 = 2\alpha_2 - \alpha_3$, 如果 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, 求线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解.

18. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ a & 1 & b \\ 4 & c & 6 \end{bmatrix}$, B 是 3 阶方阵, $r(B) > 1$, 且 $BA = O$, 求:

(1) $A^*(n \geq 1)$;

(2) 齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的通解.

19. 已知线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = a, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = b, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 2. \end{cases}$$

(1) 求方程组的导出组的基础解系;

(2) 求 a, b 为何值时, 方程组有解;

(3) 当方程组有解时, 求方程组的全部解.

20. 设 $n(n \geq 3)$ 阶矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a & a & a & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 如果 A 的伴随矩阵 A^* 的秩为 1, 求 a 的值,

并求此时齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

21. 已知 $\eta_1 = [-3, 2, 0]^T$, $\eta_2 = [-1, 0, -2]^T$ 是线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + cx_3 = 2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -4 \end{cases}$$

的两个解向量, 求方程组的通解, 并确定参数 a, b, c .

22. 已知方程组 (I)

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 1, \\ x_2 - 2x_4 = 2, \\ x_3 + x_4 = -1 \end{cases}$$

与方程组 (II)

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + ax_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + bx_4 = 4, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = c \end{cases}$$

是同解方程组,求参数 a, b, c .

23. 已知齐次线性方程组(I)为 $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases}$ 齐次线性方程组(II)的基础解系为

$$\xi_1 = [-1, 1, 2, 4]^T, \xi_2 = [1, 0, 1, 1]^T.$$

(1) 求方程组(I)的基础解系;

(2) 求方程组(I)与(II)的全部非零公共解,并将非零公共解分别由方程组(I),(II)的基础解系线性表示.

24. 求方程组(I) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$ 与(II) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = a - 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = a^2 - a \end{cases}$ 的公共解.

巩固提高



1. 已知3阶矩阵 A 的秩 $r(A) = 2$, 其伴随矩阵 A^* 可经初等行变换化为矩阵 B , 又设 b 是 B 的一个非零列向量, 则().

(A) 方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

(B) 方程组 $A^*x = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解

(C) 方程组 $Ax = b$ 与 $Bx = b$ 同解

(D) 方程组 $A^*x = b$ 与 $Bx = b$ 同解

2. 设 A 是4阶矩阵, 向量 α, β 是齐次线性方程组 $(A - E)x = 0$ 的一个基础解系, 向量 γ 是齐次线性方程组 $(A + E)x = 0$ 的一个基础解系, 则齐次线性方程组 $(A^2 - E)x = 0$ 的通解为().

(A) $C_1\alpha + C_2\beta$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

(B) $C_1\alpha + C_2\gamma$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

(C) $C_1\beta + C_2\gamma$, 其中 C_1, C_2 为任意常数

(D) $C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma$, 其中 C_1, C_2, C_3 为任意常数

3. 设 A 与 B 均为 n 阶方阵, 则方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有非零公共解的一个充分条件是().

(A) $r(A) = r(B)$

(B) $r(A) + r(B) \leq n$

(C) $r(A) + r(B) < n$

(D) $n < r(A) + r(B) < 2n$

4. 设 A 是 n 阶矩阵, 对于齐次线性方程组(I) $A^n x = 0$ 和(II) $A^{n+1} x = 0$, 现有命题

①(I)的解必是(II)的解;

②(II)的解必是(I)的解;

③(I)的解不一定是(II)的解;

④(II)的解不一定是(I)的解.

其中正确的是().

(A) ①④

(B) ①②

(C) ②③

(D) ③④

5. 设 A 是秩为 $n-1$ 的 n 阶矩阵, α_1, α_2 是方程组 $Ax = 0$ 的两个不同的解向量, k 是任意常数, 则 $Ax = 0$ 的通解必定是().

(A) $\alpha_1 + \alpha_2$

(B) $k\alpha_1$

(C) $k(\alpha_1 + \alpha_2)$

(D) $k(\alpha_1 - \alpha_2)$

6. 已知 $r(A) = r_1$, 且方程组 $Ax = \alpha$ 有解, $r(B) = r_2$, 且 $By = \beta$ 无解, 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$,

$B = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$, 且 $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta) = r$, 则().

- (A) $r = r_1 + r_2$ (B) $r > r_1 + r_2$ (C) $r = r_1 + r_2 + 1$ (D) $r \leq r_1 + r_2 + 1$

7. 设 A 是 4×5 矩阵, 且 A 的行向量组线性无关, 则下列说法不正确的是().

- (A) $A^T x = 0$ 只有零解 (B) $A^T A x = 0$ 必有无穷多解
(C) 对任意的 b , $A^T x = b$ 有唯一解 (D) 对任意的 b , $A x = b$ 有无穷多解

8. 设 $P_i(x_i, y_i, z_i) (i = 1, 2, \dots, n; n > 3)$ 是不重合的点, $A = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$, 若 $P_1, P_2, \dots, P_n$ 共面, 则 $r(A)$ ().

- (A) 必为 2 (B) 为 1 或 2 (C) 为 2 或 3 (D) 必为 3

9. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 2 & a+1 & a+3 \end{bmatrix}$, B 是 3 阶非零矩阵, 且 $AB = O$, 则 $Ax = 0$ 的通解是_____.

10. 设平面 $\pi_1: x + ay = a, \pi_2: ax + z = 1, \pi_3: ay + z = 1$, 已知这三个平面没有公共交点, 则 $a =$ _____.

11. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 7 & 4 \\ 0 & -2 & -1 \\ a & 2 & 1 \\ 3 & 7 & b \end{bmatrix}$. 若矩阵方程 $AX = B$ 有解, 求 a, b 的值,

并求该矩阵方程的全部解.

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 均为 4 维列向量, 记 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4], B = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$. 已知非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解为

$$[1, -1, 2, 1]^T + k_1[1, 2, 0, 1]^T + k_2[-1, 1, 1, 0]^T (k_1, k_2 \text{ 为任意常数}).$$

- (1) 证明 α_1, α_2 线性无关;
(2) 求方程组 $Bx = \beta$ 的通解.

13. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 4 维列向量组, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, $\alpha_4 = \alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3$. 记 $A = [\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_1 + a\alpha_2 + \alpha_3]$, 且方程组 $Ax = \alpha_4$ 有无穷多解. 求:

- (1) 常数 a 的值;
(2) 方程组 $Ax = \alpha_4$ 的通解.
14. 设三元线性方程有通解

$$k_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} + k_2 \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

求原方程.

15. 设 B 是秩为 2 的 5×4 矩阵, $\alpha_1 = [1, 1, 2, 3]^T, \alpha_2 = [-1, 1, 4, -1]^T, \alpha_3 = [5, -1, -8, 9]^T$ 是齐次线性方程组 $Bx = 0$ 的解向量, 求 $Bx = 0$ 的解空间的一个标准正交基.

16. 已知齐次线性方程组(I)的基础解系为 $\xi_1 = [1, 0, 1, 1]^T, \xi_2 = [2, 1, 0, -1]^T, \xi_3 = [0, 2, 1, -1]^T$, 添加两个方程

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

后组成齐次线性方程组(II),求(II)的基础解系.

17. 设 n 阶矩阵 A, B 乘积可交换, $\xi_1, \dots, \xi_{r_1}$ 和 $\eta_1, \dots, \eta_{r_2}$ 分别是方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 的一个基础解系, 且对于 n 阶矩阵 C, D , 满足 $r(CA + DB) = n$.

证明: (1) $r\left(\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}\right) = n$ 且 $\xi_1, \dots, \xi_{r_1}, \eta_1, \dots, \eta_{r_2}$ 线性无关;

(2) $\xi_1, \dots, \xi_{r_1}, \eta_1, \dots, \eta_{r_2}$ 是方程组 $ABx = 0$ 的一个基础解系.

第6章 向量组

强化训练



1. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times m$ 矩阵, 若满足 $AB = E$, 其中 E 是 m 阶单位矩阵, 则().

- (A) A 的列向量组线性无关, B 的行向量组线性无关
- (B) A 的列向量组线性无关, B 的列向量组线性无关
- (C) A 的行向量组线性无关, B 的列向量组线性无关
- (D) A 的行向量组线性无关, B 的行向量组线性无关

2. 设向量组 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性无关, 且 $\alpha_i (i = 1, 2, \dots, s)$ 不能由 (II) $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ 线性表出, $\beta_j (j = 1, 2, \dots, t)$ 也不能由 (I) $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 则向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_t$ ().

- (A) 必线性相关
- (B) 必线性无关
- (C) 可能线性相关, 也可能线性无关
- (D) 以上都不正确

3. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为 3 维非零列向量, 则下列结论:

- ① 如果 α_4 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关;
 - ② 如果 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 也线性相关;
 - ③ 如果 $r(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3) = r(\alpha_4, \alpha_1 + \alpha_4, \alpha_2 + \alpha_4, \alpha_3 + \alpha_4)$, 则 α_4 可以由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出.
- 其中正确的个数为().

- (A) 0
- (B) 1
- (C) 2
- (D) 3

4. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关, 而向量组 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关, 则().

- (A) α_4 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
- (B) α_1 可由 $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示
- (C) α_5 可由 $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示
- (D) α_5 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示

5. 已知向量组 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ 与向量组 $\beta_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\beta_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ a \end{bmatrix}$.

若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 不能由 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表示, 则 $a =$ ().

- (A) 3
- (B) -3
- (C) 2
- (D) -2

6. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, $r(A) = n - 1$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是非齐次线性方程组 $Ax = b$ 的三个互不相同的解, 则().

- (A) $\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$ 线性无关
- (B) $\alpha_1, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_3$ 线性无关
- (C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2 - \alpha_3$ 线性无关
- (D) $\alpha_1, \alpha_2 - \alpha_3$ 线性无关

7. 设 $\alpha_1 = [1, 0, -1, 2]^T, \alpha_2 = [2, -1, -2, 6]^T, \alpha_3 = [3, 1, t, 4]^T, \beta = [4, -1, -5, 10]^T$, 已知 β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 则 $t =$ _____.

8. 已知向量组

$$\alpha_1 = [1, -1, 2]^T, \alpha_2 = [0, 3, 1]^T, \alpha_3 = [3, 0, 7]^T$$

与向量组

$$\beta_1 = [1, -2, 2]^T, \beta_2 = [2, 1, 5]^T, \beta_3 = [x, 3, 3]^T$$

等秩, 则 $x =$ _____.

9. 与 $\alpha_1 = [1, 2, 3, -1]^T, \alpha_2 = [0, 1, 1, 2]^T, \alpha_3 = [2, 1, 3, 0]^T$ 都正交的单位向量是 _____.

10. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s (s \geq 2)$ 线性无关, 且

$$\beta_1 = \alpha_1 + \alpha_2, \beta_2 = \alpha_2 + \alpha_3, \dots, \beta_{s-1} = \alpha_{s-1} + \alpha_s, \beta_s = \alpha_s + \alpha_1.$$

讨论向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 的线性相关性.

11. 已知向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s+1} (s > 1)$ 线性无关, $\beta_i = \alpha_i + t\alpha_{i+1}, i = 1, 2, \dots, s$. 证明: 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s$ 线性无关.

12. 设 A 是 3×3 矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 均是 3 维列向量, 且线性无关, 已知

$$A\alpha_1 = \alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3, A\alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_2.$$

(1) 证明 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性无关;

(2) 求 $|A|$.

13. 已知 A 是 n 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 是 n 维线性无关列向量组, 若 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关, 证明: A 是不可逆矩阵.

14. 已知 $\alpha_1 = [1, 2, -3, 1]^T, \alpha_2 = [5, -5, a, 11]^T, \alpha_3 = [1, -3, 6, 3]^T, \alpha_4 = [2, -1, 3, a]^T$. 求:

(1) 当 a 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性相关;

(2) 当 a 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关;

(3) 当 a 为何值时, α_4 能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 并写出它的表出式.

15. 已知

$$\alpha_1 = [1 + \lambda, 1, 1]^T, \alpha_2 = [1, 1 + \lambda, 1]^T, \alpha_3 = [1, 1, 1 + \lambda]^T, \beta = [0, \lambda, \lambda^2]^T.$$

问 λ 取何值时,

(1) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 且表达式唯一?

(2) β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 但表达式不唯一?

(3) β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出?

16. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 且表达式的系数全不为零. 证明: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 中任意 s 个向量均线性无关.

17. (1) 设向量组 A 可由向量组 B 线性表示, 且 $r(A) = r(B)$, 证明: 向量组 A 与向量组 B 等价;

(2) 设有向量 $\alpha_1 = [1, -2, 0]^T, \alpha_2 = [1, 0, 2]^T, \alpha_3 = [1, 2, a]^T, \beta_1 = [1, 2, 4]^T, \beta_2 = [1, 0, b]^T$, 问: 当 a, b 为何值时, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与向量组 β_1, β_2 等价? 并写出此时 β_1, β_2 由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示的表示式.

18. 已知向量组 $A: \alpha_1 = [1, 1, 4]^T, \alpha_2 = [1, 0, 4]^T, \alpha_3 = [1, 2, a^2 + 3]^T$ 和向量组 $B: \beta_1 = [1, 1, a + 3]^T, \beta_2 = [0, 2, 1 - a]^T, \beta_3 = [1, 3, a^2 + 3]^T$. 若向量组 A 和向量组 B 等价, 求常数 a 的值, 并将 β_3 用 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示.

19. 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = a_{15}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = a_{25}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = a_{35}, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 = a_{45} \end{cases}$$

的通解为 $[2, 1, 0, 1]^T + k[1, -1, 2, 0]^T$ (k 为任意常数). 记 $\alpha_j = [a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}]^T, j = 1, 2, \dots$,

5. 问:

(1) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5$ 线性表出, 说明理由;

(2) α_4 能否由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表出, 说明理由.

20. 已知 α_1, α_2 及 β_1, β_2 均是 3 维线性无关向量组.

(1) 若 γ 不能由 α_1, α_2 线性表出, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \gamma$ 线性无关;

(2) 证明存在 3 维向量 δ , 使得 δ 既不能由 α_1, α_2 线性表出, 也不能由 β_1, β_2 线性表出.

21. 设 $\alpha_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]^T (i = 1, 2, \dots, s; s < n)$ 为 n 维列向量, 且 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 已知 β 是线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

的非零解, 证明向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, \beta$ 线性无关.

22. 设 α, β 为 n 维非零列向量, 且线性相关, $\alpha^T \alpha = 2$, 若 $(\alpha\beta^T)^2 = 2\beta\alpha^T$, 求两个向量之间的线性关系.

巩固提高



1. 设 $\alpha_1 = [1, 0, 1]^T, \alpha_2 = [1, 1, -1]^T, \alpha_3 = [1, -1, 1]^T; \beta_1 = [3, 0, 1]^T, \beta_2 = [2, 0, 0]^T, \beta_3 = [0, 2, -2]^T$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的两个基. 若向量 ξ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $[1, 2, 0]^T$, 则 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标为 ().

(A) $[1, 3, 3]^T$ (B) $[-1, 3, 3]^T$ (C) $[-1, -3, 3]^T$ (D) $[-1, 3, -3]^T$

2. 已知 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r (r \geq 3)$ 是 $Ax = 0$ 的基础解系, 则下列向量组也是 $Ax = 0$ 的基础解系的是 ().

(A) $\alpha_1 = -\xi_2 - \xi_3 - \dots - \xi_r, \alpha_2 = \xi_1 - \xi_3 - \xi_4 - \dots - \xi_r, \alpha_3 = \xi_1 + \xi_2 - \xi_4 - \dots - \xi_r, \dots, \alpha_r = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{r-1}$

(B) $\beta_1 = \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_r, \beta_2 = \xi_1 + \xi_3 + \xi_4 + \dots + \xi_r, \beta_3 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_4 + \dots + \xi_r, \dots, \beta_r = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_{r-1}$

(C) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 的一个等价向量组

(D) $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ 的一个等秩向量组

3. 向量 $\beta = [1, 2, 3]^T$ 在 $\mathbb{R}^3$ 的一个基 $\alpha_1 = [1, -1, 2]^T, \alpha_2 = [1, 2, -1]^T, \alpha_3 = [2, 1, -1]^T$ 下的坐标为 _____.

4. 设 A 为 n 阶正定矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 为 n 维非零列向量, 且满足 $\alpha_i^T A^{-1} \alpha_j = 0 (i \neq j; i, j = 1, \dots, n)$

$2, \dots, n$). 证明: 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

5. 设 $\mathbf{R}^3$ 中两个基 $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T, \alpha_2 = [0, 1, 1]^T, \alpha_3 = [1, 0, 1]^T; \beta_1 = [1, 0, 0]^T, \beta_2 = [1, 1, 0]^T, \beta_3 = [1, 1, 1]^T$.

(1) 求 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 到 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的过渡矩阵;

(2) 已知 ξ 在基 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 下的坐标为 $[1, 0, 2]^T$, 求 ξ 在基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 下的坐标;

(3) 求在上述两个基下有相同坐标的向量.

6. 设向量组 $\alpha_1 = [a_1, a_2, a_3]^T, \alpha_2 = [b_1, b_2, b_3]^T, \alpha_3 = [c_1, c_2, c_3]^T$, 若三条直线

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, (a_i^2 + b_i^2 \neq 0, i = 1, 2, 3) \\ a_3x + b_3y = c_3 \end{cases}$$

相交于一点, 问向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 之间应有什么样的线性关系? 说明理由.

7. 设 3 阶矩阵 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, 已知 $A^2 = [\alpha_1, \alpha_2, -3\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3]$, 记 $A^{100} = [\beta_1, \beta_2, \beta_3]$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 写成 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

8. 设向量组 $\alpha_1 = [1, 1, 1, 2]^T, \alpha_2 = [3, a + 4, 2a + 5, a + 7]^T, \alpha_3 = [4, 6, 8, 10]^T, \alpha_4 = [2, 3, 2a + 3, 5]^T; \beta = [0, 1, 3, b]^T$. 求:

(1) 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的秩及一个极大线性无关组;

(2) a, b 满足何种条件时, β 不能由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表示;

(3) a, b 满足何种条件时, 任意的 4 维非零列向量 ξ 均可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta$ 线性表示.

第7章 特征值与特征向量

强化训练



1. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ x & y & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 A 的特征值为 1, 2, 3. 则有().

(A) $x = 2, y = 4, z = 8$

(B) $x = -1, y = 4, z \in \mathbf{R}$

(C) $x = -2, y = 2, z \in \mathbf{R}$

(D) $x = -1, y = 4, z = 3$

2. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$ 可逆, 向量 $\alpha = [1, b, 1]^T$ 是矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的一个特征向量,

$b > 0$, 则 (a, b, λ) 为().

(A) $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 1)$

(B) $(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, 4)$

(C) $(2, 1, 1)$

(D) $(2, 2, 4)$

3. 已知 $\alpha_1 = [-1, 1, a, 4]^T, \alpha_2 = [-2, 1, 5, a]^T, \alpha_3 = [a, 2, 10, 1]^T$ 是 4 阶方阵 A 的 3 个不同特征值对应的特征向量, 则 a 的取值范围为().

(A) $a \neq 5$

(B) $a \neq -4$

(C) $a \neq -3$

(D) $a \neq -3$ 且 $a \neq -4$

4. 设矩阵 A 满足 $A^3 - A^2 = A - E$, 则().

(A) $A + E$ 与 $A - E$ 都不可逆

(B) $A + E$ 与 $A - E$ 至少有一个可逆

(C) $A + E$ 与 $A - E$ 有且仅有一个可逆

(D) $A + E$ 与 $A - E$ 至多有一个可逆

5. 已知 A 是 3 阶矩阵, $r(A) = 1$, 则 $\lambda = 0$ ().

(A) 必是 A 的二重特征值

(B) 至少是 A 的二重特征值

(C) 至多是 A 的二重特征值

(D) 是一重、二重、三重特征值都可能

6. 设 α, β 是 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\beta^T$, 若 $\alpha^T\beta = 1$, 则 $|A^2 + A + E| =$ ().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

7. 设 $A = E + \alpha\beta^T$, 其中 α, β 均为 n 维列向量, $\alpha^T\beta = 3$, 则 $|A + 2E| =$ _____.

8. 已知 A, B 为 3 阶相似矩阵, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$ 为 A 的两个特征值, $|B| = 2$, 则行列式

$$\begin{vmatrix} (A+E)^{-1} & O \\ O & (2B)^* \end{vmatrix} = \text{_____}.$$

9. 设 A 是 3 阶矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 2$. A^* 是 A 的伴随矩阵, E 是 3 阶单位矩阵, 则 $\left| A \begin{bmatrix} O & A^* \\ -2E & A \end{bmatrix} \right| =$ _____.

10. 设 n 阶矩阵 A 的元素全是 1, 则 A 的 n 个特征值是 _____.

11. 设 A 是 3 阶矩阵, $|A| = 3$, 且满足 $|A^2 + 2A| = 0, |2A^2 + A| = 0$, 则 A^* 的特征值是 _____.

12. 设 A 是 n 阶实对称矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 A 的 n 个互不相同的特征值, ξ_1 是 A 的对应于 λ_1 的一个单位特征向量, 则矩阵 $B = A - \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T$ 的特征值是 _____.

13. 设 A 是 3 阶矩阵, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是三个线性无关的 3 维列向量, 满足 $A\xi_i = \xi_i, i = 1, 2, 3$, 则 $A =$ _____.

14. 设 A 是 2 阶实对称矩阵, 有特征值 $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = -1, \xi_1 = [-2, 1]^T$ 是 A 对应于 λ_1 的特征向量, $\beta = [3, 1]^T$, 则 $A\beta =$ _____.

15. 设 $A = \begin{bmatrix} a & a & a \\ a & a & a \\ a & a & a \end{bmatrix}$, 求 A 的特征值和全部特征向量.

16. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$, $\alpha = [1, k, -1]^T$ 是 A 的伴随矩阵 A^* 对应于特征值 λ 的一个特征向量, 求满足条件的常数 k .

17. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & y \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 有 3 个线性无关的特征向量, 求 x 与 y 应满足的条件.

18. 设 A 为 n 阶矩阵, λ_1 和 λ_2 是 A 的两个不同的特征值, x_1, x_2 是 A 的分别属于 λ_1 和 λ_2 的特征向量. 证明: $x_1 + x_2$ 不是 A 的特征向量.

19. 若任一 n 维非零列向量都是 n 阶矩阵 A 的特征向量, 证明 A 是数量矩阵.

巩固提高



1. 设 A, B 均是 n 阶非零矩阵, 已知 $A^2 = A, B^2 = B$, 且 $AB = BA = O$. 则下列 3 个说法:

① 0 未必是 A 和 B 的特征值;

② 1 必是 A 和 B 的特征值;

③ 若 α 是 A 的属于特征值 1 的特征向量, 则 α 必是 B 的属于特征值 0 的特征向量.

正确的个数为().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

2. 已知 2 阶实对称矩阵 A 的秩 $r(A) = 1, \lambda_1 = \sqrt{2}$ 是其一个特征值, $\xi_1 = [1, -1]^T$ 为对应于 λ_1 的特征向量, 设 k 为任意常数, 则非齐次线性方程组 $Ax = \xi_1$ 的通解是().

$$(A) k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(B) k \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(C) k \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(D) k \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

3. 设 A 是 3 阶不可逆矩阵, B 是 3×2 矩阵, $r(B) = 2$, 且 $AB + 3B = O$, 则行列式 $|A + 2E| = (\quad)$.

(A) 0

(B) 2

(C) 3

(D) 6

4. 设 A, B 为 3 阶相似矩阵, 且 $|2E + A| = 0, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ 为 B 的两个特征值, 则行列式 $|A + 2AB| = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. 已知 3 阶矩阵 A 满足 $|A - E| = |A - 2E| = |A + E| = a$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 当 $a = 0$ 时, 求行列式 $|A + 3E|$ 的值;

(2) 当 $a = 2$ 时, 求行列式 $|A + 3E|$ 的值.

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 其特征值为 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \alpha_1, \alpha_2$ 是 A 的两个不同的特征向量, 且 $A(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_2$.

(1) 证明 $A\alpha_1 = 0$;

(2) 求线性方程组 $Ax = \alpha_2$ 的通解.

7. (1) 设 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 n 阶方阵 A 的互异特征值, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 是 A 的分别对应于这些特征值的特征向量, 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关;

(2) 设 A, B 为 n 阶方阵, $|B| \neq 0$, 若方程 $|A - \lambda B| = 0$ 的全部根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 互异, α_i 分别是方程组 $(A - \lambda_i B)x = 0$ 的非零解, $i = 1, 2, \dots, n$. 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 线性无关.

8. 已知 B 是 n 阶矩阵, 满足 $B^2 = E$. 求 B 的特征值的取值范围.

9. 已知 n 阶矩阵 A 的每行元素之和为 a , 求 A 的一个特征值. 当 k 是正整数时, 求 A^k 的每行元素之和.

10. 设 A 是 3 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个不同的特征值, ξ_1, ξ_2, ξ_3 是三个对应的特征向量. 证明: 向量组 $\xi_1, A(\xi_1 + \xi_2), A^2(\xi_1 + \xi_2 + \xi_3)$ 线性无关的充要条件是 $\lambda_2 \lambda_3 \neq 0$.

11. 设 A 是 n 阶矩阵, 有 $A\xi = \lambda\xi, A^T\eta = \mu\eta$, 其中 λ, μ 是实数, 且 $\lambda \neq \mu, \xi, \eta$ 是 n 维非零列向量. 证明: ξ, η 正交.

12. 设 A 为 3 阶矩阵, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是 A 的三个不同的特征值, 对应的特征向量分别为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 令 $\beta = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\beta, A\beta, A^2\beta$ 线性无关;

(2) 若 $A^3\beta = A\beta$, 求秩 $r(A - E)$ 及行列式 $|A + 2E|$.

13. 设 A 是 3 阶矩阵, $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ 是 A 的特征值, 对应的特征向量分别是

$$\xi_1 = [2, 2, -1]^T, \xi_2 = [-1, 2, 2]^T, \xi_3 = [2, -1, 2]^T.$$

又 $\beta = [1, 2, 3]^T$. 求:

(1) $A^n \xi_1$;

(2) $A^n \beta$.

第8章 相似理论

强化训练



1. 设 A 是 3 阶方阵, 有 3 阶可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{bmatrix}$, A^* 是 A 的伴随矩阵, 则

$P^{-1}A^*P = (\quad)$.

(A) $\begin{bmatrix} 1 & & \\ & \frac{1}{2} & \\ & & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 3 & & \\ & 6 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$

2. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, $A =$

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -3 \end{bmatrix}$, 则在 A, B, C, D 中与 A 相似的矩阵有().

(A) A, C

(B) A, D

(C) B, C

(D) B, D

3. 已知 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$, α_1 是矩阵 A 属于特征值 $\lambda = 2$ 的特征向量, α_2, α_3 是矩阵 A 属于特

征值 $\lambda = 6$ 的线性无关的特征向量, 那么矩阵 P 不能是().

(A) $[\alpha_1, -\alpha_2, \alpha_3]$

(B) $[\alpha_1, \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_2 - 2\alpha_3]$

(C) $[\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2]$

(D) $[\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2, \alpha_3]$

4. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 相似于矩阵 A , 记 $r(B-E) = r_1, r(B+E) = r_2, r(B+2E) =$

r_3 , 则().

(A) $r_1 < r_2 < r_3$

(B) $r_2 < r_1 < r_3$

(C) $r_3 < r_2 < r_1$

(D) $r_1 < r_3 < r_2$

5. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, A 可逆且 $A \sim B$, 则下列命题中:

- ① $AB \sim BA$; ② $A^2 \sim B^2$; ③ $A^T \sim B^T$; ④ $A^{-1} \sim B^{-1}$.

正确命题的个数为().

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

6. 设 A, B 是 n 阶实对称可逆矩阵, 则存在 n 阶可逆矩阵 P , 使下列关系式

- ① $PA = B$; ② $P^{-1}ABP = BA$; ③ $P^{-1}AP = B$; ④ $P^T A^2 P = B^2$.

成立的个数为().

- (A)1 (B)2 (C)3 (D)4

7. 下列矩阵中不可相似对角化的是().

(A) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(B) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$

(C) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{bmatrix}$

8. 若 A 为 $n(n \geq 2)$ 阶实对称矩阵, 且满足 $E - 2A + A^2 - 2A^3 = O$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵, 则 $A =$ _____.

9. 已知 A 为 2 阶方阵, 可逆矩阵 $P = [\alpha, \beta]$ 使得 $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $Q = [\beta, \alpha]$, 则 $Q^{-1}A^*Q =$ _____.

10. 已知 3 阶实对称矩阵 A 有特征值 $\lambda_1 = 3$, 其对应的特征向量为 $\xi_1 = [-3, 1, 1]^T$, 且 $r(A) = 1$, 则 $A =$ _____.

11. 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a & 4 & b \\ -3 & -3 & c \end{bmatrix}$, 若 A 有二重特征值 $\lambda = 2$, 且 A 可相似对角化, 则 $a + b + c =$ _____.

12. 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $A^2 = A$, 且 $r(A) = r(0 < r \leq n)$. 证明:

$$A \sim \begin{bmatrix} E_r & O \\ O & O \end{bmatrix},$$

其中 E_r 是 r 阶单位矩阵.

13. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & a & 2 \\ 5 & b & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, 已知 $\lambda_1 = 1$ 与 $\lambda_2 = -1$ 是 A 的特征值, 问 A 能否相似对角化?

若不能相似对角化, 则说明理由; 若能相似对角化, 则求一个可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

14. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 3, 向量 $\alpha_1 = [-1, 2, -1]^T$, $\alpha_2 = [0, -1, 1]^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的两个解.

- (1) 求 A 的特征值和对应的特征向量;
(2) 求正交矩阵 Q 和对角矩阵 Λ , 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

15. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 且 $M = P^{-1}A^*P$, 求 M 的特征值与特征向量.

16. 设 A 是 3 阶方阵, α 是 3 维列向量. 若 $\alpha, A\alpha, A^2\alpha$ 线性无关, 且满足 $A^3\alpha - 2A^2\alpha - A\alpha + 2\alpha = 0$, 求:

(1) A 的特征值;

(2) A 的特征向量(用 A 与 α 表示).

17. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x \end{bmatrix}$ 的一个特征值为 1, 求一个正交矩阵 Q , 使 $(AQ)^T(AQ)$ 为对角矩阵.

18. 设

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

问 A, B 是否相似? 并说明理由.

19. 设 A 是 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维列向量, $\alpha_1 \neq 0$, 满足

$$A\alpha_1 = 2\alpha_1, A\alpha_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2, A\alpha_3 = \alpha_2 + 2\alpha_3.$$

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 判断 A 能否相似于对角矩阵, 说明理由.

20. 设 A 是 3 阶矩阵, $b = [9, 18, -18]^T$, 方程组 $Ax = b$ 有通解

$$k_1[-2, 1, 0]^T + k_2[2, 0, 1]^T + [1, 2, -2]^T,$$

其中 k_1, k_2 是任意常数, 求 A 及 A^{100} .

21. 设 n 阶实对称矩阵 A 满足

$$A^4 + 6A^3 + 9A^2 - 6A - 10E = O,$$

求 A^k, k 为任意正整数.

22. 已知 A 是 3 阶实对称矩阵, 且 $\text{tr}(A) = -6, AB = C$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & -12 \\ 0 & 12 \\ 0 & -12 \end{bmatrix},$$

求矩阵 A .

23. 设 $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1}, \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases} (n = 1, 2, 3, \dots)$, 且 $x_0 = 2, y_0 = 1$, 求 x_{100} .

巩固提高

1. 已知 3 阶实对称矩阵 A 的特征值为 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \xi_1 = [0, 1, 1]^T$ 为对应于 $\lambda_1 = -1$ 的特征向量, α 是 3 维列向量. 记 $W_1: \alpha$ 是对应于 $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ 的特征向量; $W_2: \alpha$ 非零且与 ξ_1 正交, 则 W_1 是 W_2 的 ().

(A) 充分非必要条件

(B) 必要非充分条件

(C) 充要条件

(D) 既非充分也非必要条件



2. 设 A 是 3 阶方阵, $A^T A$ 相似于矩阵 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 其中 A^T 表示 A 的转置, E 表示 3 阶单位矩阵.

若 $r(5E - A^T A) = k + r(2E - AA^T)$, 则 k 等于().

- (A) -3 (B) 3 (C) -2 (D) 2

3. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量, P 为 3 阶矩阵, 且 $PA = [-\alpha_1, -2\alpha_2, -3\alpha_3]$, 则 $|P - E| = ()$.

- (A) 6 (B) -6 (C) 24 (D) -24

4. 设矩阵 $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 2 \end{bmatrix}$, $AQ = QD$, E 是 3 阶单位矩阵, 则 $A^3 - 3A^2 +$

$5E =$ _____.

5. 设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的 3 维列向量, 且满足

$$A\alpha_1 = \frac{1}{2}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 + \alpha_3, A\alpha_2 = \frac{2}{3}\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_3, A\alpha_3 = -\frac{1}{6}\alpha_3.$$

- (1) 求矩阵 B , 使得 $A[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]B$;

- (2) 证明 A 与 (1) 中的 B 相似;

- (3) 求 A 的特征值并计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n$.

6. 设 A, B 均为 n 阶矩阵, A 有 n 个互不相同的特征值, 且 $AB = BA$. 证明: B 相似于对角矩阵.

7. 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 矩阵 B 满足 $AB = A - B$, 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP$ 与 $P^{-1}BP$ 均为对角矩阵, 并写出这两个对角矩阵.

8. 设 $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, 求一个实对称矩阵 B , 使 $A = B^2$.

9. 设 A, B, C 均是 3 阶矩阵, 满足 $AB = -2B, CA^T = 2C$, 其中

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

- (1) 求 A ;

- (2) 证明: 对任何 3 维列向量 ξ , $A^{100}\xi$ 与 ξ 必线性相关.

10. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ 可逆, 3 阶矩阵 B 满足

$$BA = \begin{bmatrix} 2a_{11} & a_{11} + a_{12} & a_{11} + a_{13} \\ 2a_{21} & a_{21} + a_{22} & a_{21} + a_{23} \\ 2a_{31} & a_{31} + a_{32} & a_{31} + a_{33} \end{bmatrix}.$$

证明: 矩阵 B 可相似对角化, 并求一个可逆矩阵 P (用 A 的元素表示) 及对角矩阵 Λ , 使 $P^{-1}BP = \Lambda$.

第9章 二次型

强化训练



1. 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 则二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n)^2$ 的矩阵是().

- (A) A^2 (B) $A + A^T$ (C) $A^T A$ (D) AA^T

2. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, $A^2 + 2A = O$, $r(A) = 2$, 且 $A + kE$ 为正定矩阵, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则 k 应满足的条件是().

- (A) $k > 0$ (B) $k \geq 0$ (C) $k > 2$ (D) $k \geq 2$

3. 下列矩阵中, 是正定矩阵的是().

$$(A) A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(B) B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$(C) C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(D) D = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

4. 设 3 阶实对称矩阵 A 的各行元素之和均为 2, 其主对角线元素之和为 5, 秩 $r(A) = 2$, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x^T A x$ 满足条件 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 的最大值为().

- (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) 2 (D) 3

5. 设 3 阶矩阵 A 的列向量组为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, 行向量组为 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$, 即 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3] = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{bmatrix}$, 若

$B = [-\alpha_1, \alpha_2, -\alpha_3]$ 与 $C = \begin{bmatrix} -\beta_1 \\ \beta_2 \\ -\beta_3 \end{bmatrix}$ 均是对称矩阵, 则 B 与 C ().

- (A) 相似但不合同 (B) 合同但不相似
(C) 不相似也不合同 (D) 相似且合同

6. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, 将 A 的第 1 行元素乘 2 得到矩阵 B , 再将矩阵 B 的第 1 列元素乘 2 得到矩阵 C , 若矩阵 A 可逆, 则矩阵 A^{-1} 与矩阵 C^{-1} ().

(A) 合同但不相似

(B) 相似但不合同

(C) 合同且相似

(D) 不合同也不相似

7. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的秩为 1, $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且 $\mathbf{A}$ 中各行元素之和为 3, 则 f 在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 下的标准形为_____.

8. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + kx_3)^2 + (x_3 + x_1)^2$ 的秩为 2, 则该二次型经正交变换所得的标准形为_____.

9. 已知 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$, 若有可逆矩阵 $\mathbf{C}$, 使 $\mathbf{C}^T \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{A}$, 则 $\mathbf{C} =$ _____.

10. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3)^2 + (x_1 - x_2 - 2x_3)^2 + (x_1 - x_2 + ax_3)^2$ 的秩等于 2, 则 $a =$ _____.

11. 二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的正惯性指数为_____.

12. 若二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + ax_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2ax_1x_3$$

的正、负惯性指数都是 1, 则 $a =$ _____.

13. 设 $\mathbf{A}$ 为 4 阶实对称矩阵, 且 $\mathbf{A}^2 + \mathbf{A} = \mathbf{O}$. 若 $\mathbf{A}$ 的秩为 3, 则二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 在正交变换下的标准形为_____.

14. 设 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B} = k\mathbf{E} - \mathbf{A}$, 若 $\mathbf{B}$ 为正定矩阵, 则 k 的取值范围为_____.

15. 已知 $f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + cx_3^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 6x_2x_3$ 的秩为 2. 确定参数 c 及二次型对应矩阵的特征值, 并求 $f(x_1, x_2, x_3) = 1$ 表示何种曲面.

16. 设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, 且有可逆矩阵 $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & b \\ 1 & a & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 满足 $\mathbf{P}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, 求:

(1) 二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的规范形及二次型 $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}$ 的标准形;

(2) $(\mathbf{A}^*)^{-1}$.

17. 设 α 为 3 维实单位列向量, 求:

(1) 齐次线性方程组 $(\mathbf{E} - \alpha\alpha^T)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 的通解;

(2) 矩阵方程 $(\mathbf{E} - \alpha\alpha^T)\mathbf{X} = \mathbf{O}_{3 \times 3}$ 的全部解;

(3) 二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T (\mathbf{E} - \alpha\alpha^T) \mathbf{x}$ 的秩与正惯性指数.

18. 设实对称矩阵 $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 求使得二次型 $f_1(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 与 $f_2(x_1, x_2,$

$x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^* \mathbf{x}$ 都化为标准形的正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$, 并写出它们的标准形.

19. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ ($\mathbf{A}$ 是 3 阶实对称矩阵) 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 化为标准形 $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$. 又设 $\mathbf{A}^* \alpha = \alpha$, 其中 $\mathbf{A}^*$ 是 $\mathbf{A}$ 的伴随矩阵, $\alpha = [1, 1, -1]^T$.

(1) 求正交矩阵 $\mathbf{Q}$;

(2) 求 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的表达式;

(3) 用配方法将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形, 写出标准形和配方法对应的可逆线性变换.

20. 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, 已知 A 的一个特征值为 3.

(1) 求 k ;

(2) 求矩阵 P , 使 $(AP)^T(AP)$ 为对角矩阵.

巩固提高



1. 设 A 为 3 阶实对称矩阵, A_{ij} 是 A 中元素 a_{ij} 的代数余子式, $i, j = 1, 2, 3$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$, $\mathbf{y} = [y_1, y_2, y_3]^T$, 若 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 经正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P} \mathbf{y}$ 化为 $3y_1^2 - 2y_2^2 + y_3^2$, 则 $g(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{A_{ij}}{|A|} x_i x_j$ 经可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 可化为规范形().

(A) $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(B) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $-y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(D) $-y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

2. 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_2x_3$, 则对任意 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 均有().

(A) $f(x_1, x_2, x_3) > 0$

(B) $f(x_1, x_2, x_3) \geq 0$

(C) $f(x_1, x_2, x_3) < 0$

(D) $f(x_1, x_2, x_3) \leq 0$

3. 实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的秩为 r , 符号差为 s , 且 f 和 $-f$ 对应的矩阵合同, 则必有().

(A) r 是偶数, $s = 1$

(B) r 是奇数, $s = 1$

(C) r 是偶数, $s = 0$

(D) r 是奇数, $s = 0$

4. 若可逆矩阵 D 满足 $D^T D = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$, 则 $D =$ _____.

5. 若 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$ 的规范形为 $y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$, 则 a 的取值范围为_____.

6. 已知 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\alpha_2 = \begin{bmatrix} a \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, 若二次型 $f(x_1, x_2) = \sum_{i=1}^2 (\alpha_i, \mathbf{x})^2$ 正定, 其中 $(\alpha_i, \mathbf{x})$ 表示向量 $\alpha_i, \mathbf{x}$ 的内积, 则 a 的取值范围是_____.

7. 设 A 是 3 阶实对称矩阵, $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 是 A 的二重特征值, $\alpha_1 = [1, 1, 0]^T$, $\alpha_2 = [2, 1, 1]^T$, $\alpha_3 = [1, -1, 2]^T$ 都是 A 的属于特征值 3 的特征向量. 又设二次型 $f(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 的符号差为 2, 则矩阵 $A =$ _____.

8. (1) 设二次型 $f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz$, 用正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q} \mathbf{y}$ 将其化为标准形, 并写出 Q ;

(2) 求函数 $g(x, y, z) = \frac{2x^2 + y^2 - 4xy - 4yz}{x^2 + y^2 + z^2} (x^2 + y^2 + z^2 \neq 0)$ 的最大值, 并求出一个最大值点.

9. (1) 设 n 元实二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$, 其中 A 有特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 且满足

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

证明对任意 n 维列向量 x , 有

$$\lambda_1 x^T x \leq x^T A x \leq \lambda_n x^T x;$$

(2) 设 $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T A x$, 当 $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ 时, 求

$f(x_1, x_2, x_3)$ 的最大值.

10. 已知二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & a & -12 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ 的规范形为 z_1^2 .

(1) 求常数 a, b 的值;

(2) 求一个正交变换 $x = Qy$, 将二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为标准形.

11. 已知矩阵 $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & 0 \\ 0 & a & 6 \end{bmatrix}$ 可相似对角化.

(1) 求常数 a 的值;

(2) 求正交变换 $x = Py$, 使得二次型 $f = x^T A x$ 化为标准形, 并写出标准形.

12. 已知 $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$, 求正交变换 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 中的矩阵 P , 使得

$$f(x, y) = 2u^2 + 2\sqrt{3}uv.$$

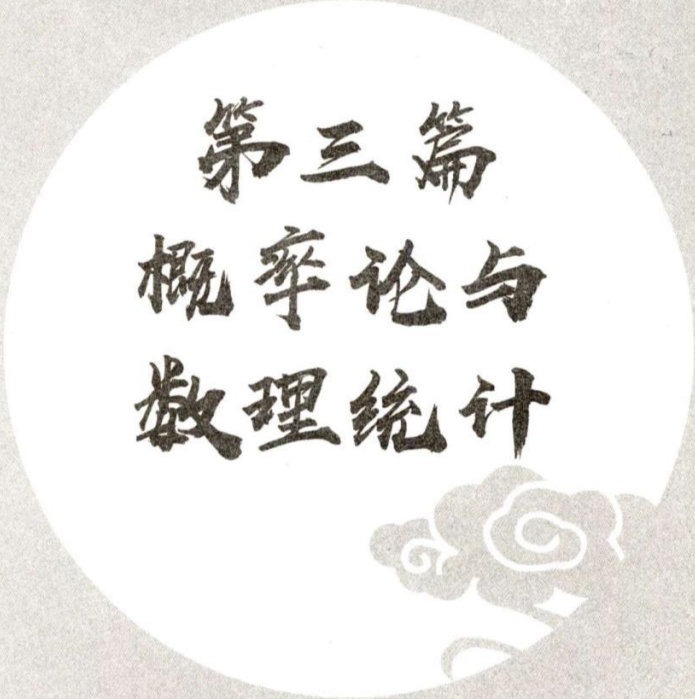
13. 设方阵 A_1 与 B_1 合同, A_2 与 B_2 合同, 证明: $\begin{bmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{bmatrix}$ 与 $\begin{bmatrix} B_1 & \\ & B_2 \end{bmatrix}$ 合同.

14. 设 A 为 m 阶实对称矩阵且正定, B 为 $m \times n$ 实矩阵, B^T 为 B 的转置矩阵. 证明: $B^T A B$ 为正定矩阵的充分必要条件是 $r(B) = n$.

15. 设 A 与 B 均为正交矩阵, 并且 $|A| + |B| = 0$. 证明: $A + B$ 不可逆.

第三篇

概率论与 数理统计



概率论与数理统计是硕士研究生招生考试考查内容之一，主要考查考生对随机规律性的基本概念、基本理论和基本方法的理解，以及运用概率统计方法分析和解决实际问题的能力。在考研数学一试卷中分值约30分。

第1章 随机事件和概率

强化训练



1. 射击三次,事件 $A_i (i=1,2,3)$ 表示第 i 次命中目标,则下列事件中表示至少命中一次的事件是().

(A) $(A_1 \cup A_2 \cup A_3) - A_1A_2 - A_1A_3 - A_2A_3 \cup (A_1A_2A_3)$

(B) $A_1 \cup (A_2 - A_1) \cup (A_3 - A_1 - A_2)$

(C) $A_1 \overline{A_2} \overline{A_3} \cup \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} \cup \overline{A_1} \overline{A_2} A_3$

(D) $\Omega - \overline{A_1 A_2 A_3}$

2. 设事件 A, B 满足 $P(B|A) = 1$, 则().

(A) A 是必然事件

(B) $P(B|\overline{A}) = 0$

(C) A 包含事件 B

(D) $P(A-B) = 0$

3. 设 A, B 为两个事件,且 $P(A) = \frac{2}{3}, P(B) = \frac{1}{2}, P(AB) = \frac{1}{3}$, 则 A 与 B 之间的关系是().

(A) A 包含 B

(B) A 与 B 相互独立

(C) A 与 B 相互对立

(D) A 与 B 互不相容

4. 设事件 A 与 B 互不相容, 则().

(A) $P(\overline{AB}) = 0$

(B) $P(AB) = P(A)P(B)$

(C) $P(A) = 1 - P(B)$

(D) $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = 1$

5. 设 A, B 是两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1, P(B|A) = P(B|\overline{A})$, 则必有().

(A) $P(A|B) = P(\overline{A}|B)$

(B) $P(A|B) \neq P(\overline{A}|B)$

(C) $P(AB) = P(A)P(B)$

(D) $P(AB) \neq P(A)P(B)$

6. 设 A, B, C 为三个随机事件, 且 $P(A \cup B) = P(A) + P(B), 0 < P(C) < 1$, 则下列结论中不一定正确的是().

(A) $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C)$

(B) $P(A \cup B|\overline{C}) = P(A|\overline{C}) + P(B|\overline{C})$

(C) $P(AC \cup BC) = P(AC) + P(BC)$

(D) A, B 互不相容

7. 某人向同一目标独立重复射击, 每次命中目标的概率为 $p (0 < p < 1)$, 则此人第 5 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为().

(A) $4p(1-p)^3$

(B) $24p(1-p)^3$

(C) $4p^2(1-p)^3$

(D) $24p^2(1-p)^3$

8. 设 A 与 B 是两个随机事件, $P(B) = 0.6$ 且 $P(A|B) = 0.5$, 则 $P(A \cup \overline{B}) = ()$.

(A) 0.1

(B) 0.3

(C) 0.5

(D) 0.7

9. 设10件产品中有4件不合格品,从中任取2件,已知所取的2件产品中有1件是不合格品,则另1件也是不合格品的概率是().

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{2}{5}$

10. 设口袋中有10个球,其中6个红球,4个白球,每次不放回地从中任取一个,取两次,若取出的两个球中有1个是白球,则两个都是白球的概率为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{5}$ (D) $\frac{1}{6}$

11. 设 X, Y 为连续型随机变量, $P\{X \leq 0\} = \frac{1}{4}$, $P\{Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$, $P\{\max\{X, Y\} > 0\} = \frac{3}{4}$, 则 $P\{XY \leq 0\} = ()$.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{3}{4}$

12. 设 A, B, C 是三个随机事件, $P(ABC) = 0$, 且 $0 < P(A), P(B), P(C) < 1$, 则().

- (A) $P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$
 (B) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$
 (C) $P(A \cup B | C) = P(A | C) + P(B | C)$
 (D) $P(A \cup B | \bar{C}) = P(A | \bar{C}) + P(B | \bar{C})$

13. 以下结论错误的是().

- (A) 设 A, B 是两个事件, 若 $0 < P(B) < 1$, $P(A | B) + P(\bar{A} | \bar{B}) = 1$, 则 A, B 相互独立
 (B) 设 A, B 是两个事件, 若 A, B 满足 $P(A) > 0$, $P(B | A) = 1$, 则 $P(A - B) = 0$
 (C) 设 A, B 是两个事件, 则 $(A - B) \cup B = A \cup B$
 (D) 若当事件 A, B 同时发生时, 事件 C 必发生, 则 $P(C) < P(A) + P(B) - 1$

14. 设 $P(B) > 0$, A_1, A_2 互不相容, 则下列各式中不一定正确的是().

- (A) $P(A_1 A_2 | B) = 0$
 (B) $P(A_1 \cup A_2 | B) = P(A_1 | B) + P(A_2 | B)$
 (C) $P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 | B) = 1$
 (D) $P(\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 | B) = 1$

15. 设 A, B 是随机事件且满足 $P(A | B) = P(B | A) = \frac{2}{3}$, $P(\bar{A}) = \frac{3}{4}$, 则().

- (A) A, B 不独立且 $P(A \cup B) = \frac{1}{3}$ (B) A, B 不独立且 $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$
 (C) A, B 独立且 $P(A \cup B) = \frac{1}{4}$ (D) A, B 独立且 $P(A \cup B) = \frac{3}{4}$

16. 设10张彩票中有3张有奖. 现已卖出1张, 在余下的9张彩票中任取两张发现均没有奖, 则已经卖出的那张彩票有奖的概率为_____.

17. 有5封信投入4个信箱, 则有一个信箱有3封信的概率为_____.

18. 设一批产品中一、二、三等品各占60%, 30%, 10%, 从中随意取出一件, 结果不是三等品, 则取到的是一等品的概率为_____.

19. 设工厂A和工厂B的产品次品率分别为1%和2%, 现从由A厂和B厂的产品分别占60%和40%的一批产品中随机抽取一件, 发现是次品, 则该次品属于A厂产品的概率是_____.

20. 设 A 与 B 是两个随机事件, $P(A) = 0.6$ 且 $P(B | \bar{A}) = 0.5$, 则 $P(\bar{A} \bar{B}) =$ _____.

21. 一个袋中装有 a 个白球, b 个黑球, 每次摸一球且摸后放回, 重复 n 次. 在已知摸到白球 k 次的条件下, 事件 B 发生的概率为 $\frac{k}{n}$, 则 $P(B) =$ _____.

22. 设两个相互独立的事件 A 与 B 至少有一个发生的概率为 $\frac{8}{9}$, 且 A 发生 B 不发生的概率与 B 发生 A 不发生的概率相等, 则 $P(A) =$ _____.

23. 设事件 A, B, C 两两独立, 三个事件不能同时发生, 且它们的概率相等, 则 $P(A \cup B \cup C)$ 的最大值为 _____.

24. 事件 A 与 B 相互独立, $P(A) = a, P(B) = b$, 如果事件 C 发生必然导致 A 与 B 同时发生, 那么 A, B, C 都不发生的概率为 _____.

25. 设随机事件 A, B, C 满足 $P(A|B) + P(\bar{A}|\bar{B}) = 1$, 且 $P(A\bar{B}) = P(\bar{A}B) = \frac{1}{4}, C = A \cup B$, 则 $P(AB|C) =$ _____.

26. 设 A, B, C 是三个随机事件, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}, P(AB) = P(CB) = 0, P(AC) = \frac{1}{8},$$

则 A, B, C 中至少有一个发生的概率为 _____.

27. 从 $[0, 1]$ 中随机地取两个数, 则其积大于 $\frac{1}{4}$, 其和小于 $\frac{5}{4}$ 的概率为 _____.

28. 某枪手进行独立重复射击, 已知在 3 次射击中至少有 1 次命中目标的概率为 0.973, 则直到第 5 次射击才第 2 次命中目标的概率为 _____.

29. 甲、乙两人射击, 甲击中目标的概率为 80%, 乙击中目标的概率为 70%, 两人同时射击, 两人是否击中目标相互独立, 求:

- (1) 甲、乙两人都击中的概率;
- (2) 甲、乙两人至少有一人击中的概率;
- (3) 甲、乙两人恰有一人击中的概率;
- (4) 甲、乙两人都没有击中的概率.

30. 在 10 到 99 的所有两位数中, 任取一个数, 求这个数能被 2 或 3 整除的概率.

31. 10 件产品中有 5 件一级品, 3 件二级品, 2 件次品, 无放回地抽取, 求取到二级品之前取到一级品的概率.

32. 甲、乙两个人轮流投篮, 甲先投, 甲每轮只投篮 1 次, 而乙每轮投篮 2 次, 先投中者为胜. 已知甲、乙每次投篮命中率分别为 $p, 0.5$, 且每人命中与否相互独立, 求 p 为何值时, 甲、乙两个人胜率相同.

33. 某彩票每周开奖一次, 每次提供十万分之一的中奖机会, 且各周开奖是相互独立的. 某彩民每周买一次彩票, 坚持十年 (每年 52 周), 求他从未中奖的概率.

34. 验收成箱包装的玻璃器皿, 每箱 24 只装. 统计资料表明, 每箱最多有 2 只残品, 且含 0, 1, 2 件残品的箱各占 80%, 15%, 5%. 现在随机抽取一箱, 随机检验其中 4 只, 若未发现残品则通过验收, 否则要逐一检验并更换. 求:

- (1) 一次通过验收的概率;
- (2) 通过验收的箱中确实无残品的概率.

35. 某学生想借《张宇高等数学 18 讲》, 决定到三个图书馆去借, 对每一个图书馆而言, 有无这本

书的概率均为 0.5;若有,能否借到的概率也均为 0.5. 设这三个图书馆采购、出借图书相互独立,求该生能借到此书的概率.

巩固提高



1. 某电子设备制造厂所用的元件是由三家元件制造厂提供的. 根据以往的记录有以下的数据:

元件制造厂	次品率	提供元件的份额
1	0.02	0.15
2	0.01	0.80
3	0.03	0.05

设这三家工厂的元件在仓库中是混合堆放的,且无区别标志. 现从仓库中随机取一只元件,若已知取到的是次品,则最有可能来自().

- (A) 元件制造厂 1 (B) 元件制造厂 2
(C) 元件制造厂 3 (D) 无法判断

2. 设三个随机事件 A, B, C 两两独立且 $P(A) = P(B) = P(C)$, ABC 为不可能事件,则 $P(\overline{A}\overline{B}\overline{C})$ 的最小值为().

- (A) $\frac{1}{16}$ (B) $\frac{1}{8}$ (C) $\frac{1}{4}$ (D) $\frac{1}{2}$

3. 设 $P(A) = \frac{2}{5}, P(B) = \frac{3}{5}$, 则 $P(B | \overline{A})$ 的最小值为().

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

4. 设 A, B, C 为三个事件, A 与 B 独立, $P(C) = 0$, 则 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$ ().

- (A) 必相互独立 (B) 两两独立但不一定相互独立
(C) 不一定两两独立 (D) 必不两两独立

5. 对任意事件 A, B , 下列结论正确的是().

- (A) $P(A)P(B) \geq P(A \cup B)P(AB)$
(B) $P(A) + P(B) \leq 2P(AB)$
(C) $P(A) + P(AB) \geq P(A \cup B)$
(D) $P(A) + P(B) \leq P(A \cup B)P(AB)$

6. 以下 4 个结论:

① 教室中有 $r (r \leq 365)$ 个学生, 则他们的生日都不相同的概率是 $\frac{A_{365}^r}{365^r}$;

② 教室中有 4 个学生, 近似看作每月天数相同, 则至少有 2 个人的生日在同一个月是 $\frac{41}{96}$;

③ 将 C, C, E, E, I, N, S 共 7 个字母随机地排成一行, 则恰好排成英文单词 *SCIENCE* 的概率是 $\frac{1}{315}$;

④ 袋中有编号为 1 到 10 的 10 个球,今从袋中任取 3 个球,则 3 个球的最小号码为 5 的概率为 $\frac{1}{12}$.

正确的个数为().

(A)1

(B)2

(C)3

(D)4

7. 已知甲、乙两袋中装有同种球,其中甲袋中装有 10 个红球和 10 个白球,乙袋中装有 10 个红球.从甲袋中一次性取 10 个球放入乙袋,则从乙袋中任取一球是白球的概率为_____.

8. 证明:若三个事件 A, B, C 相互独立,则 $A \cup B$ 及 $A - B$ 都与 C 相互独立.

9. 设有大小相同、标号分别为 1, 2, 3, 4, 5 的五个球,同时有标号为 1, 2, $\dots$, 10 的十个空盒.将五个球随机放入这十个空盒中,设每个球放入任何一个盒子的可能性都是一样的,并且每个空盒可以放多个球,计算下列事件的概率:

(1) $A = \{\text{某指定的五个盒子中各有一个球}\}$;

(2) $B = \{\text{每个盒子中最多只有一个球}\}$;

(3) $C = \{\text{某个指定的盒子不空}\}$.

10. 设有 n 个不同的质点,每个质点等可能地落到 N ($n \leq N$) 个格子中的每个格子里,设每个格子容纳质点数是没有限制的.求下列事件的概率:

(1) $A = \{\text{某指定的 } n \text{ 个格子中各有一个质点}\}$;

(2) $B = \{\text{任意 } n \text{ 个格子中各有一个质点}\}$;

(3) $C = \{\text{指定的一个格子中有 } m$ ($m \leq n$) $\text{个质点}\}$.

第2章 一维随机变量及其分布

强化训练



1. 设连续型随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 且 $f(x) = f(-x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对于任意实数 a , 有().

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a f(x) dx$

(B) $F(-a) = -F(a)$

(C) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a f(x) dx$

(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

2. 已知 $F(x), G(x)$ 分别是某个随机变量的分布函数, 下列函数中不一定为某个随机变量分布函数的是().

(A) $0.4F(x) + 0.6G(x)$

(B) $F(x)G(x)$

(C) $F(x^3)$

(D) $2F(x) - G(x)$

3. 设 X_1, X_2 为相互独立的随机变量, 分布函数分别为 $F_1(x), F_2(x)$, 则下列选项一定是某一随机变量的分布函数的为().

(A) $F_1(x) + F_2(x)$

(B) $F_1(x) - F_2(x)$

(C) $F_1(x)F_2(x)$

(D) $\frac{F_1(x)}{F_2(x)}$

4. 若随机变量 X 存在正概率点, 即存在一点 a , 使得 $P\{X = a\} > 0$, 则 X 为().

(A) 连续型随机变量

(B) 离散型随机变量

(C) 非连续型随机变量

(D) 非离散型随机变量

5. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 概率密度为 $f(x) = af_1(x) + bf_2(x)$, 其中 $f_1(x)$ 是正态分布 $N(0, \sigma^2)$ 的概率密度, $f_2(x)$ 是参数为 λ 的指数分布的概率密度, 已知 $F(0) = \frac{1}{8}$, 则().

(A) $a = 1, b = 0$

(B) $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{4}$

(C) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{2}$

(D) $a = \frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x, & 0 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 随机变量 $Y = X^2$ 的概率密度记为

$f_Y(y)$, 则 $f_Y(2) = ()$.

(A) $\frac{1}{4}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

(D) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

7. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} Ae^{-x}, & x > \lambda, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ($\lambda > 0$), 则概率 $P\{\lambda < X < \lambda + a\}$

($a > 0$) 的值().

(A) 与 a 无关, 随 λ 增大而增大

(B) 与 a 无关, 随 λ 增大而减小

(C) 与 λ 无关, 随 a 增大而增大

(D) 与 λ 无关, 随 a 增大而减小

8. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0, 1)$, 对给定的 α ($0 < \alpha < 1$), 数 u_α 满足 $P\{X > u_\alpha\} = \alpha$, 若 $P\{|X| < x\} = \alpha$, 则 x 等于().

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$

(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(D) $u_{1-\alpha}$

9. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 则随着 σ 单调增加, $P\{|X - \mu| < 1\}$ ().

(A) 单调增加

(B) 单调减少

(C) 不变

(D) 变化不确定

10. 若随机变量 X 服从正态分布 $N(2, \sigma^2)$, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ ().

(A) 0.2

(B) 0.3

(C) 0.5

(D) 0.7

11. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $F(x)$ 为其分布函数, $\mu > 0$, 则对于任意实数 a , 有().

(A) $F(-a) + F(a) > 1$

(B) $F(-a) + F(a) = 1$

(C) $F(-a) + F(a) < 1$

(D) $F(\mu - a) + F(\mu + a) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

12. 设随机变量 X 与 Y 均服从正态分布, $X \sim N(\mu, 4^2)$, $Y \sim N(\mu, 5^2)$, 记 $p_1 = P\{X \leq \mu - 4\}$, $p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\}$, 则().

(A) 对任意实数 μ , 都有 $p_1 = p_2$

(B) 对任意实数 μ , 都有 $p_1 < p_2$

(C) 只对 μ 的个别值, 才有 $p_1 = p_2$

(D) 对任意实数 μ , 都有 $p_1 > p_2$

13. 设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 且一元二次方程 $y^2 + 4y + X = 0$ 无实根的概率为 $\frac{1}{2}$, 则 $\mu =$ _____.

14. 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 且概率密度为

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{6\pi}} e^{-\frac{x^2 - 4x + 4}{6}}, x \in (-\infty, +\infty),$$

则 μ, σ^2 分别为 _____.

15. 设某地电压为服从正态分布 $N(220, 20^2)$ 的随机变量, 某种元件在电压不超过 200 伏时损坏的概率为 0.05, 在电压超过 200 伏但不超过 240 伏时损坏的概率为 0.1, 在电压超过 240 伏时损坏的概率为 0.15. 若电路中共有 3 个该种元件, 每个元件是否损坏是相互独立的, 且至少要有 2 个元件损坏电路才发生故障, 则电路发生故障的概率为 _____.

16. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的泊松分布, 且 $P\{X \leq 1\} = 4P\{X = 2\}$, 则 $P\{X = 3\} =$ _____.

17. 已知每次试验“成功”的概率为 p , 现进行 n 次独立重复试验, 则在至少“成功”一次的条件下, “成功”不止一次的概率为 _____.

18. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布, 对 X 作 3 次独立重复观察, 至少有 1 次观测值大于 2 的概率为 $\frac{7}{8}$, 则 $\lambda =$ _____.

19. 设连续型随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 1 - (1+x)e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求:(1) X 的概率密度;

(2) $P\{|X| \leq 1\}, P\{X > 2\}, P\{1 < X \leq 2\}$.

20. 已知随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \frac{1}{2}, & -1 \leq x < 0, \\ \frac{5}{7}, & 0 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2, \end{cases}$$

求 X 的分布律, 并计算 $P\{X < 0\}, P\{X = 1\}, P\{-1 < X < 3\}, P\{-2 \leq X < 1 | X < 2\}$.

21. 甲、乙两人进行射箭比赛, 约定甲先射, 若射不中, 乙射, 若射不中再由甲射, 以此类推, 谁先射中谁获胜, 比赛终止. 已知甲、乙射中的概率分别为 0.4 和 0.6. 若记 $\{Y = 1\}$ 为甲获胜, 记 $\{Y = 0\}$ 为乙获胜, 求 Y 的概率分布.

22. 设在某时段进入某景区游览的游客人数服从参数 $\lambda = 30$ 的泊松分布, 每位游客乘坐观光缆车的概率均为 0.6, 且每位游客是否乘坐观光缆车是相互独立的. 求进入该景区的游客乘坐观光缆车人数的概率分布及数学期望与方差.

23. 抛一均匀硬币, 若正面向上, 则在区间 $[0, 1)$ 上任取一数 X ; 若反面向上, 则在区间 $[2, 4)$ 上任取一数 X , 求 X 的分布函数.

巩固提高



1. 设随机变量 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且均服从 0-1 分布: $P\{X_i = 1\} = p, P\{X_i = 0\} = 1 - p (i = 1, 2, 3, 4; 0 < p < 1)$, 已知 2 阶行列式 $\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的值大于零的概率等于 $\frac{1}{4}$, 则 $p =$ ().

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

(D) $\frac{1}{\sqrt{2}}$

2. 设 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$ 分别为随机变量 X_1, X_2 的分布函数, 且存在点 x_0 使得 $F_1(x_0) > F_2(x_0)$. 若 $X_i \sim B(1, p_i) (0 < p_i < 1), i = 1, 2$, 则必有 ().

(A) $p_1 = p_2$

(B) $p_1 + p_2 = 1$

(C) $p_1 < p_2$

(D) $p_1 > p_2$

3. 市场上某产品由甲、乙两厂各生产 $\frac{1}{2}$, 已知甲厂和乙厂的产品指标分别服从分布函数 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 现从市场上任取一件产品, 则其指标服从的分布函数为 _____.

4. 某元件的工作寿命 X (小时) 服从参数为 λ 的指数分布.

(1) 求该元件正常工作超过 t 小时的概率;

(2) 已知该元件已正常工作 10 个小时, 求在此基础上再工作超过 10 小时的概率 ($\lambda = 0.01$);

(3) 若系统装有 10 个这样的电子元件, 且是否正常工作相互独立, 当 10 个元件都无故障工作时, 系统工作状态正常, 求系统正常工作超过 20 小时的概率.

5. 设随机变量 X 满足不等式 $1 \leq X \leq 4$, 且 $P\{X = 1\} = \frac{1}{4}, P\{X = 4\} = \frac{1}{3}$, 在区间 $(1, 4)$ 内

服从均匀分布. 求 X 的分布函数.

6. 设电子管寿命 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{100}{x^2}, & x > 100, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

若一台收音机上装有三个这种电子管, 且是否正常工作相互独立. 求:

- (1) 使用的最初 150 小时内, 至少有两个电子管被烧坏的概率;
- (2) 在使用的最初 150 小时内烧坏的电子管数 Y 的分布律;
- (3) Y 的分布函数.

7. 设顾客在某银行窗口等待服务的时间 X (单位: 分钟) 服从参数为 $\frac{1}{5}$ 的指数分布. 若等待时间超过 10 分钟, 他就离开. 设他一个月内要来银行 5 次, Y 表示一个月内他没有等到服务而离开窗口的次数, 求 Y 的分布律及 $P\{Y \geq 1\}$.

8. 向半径为 r 的圆内随机抛一点, 求此点到圆心的距离 X 的分布函数 $F(x)$, 并求 $P\left\{X > \frac{2r}{3}\right\}$.

第3章 一维随机变量函数的分布

强化训练



1. 设随机变量 X 服从 $(0,1)$ 上的均匀分布, 则 $Y = -\ln X$ 服从().

(A) 几何分布

(B) 标准正态分布

(C) t 分布

(D) 指数分布

2. 设随机变量 $X \sim U[-1,1]$, 函数 $y = g(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & -1 \leq x < 0, \end{cases}$ 则 $Y = g(X)$ 的分布函数的间断点个数为().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

3. 设 $X \sim N(0,1)$, $Y = X + |X|$, Y 的分布函数为 $F_Y(y)$, 则 $F_Y(y)$ 的间断点个数是().

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

4. 设 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $F(x)$ 为其分布函数, 则随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数().

(A) 处处可导

(B) 恰有 1 个不可导点

(C) 恰有 2 个不可导点

(D) 恰有 3 个不可导点

5. 设 X 是区间 $[0,1]$ 上的连续型随机变量, 已知 $P\{X \leq 0.3\} = 0.8$, 且 $Y = 1 - X$, 若有 $P\{Y \leq c\} = 0.2$, 则常数 $c =$ _____.

6. 设随机变量 X 服从 $(0,2)$ 上的均匀分布, 则随机变量 $Y = X^2$ 在 $(0,4)$ 内的概率密度 $f_Y(y) =$ _____.

7. 设随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 令 $Y = \max\{X, 1\}$, 求:

(1) Y 的分布函数;

(2) $P\{Y = 1\}$.

8. 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{2}x, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$ 求:

(1) $P\{X = 0\}, P\{X = 1\}$;

(2) EX ;

(3) $Y = F(X)$ 的分布函数.

9. 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 为偶函数, 证明: 随机变量 $-X$ 与 X 有相同的概率密度.

10. 设 X 是离散型随机变量, 其分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -2, \\ 0.2, & -2 \leq x < -1, \\ 0.35, & -1 \leq x < 0, \\ 0.6, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

令 $Y = |X+1|$, 求随机变量 Y 的分布律.

11. 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & 0 < x < e-1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Y = \sqrt{X}$ 的概率密度.

12. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布, 求随机变量 $Y = 1 - e^{-\lambda X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

13. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt{x^2}}, & 1 \leq x < 8, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ $F(x)$ 是 X 的分布函数, 求随机变

量 $Y = F(X)$ 的分布函数.

巩固提高



1. 设随机变量 X 与 $-X$ 服从同一均匀分布 $U[a, b]$, 已知 X 的概率密度 $f(x)$ 的平方 $f^2(x)$ 也是概率密度, 则 $b = (\quad)$.

(A) $-\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{2}$

(C) -2

(D) 2

2. (1) 若随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3	4
P	0.1	0.2	0.3	0.4

令随机变量 $Y = g(X) = \frac{1}{2}[1 + (-1)^X]$, 求 Y 的概率分布;

(2) 若 $X \sim B(n, p)$, 求 X 取值为偶数时的概率 $P\{X \text{ 为偶数}\}$.

第4章 多维随机变量及其分布

强化训练



1. 设随机变量 X, Y 相互独立且均服从参数为 1 的指数分布, 则().
 (A) $P\{X = Y\} = 1$ (B) $P\{X < Y\} = 0$
 (C) $P\{X = Y\} = 0$ (D) $P\{X + Y < 0\} = \frac{1}{2}$
2. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且分别服从参数为 3 和 2 的泊松分布, 则 $P\{X + Y = 0\} = ()$.
 (A) e^{-5} (B) e^{-3} (C) e^{-2} (D) e^{-1}
3. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, \sigma_1^2), Y \sim N(0, \sigma_2^2)$, 则 $P\{|X - Y| < 1\} ()$.
 (A) 随 σ_1 的增加而增加, 随 σ_2 的增加而减少 (B) 随 σ_1 的增加而减少, 随 σ_2 的减少而减少
 (C) 随 σ_1 的增加而减少, 随 σ_2 的减少而增加 (D) 随 σ_1 的增加而增加, 随 σ_2 的减少而减少
4. 已知二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	a	0.4
1	0.1	b

若随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立, 令 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$, 则 $P\{U + V = 1\} = ()$.

- (A) 0.1 (B) 0.3 (C) 0.5 (D) 0.7
5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$, 若 $P\{X > Y\} < \frac{1}{2}$, 则().
 (A) $\mu_1 < \mu_2$ (B) $\mu_1 > \mu_2$ (C) $\sigma_1 < \sigma_2$ (D) $\sigma_1 > \sigma_2$

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	-1	1
0	$\frac{1}{15}$	p
1	q	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$

若 X 与 Y 相互独立, 则 $(p, q) = (\quad)$.

- (A) $\left(\frac{2}{10}, \frac{1}{15}\right)$ (B) $\left(\frac{1}{15}, \frac{2}{10}\right)$
(C) $\left(\frac{1}{10}, \frac{2}{15}\right)$ (D) $\left(\frac{2}{15}, \frac{1}{10}\right)$

7. 随机变量 (X, Y) 的分布律如下,

X \ Y	y_1	y_2
x_1	p_{11}	p_{12}
x_2	p_{21}	p_{22}

则 X 与 Y 相互独立的充要条件是().

- (A) $\begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ (B) $r \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = 1$
(C) $\frac{p_{11}}{p_{21}} \neq \frac{p_{12}}{p_{22}}$ (D) $p_{ij} \neq 0 (i, j = 1, 2)$

8. 设随机变量 X 与 Y 有相同的概率分布

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix},$$

并且满足 $P\{XY = 0\} = 1$, 则 $P\{X = Y\} = (\quad)$.

- (A) 0 (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) 1

9. 设二维随机变量 (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 其中 $D = \{(x, y) | -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 则关于 t 的方程 $t^2 + 2Xt + Y = 0$ 无实数根的概率为().

- (A) $\frac{1}{3}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{3}{4}$

10. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 则方程 $x^2 + 2Xx + Y^2 = 0$ 有实根的概率为().

- (A) 1 (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{4}$

11. 设 (X, Y) 服从二维正态分布 $N(0, 1; 1, 1; 0)$, $\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数, 则 $P\{XY < 0\} = (\quad)$.

- (A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\Phi(1)$ (D) $1 - \Phi(1)$

12. 设二维随机变量 (X, Y) 在 $G = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{2} < x < 0, 0 < y < 2x + 1 \right\}$ 上服从均匀分布, 则 $P\left\{-\frac{1}{4} < X < 0 \mid \frac{1}{2} < Y < 1\right\} = \underline{\hspace{2cm}}$.

13. 已知随机变量 X 和 Y 的分布律为

$$X \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}, Y \sim \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

且 $P\{XY=1\}=\frac{1}{2}$, 则 (X,Y) 的分布律为_____.

14. 设随机变量 X 服从 $[-3,3]$ 上的均匀分布, $Y=X^2$, $F(x,y)$ 为 X 与 Y 的联合分布函数, 则 $F(1,4)=$ _____.

15. 设随机变量 X,Y,Z 相互独立且都服从参数为 2 的指数分布, $U=\max\{X,Y,Z\}$, 则 $P\{U<1\}=$ _____.

16. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}(y-x)e^{-y}, & |x|<y<+\infty, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求: (1) (X,Y) 分别关于 X,Y 的边缘概率密度;

(2) 在条件 $X=x$ 下随机变量 Y 的条件概率密度.

17. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6x, & 0<x<y<1, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 求 $P\{X+Y<1\}$;

(2) 求 X 和 Y 的边缘概率密度;

(3) 在 $X=\frac{1}{3}$ 的条件下, 求 $0<Y<\frac{1}{2}$ 的概率.

18. 设袋中有 5 个球, 其中有 2 个红球, 3 个白球, 每次从袋中任意抽取 1 个, 抽取两次, 定义随机变量 X,Y 如下:

$$X=\begin{cases}1, & \text{第一次抽取的是红球,} \\ 0, & \text{第一次抽取的是白球;} \end{cases} Y=\begin{cases}1, & \text{第二次抽取的是红球,} \\ 0, & \text{第二次抽取的是白球.}\end{cases}$$

若采取无放回抽取, 求:

(1) (X,Y) 的分布律和边缘分布律;

(2) $P\{X\geq Y\}$.

19. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}Ae^{-2x}, & x\geq 0, 0\leq y\leq 1, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

求: (1) 常数 A ;

(2) (X,Y) 的分布函数.

20. 设 X 关于 Y 的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\frac{3x^2}{y^3}, & 0<x<y, \\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

而 Y 的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}5y^4, & 0<y<1, \\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$$

求 $P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}$.

21. 设 (X, Y) 服从 $G = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上的均匀分布, 求在 $Y = y$ 的条件下 X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$.

巩固提高



1. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1+xy}{4}, & |x| < 1, |y| < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则().

- (A) X 与 Y 相互独立, X^2 与 Y^2 也相互独立
- (B) X 与 Y 相互独立, X^2 与 Y^2 不相互独立
- (C) X 与 Y 不相互独立, X^2 与 Y^2 相互独立
- (D) X 与 Y 不相互独立, X^2 与 Y^2 也不相互独立

2. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 证明 X^2 与 Y^2 也相互独立.

3. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ x^2 y^2, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ x^2, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ y^2, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

求: (1) $P\left\{0 < X < \frac{1}{2}, \frac{1}{4} < Y < 1\right\}, P\left\{0 \leq X < \frac{1}{2} \mid \frac{1}{4} < Y < 1\right\}$;

(2) $P\{X \leq Y\}, P\{X = Y\}$.

4. 已知随机变量 X 的概率分布为 $P\{X = i\} = \frac{1}{4} (i = 1, 2, 3, 4)$, 及 $X = i$ 的条件下 Y 的条件分布

布 $P\{Y = j \mid X = i\} = \frac{1}{5-i} (j = i, i+1, \dots, 4)$.

求: (1) X 和 Y 的联合分布律;

(2) 在 $Y = 3$ 的条件下 X 的条件分布.

5. 设二维连续型随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} Ce^{-(x+y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) C 的值;

(2) (X, Y) 的分布函数;

(3) (X, Y) 落在区域 G 内的概率, 其中 $G = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2-2x\}$.

6. 已知二维连续型随机变量 (X, Y) 的分布函数为

$$F(x, y) = \begin{cases} 0, & x < 0 \text{ 或 } y < 0, \\ x^3 y^2, & 0 \leq x < 1, 0 \leq y < 1, \\ x^3, & 0 \leq x < 1, y \geq 1, \\ y^2, & x \geq 1, 0 \leq y < 1, \\ 1, & x \geq 1, y \geq 1. \end{cases}$$

求 (X, Y) 的边缘分布函数, 并讨论 X 与 Y 的独立性.

第5章 多维随机变量函数的分布

强化训练



1. 已知随机变量 (X_1, X_2) 的概率密度为 $f_1(x_1, x_2)$, 设 $Y_1 = 2X_1, Y_2 = \frac{1}{3}X_2$, 则随机变量 (Y_1, Y_2) 的概率密度 $f_2(y_1, y_2) = (\quad)$.

(A) $f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$

(B) $\frac{3}{2}f_1\left(\frac{y_1}{2}, 3y_2\right)$

(C) $f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$

(D) $\frac{2}{3}f_1\left(2y_1, \frac{y_2}{3}\right)$

2. 设随机变量 X 和 Y 独立同分布, 且 X 的分布函数为 $F(x)$, 则 $Z = \min\{X, Y\}$ 的分布函数为 $(\quad)$.

(A) $F^2(z)$

(B) $F(x)F(y)$

(C) $1 - [1 - F(z)]^2$

(D) $[1 - F(x)][1 - F(y)]$

3. 某并联系统由三个元件构成, 三个元件同时开始工作, 第一个元件的寿命 X (单位: 小时) 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 第二个元件的寿命 Y (单位: 小时) 服从参数为 $\mu, \sigma^2 (\sigma > 0)$ 的正态分布, 第三个元件工作 2 小时即停止, 且三个元件的工作相互独立, 记该系统寿命为 Z , 则 Z 的分布函数 $F_Z(z) (\quad)$.

(A) 连续

(B) 恰有一个间断点

(C) 恰有两个间断点

(D) 恰有三个间断点

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(0, 1), Y \sim B(n, p) (0 < p < 1)$, 则 $X+Y$ 的分布函数 $(\quad)$.

(A) 为连续函数

(B) 恰有 $n+1$ 个间断点

(C) 恰有 1 个间断点

(D) 有无穷多个间断点

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 X 服从二项分布 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, Y 服从指数分布 $E(1)$, 则概率 $P\{X+Y \geq 1\} = (\quad)$.

(A) e^{-1}

(B) $1 - e^{-1}$

(C) $\frac{1}{2}(1 + e^{-1})$

(D) $\frac{1}{2}(1 - e^{-1})$

6. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

Y X	1	2	3
0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

则随机变量 $Z = Y \cdot \min\{X, Y\}$ 的分布律为 _____.

7. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从参数为 1 的指数分布, 则随机变量 $Z = \frac{Y}{X}$ 的概率密度为 _____.

8. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y)$, 则随机变量 $(2X, Y+1)$ 的概率密度 $f_1(x, y) =$ _____.

9. 设 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1) 求 $Z = X - 2Y$ 的概率密度;

(2) 求 $P\left\{X \leq \frac{3}{4} \mid Y = \frac{1}{2}\right\}$.

10. 设 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, -y \leq x \leq y\}$, 二维随机变量 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布, 求:

(1) (X, Y) 分别关于 X, Y 的边缘概率密度;

(2) 随机变量 $Z = X - Y$ 的概率密度.

11. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Ax^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} Z =$

$X^2 + Y^2$, 求:

(1) 常数 A 的值;

(2) Z 的概率密度.

12. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} Ax + By, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1-x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 且

$P\{Y > X\} = \frac{5}{12}$, 记 $Z = \min\{X, Y\}$, 求:

(1) 常数 A, B 的值;

(2) Z 的概率密度.

13. 设随机变量 Y 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布, 随机变量

$$X_k = \begin{cases} 0, & Y \leq k, \\ 1, & Y > k \end{cases} \quad (k = 1, 2).$$

求: (1) 二维随机变量 (X_1, X_2) 的概率分布;

(2) 随机变量 $Z = X_1 - X_2$ 的概率分布.



巩固提高

1. 设 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 下列各式都有意义.

① $E(XY) = EX \cdot EY$;

② $f_{X|Y}(x|y) = f_X(x)$;

③ $P\{X > x, Y > y\} = 1 - F_X(x)F_Y(y)$;

④ 令 $Z = X + Y$, 则 $F_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(z-y)f_Y(y)dy$.

若 X 与 Y 独立, 则上式中必成立的个数为().

(A) 1

(B) 2

(C) 3

(D) 4

2. 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 独立同分布于 $f_i(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} i = 1, 2, 3$. 记 $X = \max\{\min\{X_1, X_2\}, X_3\}$, 则当 $x > 0$ 时, X 的分布函数 $F(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-(x+y)}, & 0 < x < y, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$

(1) 求 $f_X(x), f_Y(y)$, 并判断 X 与 Y 是否独立;

(2) 记 $U = X, V = Y - X$, 求 (U, V) 的分布函数 $F(u, v)$, 并判断 U, V 是否独立.

4. 设一元二次方程 $x^2 - Xx + Y = 0$ 的两个根相互独立, 且都服从 $(0, 2)$ 上的均匀分布, 分别求 X 与 Y 的概率密度.

5. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 都服从均匀分布 $U(0, 1)$. 求 $Z = |X - Y|$ 的概率密度及 $P\left\{-\frac{1}{2} < X - Y < \frac{1}{2}\right\}$.

6. 设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

求: (1) $Z = |X| + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$;

(2) EZ .

7. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立, 且 X_i 服从参数为 $\lambda_i (\lambda_i > 0)$ 的指数分布, 其概率密度为

$$f_i(x) = \begin{cases} \lambda_i e^{-\lambda_i x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} i = 1, 2, \dots, n,$$

求 $P\{X_1 = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}\}$.

8. 设 $X_1 \sim P(\lambda_1), X_2 \sim P(\lambda_2)$, 且 X_1 与 X_2 相互独立.

(1) 证明 $X_1 + X_2$ 的分布为 $P(\lambda_1 + \lambda_2)$;

(2) 求在 $X_1 + X_2 = n (n \geq 1)$ 的条件下, X_1 的条件分布.

9. 设随机变量 X, Y 相互独立, 且 $P\{X = 0\} = P\{X = 1\} = \frac{1}{2}, P\{Y \leq x\} = x, 0 < x \leq 1$. 求 $Z = XY$ 的分布函数.

10. 设随机变量 X, Y 相互独立且同分布, X 的概率分布为 $P\{X=k\} = \frac{1}{3} (k=1, 2, 3)$, $Z \sim U[0, 1]$, $V = \min\{X, Y\}$, $T = Z + V$. 求:

(1) V 的概率分布;

(2) T 的分布函数.

11. 某商品一周的需求量 X 是随机变量, 已知其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} xe^{-x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

设每周的需求量相互独立, 以 U_k 表示 k 周的总需求量. 求:

(1) U_2 和 U_3 的概率密度 $f_k(x) (k=2, 3)$;

(2) 接连三周中的周最大需求量的概率密度 $f_{(3)}(x)$.

第6章 数字特征

强化训练



1. 设随机变量 $X \sim E(1)$, 记 $Y = \max\{X, 1\}$, 则 $EY = (\quad)$.
(A) 1 (B) $1 - e^{-1}$ (C) $1 + e^{-1}$ (D) e^{-1}
2. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 若 $P\{X > DX\} = (P\{X > EX\})^3$, 则 $\lambda = (\quad)$.
(A) 3 (B) $\frac{3}{2}$ (C) $\frac{2}{3}$ (D) $\frac{1}{3}$
3. 设随机变量 $X \sim N(1, 1)$, $Y \sim N(-1, 1)$, 且 X, Y 相互独立, 则下列结论不正确的是 $(\quad)$.
(A) (X, Y) 服从二维正态分布 (B) $2X + Y$ 服从正态分布
(C) $P\{2X + Y > 1\} = \frac{1}{2}$ (D) $2X + Y$ 与 $X + 2Y$ 相互独立
4. 设随机变量 X 在 $[-1, 1]$ 上服从均匀分布, $Y = X^3$, 则 X 与 $Y (\quad)$.
(A) 不相关且相互独立 (B) 不相关且不独立
(C) 相关且相互独立 (D) 相关且不独立
5. 设随机变量 X 服从参数为 $\frac{3}{4}$ 的 0—1 分布, 随机变量 Y 服从参数为 $\frac{1}{4}$ 的 0—1 分布, 且 $P\{X = 0, Y = 0\} = \frac{1}{8}$, 则 $E(XY) = (\quad)$.
(A) $\frac{1}{8}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{3}{8}$ (D) $\frac{1}{2}$
6. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$ 若 $Y = X^2$, 则 $DY = (\quad)$.
(A) $20 - 2\pi^2$ (B) $4\pi^2 - 20$ (C) $28 - 2\pi^2$ (D) $4\pi^2 - 28$
7. 某人对某一目标进行独立重复射击, 直到命中与未命中两个结果都出现为止. 设每次射击命中目标的概率均为 p , X 表示射击次数. 若 $EX = 3$, 则 $p = (\quad)$.
(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$
8. 一袋中有 6 个正品 4 个次品, 按下列方式抽样: 每次取 1 个, 取后放回, 共取 $n (n \leq 10)$ 次, 其中次品个数记为 X ; 若一次性取出 n 个, 其中次品个数记为 Y . 则下列正确的是 $(\quad)$.
(A) $EX > EY$ (B) $EX < EY$

(C) $EX = EY$

(D) 若 n 不同, 则 EX, EY 大小不同

9. 设连续型随机变量 X 的概率密度非零区域为 $[-1, 1]$, 则下列不一定成立的是 ().

(A) $|EX| \leq 1$

(B) $E(X^2) \leq 1$

(C) $DX \leq 1$

(D) $EX = 0$

10. 甲、乙两人约定 8~12 点在某地会面, 设两人分别于 8 点后 X 与 Y 小时到达会面地, 两人到达时间相互独立且均服从 $[0, 4]$ 上的均匀分布, 则先到者的平均等待时间为 () 小时.

(A) $\frac{1}{3}$

(B) $\frac{2}{3}$

(C) 1

(D) $\frac{4}{3}$

11. 设 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 二维随机变量 (X, Y) 服从 D 上的均匀分布, $Z = \min\{X, Y\}$, 则 $EZ =$ ().

(A) $\frac{1}{2}$

(B) $\frac{1}{3}$

(C) $\frac{1}{4}$

(D) $\frac{1}{6}$

12. 设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布, 其边缘分布为 $X \sim N(1, 1), Y \sim N(2, 4)$, X 与 Y 的相关系数为 $\rho_{XY} = -\frac{1}{2}$, 且概率 $P\{aX + bY \leq 1\} = \frac{1}{2}$, 则 a, b 可能为 ().

(A) $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{4}$

(B) $a = \frac{1}{4}, b = -\frac{1}{2}$

(C) $a = -\frac{1}{4}, b = \frac{1}{2}$

(D) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{1}{4}$

13. 设圆的半径 X 服从区间 $(0, 1)$ 上的均匀分布, 其周长与面积分别记为 Y 与 Z , 则 $\text{Cov}(Y, Z) =$ ().

(A) $\frac{1}{12}\pi^2$

(B) $\frac{1}{6}\pi^2$

(C) $\frac{1}{3}\pi^2$

(D) $\frac{1}{2}\pi^2$

14. 设随机变量 X_1, X_2 相互独立, 且都服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 记 $Y = X_1 - X_2, Z = X_1 X_2$, 则 Y, Z 的相关系数 $\rho_{YZ} =$ ().

(A) -1

(B) 0

(C) $\frac{1}{2}$

(D) 1

15. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x < 0, \\ 1-x, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则方差 $DX =$ _____.

16. 设随机变量 $X \sim U[-1, 3], Y = \begin{cases} -1, & X \leq 0, \\ 1, & X > 0, \end{cases}$ 则 $DY =$ _____.

17. 设随机变量 X 和 Y 均服从 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 且 $D(X+Y) = 1$, 则 X 与 Y 的相关系数 $\rho =$ _____.

18. 设随机变量 X 与 Y 的分布律为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

与

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且相关系

数 $\rho_{XY} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 则 (X, Y) 的分布律为 _____.

19. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.9, 若 $Z = X - 0.4$, 则 Y 与 Z 的相关系数为 _____.

20. 设随机变量 X 服从正态分布, 且概率密度为 $f(x) = Ae^{-\frac{x^2}{2} + Bx}$ ($-\infty < x < +\infty$), 其中 A, B 为常数, 已知 $EX = DX$, 则 $E(Xe^{-2X}) =$ _____.

21. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ ($-\infty < x < +\infty$), $Y = \min\{|X|, 1\}$, 则 $EY =$ _____.

22. 若连续型随机变量 X 服从参数为 1 的指数分布, 令随机变量 $Y = [X+1]$, 其中 $[\cdot]$ 表示取整符号, 则 $EY =$ _____.

23. 独立重复试验中事件 A 发生的概率为 $\frac{1}{3}$, 若随机变量 X 表示事件 A 第一次发生时前面已经进行的试验次数, 则 $EX =$ _____.

24. 设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = \frac{1}{5}\Phi(x) + \frac{4}{5}\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX =$ _____.

25. 设 X 和 Y 相互独立, 且 (X, Y) 的分布律如下,

Y \ X	X		
	0	2	4
1	a	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{12}$
3	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	b

则 $E(XY) =$ _____.

26. 已知随机变量 X 在 $(1, 2)$ 上服从均匀分布, 在 $X = x$ 条件下 Y 服从参数为 x 的指数分布, 则 $E(XY^2) =$ _____.

27. 设随机变量 X 落入区间 $(0, x)$ 内的概率为 $1 - e^{-\lambda x}$ ($\lambda > 0$), 则 $P\{X > \sqrt{DX}\} =$ _____.

28. 设二维随机变量 (X, Y) 的分布律为

X \ Y	Y		
	-1	0	1
-5	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$
-1	$\frac{1}{9}$	0	$\frac{2}{9}$
1	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	0

则 X 与 Y 的协方差为 _____.

29. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则随机变量 $U = X + 2Y, V = -X$ 的协方差 $\text{Cov}(U, V) =$ _____.

30. 一台设备由三个部件构成, 在设备运转中各部件需要调整的概率分别为 0.1, 0.2, 0.3, 设备部件状态相互独立, 以 X 表示同时需要调整的部件数, 则 X 的方差为 _____.

31. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5, 若 $EX = EY = 0, E(X^2) = E(Y^2) = 2$, 则 $E[(X+Y)^2] =$ _____.

32. 若一设备在任何长为 t 的时间段内发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布 ($\lambda > 0$), 设两次故障之间时间间隔为 T , 则 $ET =$ _____.

33. 设随机变量 X 的数学期望 $EX = 75$, 方差 $DX = 5$, 由切比雪夫不等式估计得

$$P\{|X - 75| \geq k\} \leq 0.05,$$

则 $k =$ _____.

34. 设点 (X, Y) 在以 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$ 为顶点的三角形内服从均匀分布, 求 X 与 Y 的相关系数.

35. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 6x^2y, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

$Z = \max\{X, Y\}$, 求 $\text{Cov}(X+Y, Z)$.

36. 设随机变量 X 与 Y 同分布, 且 $P\{|X| = |Y|\} = 0$. 已知 X 的概率分布为

X	-1	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

(1) 求 X 与 Y 的联合概率分布, 并计算 $P\{|X+Y| = 1\}$;

(2) 求 X 与 Y 的协方差与相关系数, 并讨论 X 与 Y 的相关性与独立性;

(3) 求 $D(2X - 3Y)$.

37. 在区间 $[0, 2]$ 上任取两数 X, Y , 求 $|X - Y|$ 的数学期望与方差.

38. 在 x 轴上的闭区间 $[-1, 1]$ 上及 y 轴上的闭区间 $[0, 1]$ 上分别任取一点, 求这两点距离的平方的数学期望与方差.

巩固提高



1. 设 A, B 为两个事件, $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 且 A, B 不相容. 记随机变量 $X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生,} \end{cases}$ 则以下结论不正确的是().

(A) $E(XY) < EXEY$

(B) $D(XY) > DXDY$

(C) $D(X - Y) > DX + DY$

(D) $D(X + Y) < DX + DY$

2. 设 $EX = \frac{1}{2}, DX = \frac{1}{4}$, 令 $p = P\{-1 < X < 2\}$, 则由切比雪夫不等式得().

(A) $p \leq \frac{1}{9}$

(B) $p \geq \frac{1}{9}$

(C) $p \leq \frac{8}{9}$

(D) $p \geq \frac{8}{9}$

3. 设随机变量 (X, Y) 的概率密度 $f(x, y)$ 满足 $f(x, y) = f(-x, y)$, 且 ρ_{XY} 存在, 则 $\rho_{XY} =$ ().

(A) 1

(B) 0

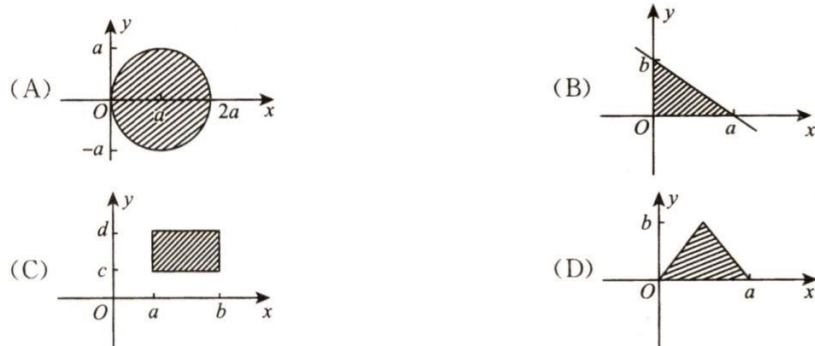
(C) -1

(D) -1 或 1

4. 设 X 是随机变量, $EX > 0$ 且 $E(X^2) = 0.7, DX = 0.2$, 则以下各式成立的是().

- (A) $P\left\{-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right\} \geq 0.2$ (B) $P\{X > \sqrt{2}\} \geq 0.6$
 (C) $P\{0 < X < \sqrt{2}\} \geq 0.6$ (D) $P\{0 < X < \sqrt{2}\} \leq 0.6$

5. 已知 (X, Y) 在下述各区域上服从二维均匀分布, 则 X 与 Y 不独立且不相关的是().



6. 设 a 为区间 $(0, 1)$ 上一个定点, 随机变量 X 服从 $(0, 1)$ 上的均匀分布. 以 Y 表示点 X 到 a 的距离, 当 X 与 Y 不相关时, $a =$ ().

- (A) 0.1 (B) 0.3 (C) 0.5 (D) 0.7

7. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 3x, & 0 < x < 1, 0 < y < x, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则随机变量 $Z = X - Y$ 的方差为_____.

8. 已知随机变量 X_1, X_2, X_3 的方差都是 $\sigma^2 (\sigma^2 > 0)$, 任意两个随机变量之间的相关系数都是 ρ , 则 ρ 的最小值为_____.

9. 已知某种股票现行市场价格为 100 元 / 股, 设该股票每年的收益率等可能地呈现 20% 和 -10% 两种状态, 求三年后该股票价格的期望值.

10. 设每年国际市场对我国某种出口商品的需求量是随机变量 X (单位: 吨), 它服从 $[2\,000, 4\,000]$ 上的均匀分布. 设每售出一吨这种商品, 可获利 3 万元, 但假如销售不出则面临囤积库房, 每吨需保养费 1 万元. 问需要组织多少货源可使期望收益最大?

11. 设 X 为连续型随机变量, 其概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

求 $D(\min\{|X|, 1\})$.

12. 设随机变量 X 服从参数为 $\lambda = 1$ 的指数分布, $Y_1 = 2e^{-X} - X, Y_2 = e^{-X} + \frac{1}{2}X$. 判断 Y_1 与 Y_2 是否相互独立.

13. 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} ax, & 0 < x < 2, \\ cx + b, & 2 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

已知 $EX = 2, P\{1 < X < 3\} = \frac{3}{4}$, 求:

(1) a, b, c 的值;

(2) 随机变量 $Y = e^X$ 的数学期望和方差.

14. 袋中有 n 张卡片, 分别记有号码 $1, 2, \dots, n$, 从中有放回地抽取 k 次, 每次抽取 1 张, 以 X 表示所得号码之和, 求 EX, DX .

15. 设随机变量 X, Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

Y	0	1
P	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

且 $\text{Cov}(X, Y) = \frac{1}{8}$, 求:

(1) X 与 Y 的联合概率分布;

(2) Y 在 $X = 1$ 条件下的条件分布;

(3) $E(|X - Y|)$.

16. 设 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 4xye^{-(x^2+y^2)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 $Z = \sqrt{X^2 + Y^2}$ 的数学期望.

17. $\triangle ABC$ 边 AB 上的高 CD 长度为 h . 向 $\triangle ABC$ 中随机投掷一点 P , 求

(1) 点 P 到边 AB 的距离 X 的概率密度;

(2) X 的数学期望与方差.

$$18. \text{ 设 } X \text{ 的概率密度为 } f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & |x| < 1, \\ \frac{1}{8}, & 1 \leq |x| \leq 3, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases} \text{ 令}$$

$$Y = g(X) = \begin{cases} X^2 + 1, & X < 1, \\ 2, & X \geq 1. \end{cases}$$

求: (1) $F_Y(y)$;

(2) $\text{Cov}(X, Y)$.

19. 设二维随机变量 (U, V) 的概率密度为

$$f(u, v) = \begin{cases} 1, & 0 < u < 1, 0 < v < 2u, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又设 X 与 Y 都是离散型随机变量, 其中 X 只取 $-1, 0, 1$ 三个值, Y 只取 $-1, 1$ 两个值, 且 $EX = 0.2, EY = 0.4$. 又

$$\begin{aligned} P\{X = -1, Y = 1\} &= P\{X = 1, Y = -1\} = P\{X = 0, Y = 1\} \\ &= \frac{1}{3} P\left\{V \leq \frac{1}{2} \mid U \leq \frac{1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

求: (1) (X, Y) 的概率分布;

(2) $\text{Cov}(X, Y)$.

20. 已知随机变量 X 与 Y 的部分联合分布律、边缘分布律如下表,

$X \backslash Y$	0	1	2	$P\{X = x_i\} = p_{i\cdot}$
0		$\frac{1}{8}$		
1	$\frac{1}{8}$	c	d	
$P\{Y = y_j\} = p_{\cdot j}$		a	b	

且 $P\{X = 1 | Y = 1\} = \frac{1}{4}$, $P\{XY = 0\} = \frac{19}{24}$, $EY = \frac{3}{2}$. 求:

- (1) a, b, c, d ;
- (2) $P\{\min\{X, Y\} < 1\}$;
- (3) $\text{Cov}(X, Y)$.

21. 设二维随机变量 (X, Y) 在 $(1, 1), (1, -1), (0, 0)$ 三点组成的三角形区域 D 上服从二维均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \geq 0.5, \\ 0, & X < 0.5, \end{cases} V = \begin{cases} 1, & Y \geq 0, \\ 0, & Y < 0. \end{cases}$$

- (1) 讨论 U, V 是否独立;
- (2) 求 U 与 Y 的相关系数.

22. (1) 叙述切比雪夫不等式, 并在连续型情形下给出证明;

(2) 某地区有 10 000 盏电灯, 每个电灯每晚开灯的概率均为 0.7, 设灯的开关是相互独立的, 用切比雪夫不等式估计夜晚同时开着的电灯数为 6 900 ~ 7 100 盏的概率下限.

23. 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)$, 已知方差 $DX = 1$, 而随机变量 Y 的概率密度为 $f(-y)$, 且 X 与 Y 的相关系数为 $-\frac{1}{4}$. 记 $Z = X + Y$.

- (1) 求 EZ, DZ ;
- (2) 用切比雪夫不等式估计 $P\{|Z| \geq 2\}$.

24. 设随机变量 $X_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$ 独立同分布, 且

$$X_{ij} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

记 $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{pmatrix}$, 求 EX .

25. 在上半单位圆周 $y = \sqrt{1-x^2}$ 上任取两点 M, N , 记扇形 OMN 的面积为 S_1 , 三角形 OMN 的面积为 S_2 , 求 $\text{Cov}(S_1, S_2)$.

26. 设 $G = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq r^2\}$, 而随机变量 X 和 Y 的联合分布是在区域 G 上的均匀分布. 判定随机变量 X 和 Y 的独立性和相关性.

27. 设 X 和 Y 相互独立且均服从 $0-1$ 分布, $P\{X=1\} = P\{Y=1\} = 0.6$. 证明: $U = X+Y$, $V = X-Y$ 不相关且不独立.

28. 对于任意两个事件 A_1, A_2 , 考虑随机变量

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{若事件 } A_i \text{ 出现,} \\ 0, & \text{若事件 } A_i \text{ 不出现} \end{cases} \quad (i=1,2).$$

证明: 随机变量 X_1 和 X_2 相互独立的充分必要条件是事件 A_1 和 A_2 相互独立.

29. 商店销售某种季节性商品, 每售出一件获利 500 元, 季度末未售出的商品每件亏损 100 元, 以 X 表示该季节此种商品的需求量, 若 X 服从正态分布 $N(100, 4)$, 求:

(1) 进货量最少为多少时才能以超过 95% 的概率保证供应?

(2) 进货量为多少时商店获利的期望值最大?

($\Phi(1.65) = 0.95, \Phi(0.95) = 0.83$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数)

30. 把一颗骰子独立地投掷 n 次, 记 1 点出现的次数为随机变量 X , 6 点出现的次数为随机变量 Y , 记

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次投掷出现 1 点,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad Y_j = \begin{cases} 1, & \text{第 } j \text{ 次投掷出现 6 点,} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, n.$$

(1) 求 EX, DX ;

(2) 分别求 $i \neq j$ 时与 $i = j$ 时 $E(X_i Y_j)$ 的值;

(3) 求 X 与 Y 的相关系数.

31. 产品寿命 X 是一个随机变量, 其分布函数与概率密度分别为 $F(x), f(x)$. 产品已工作到时刻 x , 在时刻 x 后的单位时间 Δx 内发生失效的概率称为产品在时刻 x 的瞬时失效率, 记为 $\lambda(x)$.

(1) 证明 $\lambda(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$;

(2) 设某产品寿命的瞬时失效率函数为 $\lambda(x) = \alpha$, 其中参数 $\alpha > 0$, 求产品寿命 X 的数学期望.

第7章 大数定律与中心极限定理

强化训练



1. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立, 则在下列条件中能使 $X_1^2, X_2^2, \dots, X_n^2, \dots$ 满足独立同分布中心极限定理的是 ().

(A) $P\{X_i = m\} = p^m(1-p)^{1-m}, m = 0, 1; 0 < p < 1$

(B) $P\{X_i \leq x\} = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\pi(1+t^2)} dt$

(C) $P\{|X_i| = m\} = \frac{c}{m^2}, m = 1, 2, \dots$; 常数 $c = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{m^2}\right)^{-1}$

(D) X_i 服从参数为 i 的指数分布

2. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立同分布, X_n 的概率密度是 $f(x)$, 则下列 $f(x)$ 中, 不能满足辛钦大数定律条件的是 ().

(A) $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{4}x, & 0 \leq x < 2, \\ \frac{1}{x^2}, & x \geq 2 \end{cases}$

(B) $f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leq x < 0, \\ 1-x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leq x < \frac{\pi}{2}, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

3. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且都服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布, 则当 n 充分大时, 随机变量 $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 近似服从 ().

(A) $N(2, 4)$

(B) $N\left(2, \frac{4}{n}\right)$

(C) $N\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4n}\right)$

(D) $N(2n, 4n)$

4. 已知产品的废品率 $p = 0.005$, 则 10 000 件产品中废品数不大于 70 的概率为 _____.
($\Phi(2.84) = 0.9977$)

5. 设连续型随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{40}$ 相互独立同分布, 概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

记 $Y = \sum_{i=1}^{40} X_i$, 则依中心极限定理, $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ 近似服从 $N(0,1)$, 且 $\sigma > 0$, 其中 μ 和 σ 分别取值为 _____.

6. 设一本书共有 100 万个印刷符号, 在排版时每个符号被排错的概率为 0.000 1, 校对时每个排版错误被改正的概率为 0.9, 则校对后排版错误不超过 15 个的概率为 _____. ($\Phi(1.58) = 0.9429$)

7. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 相互独立, 且均服从二项分布 $B\left(1, \frac{1}{2}\right)$, 若根据中心极限定理, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{a \sum_{i=1}^n (X_{2i} - X_{2i-1}) \leq \sqrt{nx}\right\} = \Phi(x) (a > 0),$$

其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $a =$ _____.

8. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是来自总体 $X \sim N(0,1)$ 的简单随机样本, 由切比雪夫不等式得 $P\left\{0 < \sum_{i=1}^n X_i^2 < 2n\right\}$ 不小于 _____.

9. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立且均服从标准正态分布 $N(0,1)$, 问当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$ (k 为正奇数) 依概率收敛于何值?

巩固提高



1. 设 $Z \sim N(0,1)$, 令 $X = \mu + \sigma Z$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, $Y_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^3$ 依概率收敛于 ().

- (A) μ^3 (B) σ^3 (C) $\mu^3 + 3\mu\sigma^2$ (D) $\mu^3 + 3\mu^2\sigma^3$

2. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立同分布, 且 $E(X_i^k) = \mu_k, DX_i = \sigma^2 (i, k = 1, 2, \dots)$, 记 $A_1 = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 表示随机变量序列的一阶原点矩, $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 表示随机变量序列的二阶原点矩, $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 表示随机变量序列的二阶中心矩, 则当 $n \rightarrow \infty$ 时, ().

- (A) 由大数定律, 依概率, $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 趋于 μ_2 且 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 趋于 σ^2
 (B) 由大数定律, 依概率, $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 趋于 μ_2 , 但 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不趋于 σ^2
 (C) 由大数定律, 依概率, $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 趋于 σ^2 , 但 $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 不趋于 μ_2
 (D) 由大数定律, 依概率, $A_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2$ 不趋于 μ_2 且 $B_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 不趋于 σ^2

3. 设随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ 相互独立且都服从 $U[1,4]$, $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布

函数, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{2 \sum_{i=1}^n X_i - 5n}{\sqrt{n}} \leq x\right\} = ()$.

- (A) $\Phi(x)$ (B) $\Phi(\sqrt{3}x)$ (C) $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)$ (D) $\Phi\left(\frac{2x}{\sqrt{3}}\right)$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是独立同分布的随机变量序列, $EX_i = \mu, DX_i = \sigma^2, i = 1, 2, \dots, n$, 令 $Y_n = \frac{2}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n iX_i$. 证明: 随机变量序列 $\{Y_n\}$ 依概率收敛于 μ .

5. 计算机在进行加法时, 每个加数按四舍五入取最接近它的整数, 设各个加数的取整误差是相互独立的, 它们都服从区间为 $(-0.5, 0.5)$ 的均匀分布, 现有 300 个加数相加, 求误差总和绝对值超过 15 的概率. ($\Phi(3) = 0.9987$)

6. 设连续型随机变量序列 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 独立同分布, 且 $X_i (i = 1, 2, \dots, 100)$ 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1, \\ 2-x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

$$\text{记 } \bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i.$$

(1) 证明 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 满足列维-林德伯格定理;

(2) 计算 $P\{|\bar{X}| \leq 1.1\}$. ($\Phi(2.45) = 0.9929$)

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 相互独立同服从标准正态分布 $N(0, 1)$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 问当 $n \rightarrow \infty$ 时,

$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ 依概率收敛于何值?

第8章 统计量及其分布

强化训练



1. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自标准正态总体 X 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, Y = \bar{X} - S$, 则 $E(Y^2) = (\quad)$.

(A) $1 - \frac{1}{n}$

(B) $1 + \frac{1}{n}$

(C) $1 - \frac{1}{n-1}$

(D) $1 + \frac{1}{n-1}$

2. 设总体 $X \sim B(1, p)$, 其简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的均值为 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则下列结论不正确的是 ().

(A) $E\bar{X} = p, D\bar{X} = p(1-p)/n$

(B) 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\bar{X}$ 依概率收敛于 p

(C) $n\bar{X} \sim B(n, p)$

(D) $P\{a < n\bar{X} < b\} \approx \Phi(b) - \Phi(a)$

3. 设随机变量 $X \sim N(0, 4)$, 若 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 则 ().

(A) $\frac{1}{2n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 \sim \chi^2(1)$

(B) $\frac{1}{16} \sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\sqrt{\frac{(n-1)X_n^2}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2}} \sim t(n-1)$

(D) $\frac{(n-1)X_1^2}{\sum_{i=2}^n X_i^2} \sim F(1, n-1)$

4. 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且都服从正态分布 $N(0, 4)$. 若 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 X 的简单随机样本, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 是来自总体 Y 的简单随机样本, 则下列选项中服从自由度为 4 的 t 分布的统计量为 ().

(A) $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2}}$

(B) $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{2\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2}}$

(C) $\frac{2(X_1 + X_2 + X_3 + X_4)}{\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2}}$

(D) $\frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4}{4\sqrt{Y_1^2 + Y_2^2 + Y_3^2 + Y_4^2}}$

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 是来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, Q^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$,

则().

- (A) $\bar{X} \sim N(0, 1), Q^2 \sim \chi^2(n)$ (B) $\bar{X} \sim N(0, n), Q^2 \sim \chi^2(n-1)$
 (C) $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right), Q^2 \sim \chi^2(n)$ (D) $\bar{X} \sim N\left(0, \frac{1}{n}\right), Q^2 \sim \chi^2(n-1)$

6. 设总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ (σ^2 已知), $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 是取自总体 X 的简单随机样本, S^2 为样本方差, 则下列结论中正确的是().

- (A) $\sum_{i=1}^n X_i^2 \sim \chi^2(n)$ (B) $\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sqrt{n}S} \sim t(n)$
 (C) $\frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n)$ (D) $\frac{(n-1)X_n^2}{\sum_{i=1}^{n-1} X_i^2} \sim F(n-1, 1)$

7. 设 $X_1, X_2, \dots, X_8; Y_1, Y_2, \dots, Y_{10}$ 分别为取自两个正态总体 $X \sim N(0, 2^2), Y \sim N(0, 5)$ 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 X_i$, 则下列结论中正确的是().

- (A) $\frac{1}{8} (X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_8^2) \sim \chi^2(8)$ (B) $\frac{1}{5} (Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_{10}^2) \sim \chi^2(10)$
 (C) $\frac{\bar{X} + 1}{2Y_1} \sim t(1)$ (D) $\frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i^2 / 50}{\sum_{i=1}^8 X_i^2 / 32} \sim F(10, 8)$

8. 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 且 $Y = \frac{a}{2} \sum_{i=1}^4 X_i^2 + aX_1X_2 + aX_3X_4$ 服从参数为 n 的 χ^2 分布, 则 $(n, a) =$ ().

- (A) (1, 1) (B) (1, 2) (C) (2, 1) (D) (2, 2)

9. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 是取自总体 X 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 样本方差为 S^2 , 则服从 $\chi^2(n)$ 的随机变量为().

- (A) $\frac{\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (B) $\frac{n\bar{X}^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$
 (C) $\frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$ (D) $\frac{n(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2} + \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}$

10. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 是来自总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, 则统计量

$$Y = \frac{\sqrt{n-1}X_1}{\sqrt{\sum_{i=2}^n X_i^2}}$$

服从().

- (A) $\chi^2(n-1)$ (B) $t(n-1)$ (C) $F(n, 1)$ (D) $F(1, n-1)$

11. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ 是来自标准正态总体的简单随机样本, 已知统计量

$$Y = \frac{\alpha(X_1 + X_2 + \dots + X_n)}{\sqrt{X_{n+1}^2 + X_{n+2}^2 + \dots + X_{2n}^2}} \quad (\alpha > 0)$$

服从 t 分布, 则常数 $\alpha =$ ().

- (A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2

12. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2) (\sigma > 0)$ 的简单随机样本. 记

$$\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i (k = n-1, n), S_{n-1}^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n-1} (X_i - \bar{X}_{n-1})^2,$$

已知 $Y = \frac{\bar{X}_n}{S_{n-1}} \sqrt{a}$ (a 为正常数) 服从参数为 b 的 t 分布, 则参数 a, b 应为().

(A) $a = n-1, b = n-1$

(B) $a = n-1, b = n-2$

(C) $a = n, b = n-1$

(D) $a = n, b = n-2$

13. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 是取自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值, 记

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2, S_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$S_3^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2, S_4^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2,$$

则服从自由度为 $n-1$ 的 t 分布的随机变量是().

(A) $\frac{\bar{X} - \mu}{S_1 / \sqrt{n-1}}$

(B) $\frac{\bar{X} - \mu}{S_2 / \sqrt{n-1}}$

(C) $\frac{\bar{X} - \mu}{S_3 / \sqrt{n}}$

(D) $\frac{\bar{X} - \mu}{S_4 / \sqrt{n}}$

14. 设随机变量 $X \sim F(n, n)$, 记 $p_1 = P\{X \geq 1\}, p_2 = P\{X \leq 1\}$, 则().

(A) $p_1 < p_2$

(B) $p_1 > p_2$

(C) $p_1 = p_2$

(D) p_1, p_2 大小无法比较

15. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 1)$ 是取自总体 X 的简单随机样本, 样本均值为 $\bar{X}$, 如果 $P\{|X - \mu| < a\} = P\{|\bar{X} - \mu| < b\}$, 则比值 $\frac{a}{b}$ ().

(A) 与 σ 及 n 都有关

(B) 与 σ 及 n 都无关

(C) 与 σ 无关, 与 n 有关

(D) 与 σ 有关, 与 n 无关

16. 设总体 X 服从参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的泊松分布. $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则对于统计量 $T_1 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, T_2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} X_i + \frac{1}{n} X_n$, 有().

(A) $ET_1 > ET_2, DT_1 > DT_2$

(B) $ET_1 > ET_2, DT_1 < DT_2$

(C) $ET_1 < ET_2, DT_1 > DT_2$

(D) $ET_1 < ET_2, DT_1 < DT_2$

17. 设总体 X 服从分布 $P\{X = k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k = 0, 1, 0 < p < 1$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, 记 $Y_1 = \max_{1 \leq i \leq n} \{X_i\}, Y_2 = \min_{1 \leq j \leq n} \{X_j\}, Y_3 = Y_1 - Y_2$, 则 $EY_3 =$ _____.

18. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 为取自正态总体 $X \sim N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $Y_i = X_i - \bar{X} (i = 1, 2, \dots, n)$, 则 $DY_i =$ _____.

19. 设随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 独立同分布, 且 $EX_i = 0, DX_i = 10, i = 1, 2, \dots, 100$, 令 $\bar{X} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} X_i$, 则 $E\left[\sum_{i=1}^{100} (X_i - \bar{X})^2\right] =$ _____.

20. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $N(0, 1)$ 的简单随机样本, 记统计量 $T = \sum_{i=1}^n X_i^2$, 则 $DT =$ _____.

21. 设随机变量 $(X, Y) \sim N(0, 0; 1, 4; 0)$, 则 $D(X^2 - 2Y^2) =$ _____.

22. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n (n \geq 2)$ 为来自标准正态总体的简单随机样本, $\bar{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和

样本方差,若 $D(\bar{X} - kS^2) = \frac{3n-1}{n(n-1)}$, 则 $k =$ _____.

23. 设总体 X 和 Y 相互独立, 且分别服从正态分布 $N(0, 4)$ 和 $N(0, 7)$, $X_1, X_2, \dots, X_8$ 和 $Y_1, Y_2, \dots, Y_{14}$ 分别为来自总体 X 和 Y 的简单随机样本, 则统计量 $|\bar{X} - \bar{Y}|$ 的数学期望和方差分别为 _____.

24. 设总体 X 服从 $N(0, 9)$, $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 为样本均值, S 为样本标准差, A_2 为样本二阶原点矩, 求:

(1) $E[(\bar{X}S)^2]$;

(2) $E(A_2)$ 与 $D(A_2)$.

25. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1}$ ($n \geq 2$) 是来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本,

$$\bar{X}^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, S^{*2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}^*)^2,$$

求统计量 $T = \frac{X_{n+1} - \bar{X}^*}{S^*} \sqrt{\frac{n-1}{n+1}}$ 的分布.

巩固提高



1. 设 n 为正整数, 随机变量 $X \sim t(n)$, $Y \sim F(1, n)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = \frac{2}{5}$, 则 $P\{Y \leq c^2\} =$ ().

(A) $\frac{1}{5}$

(B) $\frac{2}{5}$

(C) $\frac{3}{5}$

(D) $\frac{4}{5}$

2. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本, 样本均值 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 记 $S_0^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2$, $S_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 当样本量 $n > 2$ 时, 下列结论中正确的是 ().

(A) $D(S_1^2) > D(S_0^2) > D(S^2)$

(B) $D(S_0^2) > D(S^2) > D(S_1^2)$

(C) $D(S^2) > D(S_1^2) > D(S_0^2)$

(D) $D(S^2) > D(S_0^2) > D(S_1^2)$

3. 设总体 $X \sim N(a, \sigma^2)$, $Y \sim N(b, \sigma^2)$, 且相互独立. 分别从 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 10 的简单随机样本, 记它们的样本方差分别为 S_X^2 和 S_Y^2 , 并记 $S_{12}^2 = \frac{1}{2}(S_X^2 + S_Y^2)$ 和 $S_{XY}^2 = \frac{1}{18}(8S_X^2 + 10S_Y^2)$, 则这四个统计量 $S_X^2, S_Y^2, S_{12}^2, S_{XY}^2$ 中, 方差最小者是 ().

(A) S_X^2

(B) S_Y^2

(C) S_{12}^2

(D) S_{XY}^2

4. 设 $F \sim F(20, 30)$, 则在 $\alpha = 0.95$ 的条件下其上侧分位数为 _____. ($F_{0.05}(30, 20) = 2.04$, $F_{0.05}(20, 30) = 1.93$)

5. 设 $X_1, X_2, \dots, X_5$ 是来自总体 $X \sim N(0, 2^2)$ 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$.

(1) 令随机变量 $Y = \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2 + (X_4 - X_5)^2$, 求 EY 与 DY ;

(2) 求随机变量 $Z = \frac{X_4 - X_5}{\sqrt{\sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2}}$ 的分布;

(3) 对于(2)中的 Z , 给定 $\alpha (0 < \alpha < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{Z > c\} = \alpha$, 随机变量 $U \sim F(2, 1)$, 求 $P\left\{U > \frac{1}{c^2}\right\}$.

6. 设 X_1, X_2 是来自总体 X 的简单随机样本, 且

$$\bar{X} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 X_i, S_2^2 = \sum_{i=1}^2 (X_i - \bar{X})^2, Y = \sqrt{X_1 X_2}.$$

(1) 若 X 服从参数为 $\frac{1}{2}$ 的指数分布, 求 EY ;

(2) 若 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 求 $E[(\bar{X} S_2^2)^2]$.

7. 设 $X \sim N(0, \sigma^2) (\sigma > 0)$, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 为来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 X_i$,

$$Z = \frac{\sqrt{6} \bar{X}}{|X_4 - X_5|}.$$

(1) 证明: $Z \sim t(1), Z^2 \sim F(1, 1)$.

(2) 设 $S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 (X_i - \bar{X})^2$, 若 $S^2 \sim \chi^2(2)$, 求 σ .

第9章 参数估计与假设检验

强化训练



1. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$$

其中参数 $\lambda (\lambda > 0)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本, 则参数 λ 的矩估计量为 ().

(A) $\frac{2}{\bar{X}}$

(B) $\frac{1}{2\bar{X}}$

(C) $\frac{\bar{X}}{2}$

(D) $2\bar{X}$

2. 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是来自总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ (μ, σ^2 都未知) 的简单随机样本的观测值, 则 σ^2 的最大似然估计值为 ().

(A) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

(B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

(C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2$

(D) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$

3. 设 $X \sim P(\lambda)$, 其中 $\lambda > 0$ 是未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是总体 X 的一组样本值, 则 $P\{X=0\}$ 的最大似然估计值为 ().

(A) $e^{-\frac{1}{\bar{x}}}$

(B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_i$

(C) $\frac{1}{\ln \bar{x}}$

(D) $e^{-\bar{x}}$

4. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, 则 $E(X^2)$ 的矩估计量是 ().

(A) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

(B) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

(C) $\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \bar{X}^2$

(D) $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \bar{X}^2$

5. 设总体 X 的数学期望 $EX = 0$, 方差 $DX = \sigma^2$, 而 $X_1, X_2, \dots, X_n (n > 2)$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$, 则下列属于 σ^2 的无偏估计量的是 ().

(A) $n\bar{X}^2 + S^2$

(B) $\frac{1}{2}(n\bar{X}^2 + S^2)$

(C) $\frac{1}{3}(n\bar{X}^2 + S^2)$

(D) $\frac{1}{4}(n\bar{X}^2 + S^2)$

6. 设 X_1, X_2, X_3 取自存在有限数学期望 μ 和方差 σ^2 的总体 X , 则下列期望的估计量中最有效的是().

(A) $\hat{\mu}_1 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{10}X_2 + \frac{1}{2}X_3$

(B) $\hat{\mu}_2 = \frac{1}{4}X_1 + \frac{1}{4}X_2 + \frac{1}{4}X_3$

(C) $\hat{\mu}_3 = \frac{1}{5}X_1 + \frac{3}{5}X_2 + \frac{1}{5}X_3$

(D) $\hat{\mu}_4 = \frac{1}{3}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{3}X_3$

7. 设总体 $X \sim U[0, \theta]$ ($\theta > 0$), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本, 记 $X_{\max} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$. 要使 $aX_{\max}$ 成为 θ 的无偏估计量, 则应取 $a =$ ().

(A) $\frac{n}{n+1}$

(B) $\frac{n+1}{n}$

(C) $\frac{n}{n-1}$

(D) $\frac{n-1}{n}$

8. 设自动装袋机装出的每袋产品质量服从正态分布, 规定每袋标准质量为 a . 为了检验自动装袋机的运行是否正常, 现对产品进行抽样检查. 取原假设 $H_0: \mu = a$, 备择假设 $H_1: \mu \neq a$, 显著性水平 $\alpha = 0.05$, 则下列命题中正确的是().

(A) 若机器运行正常, 则检验的结果也认为机器运行正常的概率为 0.95

(B) 若机器运行不正常, 则检验的结果也认为机器运行不正常的概率为 0.95

(C) 若检验的结果认为机器运行正常, 则机器确实运行正常的概率为 0.95

(D) 若检验的结果认为机器运行不正常, 则机器确实运行不正常的概率为 0.95

9. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 来自 X 的一个简单随机样本为 $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$, 记 $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$, $T = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=n+1}^{2n} (X_i - \mu)^2$, 当 μ 已知时, 基于 T 构造估计 σ^2 的置信水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间为().

(A) $\left(\frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}, \frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)} \right)$

(B) $\left(\frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n)}, \frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n)} \right)$

(C) $\left(\frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)}, \frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)} \right)$

(D) $\left(\frac{T}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)}, \frac{T}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2n-1)} \right)$

10. 若总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$, 对于总体 X 的一个容量为 n 的简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 欲检验 $H_0: \sigma^2 = 4, H_1: \sigma^2 \neq 4$, 则应选用统计量().

(A) $\frac{(n-1)S^2}{4}$

(B) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{2}$

(C) $\frac{1}{4} \sum_{i=1}^n X_i^2$

(D) $\frac{\sqrt{n}\bar{X}}{S}$

11. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ 与 σ 均未知, 对于 X 的一个简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 若求 σ^2 的置信区间, 则选用的统计量服从().

(A) $\chi^2(n-1)$

(B) $\chi^2(n)$

(C) $t(n-1)$

(D) $t(n)$

12. 已知总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta, & 0 < x < 1, \\ 1 - \theta, & 1 \leq x < 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

其中 $\theta (0 < \theta < 1)$ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本, 则 θ 的矩估计量是_____.

13. 设总体 X 的概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} \sqrt{\theta} x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ ($\theta > 0$ 未知), $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本, 则 θ 的最大似然估计量为_____.

14. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \alpha, \beta) = \begin{cases} \alpha, & -1 < x < 0, \\ \beta, & 0 \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ 是未知参数, 总体 X 的样本值为 $-0.5, 0.3, -0.2, -0.6, -0.1, 0.4, 0.5, -0.8$, 则 α 的最大似然估计值为_____.

15. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, 其中 μ, σ^2 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本, 设 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为样本观测值, 则样本的似然函数为_____.

16. 设总体 X 服从均匀分布, 其概率密度 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x \leq \theta, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 则总体 X 的方差 DX 的最大似然估计量 $\widehat{DX} =$ _____.

17. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), μ, σ^2 为未知参数, Y 服从参数为 σ 的指数分布, 并记 $\theta = P\{Y > 1\}$, 则 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta} =$ _____.

18. 已知一批零件的长度 X (单位: cm) 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 从中随机地抽取 16 个零件, 得到长度的平均值为 40 cm, 则 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间是_____. ($\Phi(1.96) = 0.975$, $\Phi(1.64) = 0.95$)

19. 设总体 $X \sim N(\mu, 8)$, μ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_{32}$ 是取自总体 X 的一个简单随机样本, 如果以区间 $(\bar{X} - 1, \bar{X} + 1)$ 作为 μ 的置信区间, 则置信水平为_____. (精确到 3 位小数, 参考数值: $\Phi(2) = 0.977, \Phi(3) \approx 0.999, \Phi(4) \approx 1$)

20. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu, 1)$, 对于 X 的一个简单随机样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 要使 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间长度不超过 0.56, 则样本容量 n 至少为_____. ($\Phi(1.96) = 0.975$)

21. 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \lambda) = \frac{1}{2\lambda} e^{-\frac{|x|}{\lambda}}, -\infty < x < +\infty$, 其中 $\lambda > 0$ 未知. $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的一个简单随机样本.

- (1) 利用原点矩求 λ 的矩估计量 $\hat{\lambda}_1$, 讨论 $(\hat{\lambda}_1)^2$ 是否为 λ^2 的无偏估计;
- (2) 求 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}_2$, 讨论 $\hat{\lambda}_2$ 是否为 λ 的无偏估计.

22. 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x-\mu}{\theta}}, & x \geq \mu, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 $\theta > 0, \mu, \theta$ 为未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为取自 X 的简单随机样本.

- (1) 用原点矩求 μ, θ 的矩估计量;
- (2) 求 μ, θ 的最大似然估计量.

23. 罐中有 N 枚硬币, 其中有 θ 枚是普通硬币 (掷出正面与反面的概率均为 0.5), 其余 $N - \theta$ 枚硬币两面都是正面, 从罐中有放回的随机取出一枚硬币, 把它连掷两次, 记下结果, 但不去查看它属于哪种硬币, 如此重复 n 次, 若掷出 0 次、1 次、2 次正面的次数分别为 n_0, n_1, n_2 ($n_0 + n_1 + n_2 = n$).

- (1) 求 θ 的矩估计 $\hat{\theta}_1$, 最大似然估计 $\hat{\theta}_2$;
- (2) 问 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ 是否为 θ 的无偏估计?

(3) 当 $N = n = 10$ 时, 问 $\hat{\theta}_1$ 与 $\hat{\theta}_2$ 哪个更有效?

24. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(0, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本.

(1) 求 σ^2 的最大似然估计量 $\hat{\sigma}^2$, 并求出 $E(\hat{\sigma}^2)$;

(2) 比较 $D(\hat{\sigma}^2)$ 与 $D(S^2)$ 的大小;

(3) 问 $\hat{\sigma}^2$ 是否为 σ^2 的一致估计量?

25. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\alpha^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 μ, σ 均为未知参数, 且 $\sigma > 0$,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求 μ 与 σ^2 的矩估计量.

26. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha x}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\alpha^2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中 μ, σ 均为未知参数, 且 $\sigma > 0$,

$X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 求 μ 与 σ^2 的最大似然估计量;

(2) 证明 μ 的最大似然估计量是 μ 的无偏估计量.

27. 设总体 X 的概率密度为

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\theta}, & 0 < x < \theta, \\ \frac{1}{2(1-\theta)}, & \theta \leq x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中, 参数 $\theta (0 < \theta < 1)$ 未知, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本, $\bar{X}$ 是样本均值.

(1) 求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$;

(2) 判断 $4\bar{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量.

28. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 4e^{-4(x-\theta)}, & x > \theta, \\ 0, & x \leq \theta, \end{cases}$ 其中 θ 为未知参数, 且 $\theta > 0$, $X_1, X_2, \dots$,

X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 记 $Z = \min\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$.

(1) 求 Z 的分布函数;

(2) 若把 Z 作为 θ 的估计量, 它是否为无偏估计量?

29. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}, & 0 < x < \beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中 α, β 均未知且大于零, $X_1, X_2, \dots$,

X_n 为来自总体 X 的简单随机样本, 求 α, β 的矩估计量.

30. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{\beta^\alpha}, & 0 < x \leq \beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$ 其中参数 α, β 均大于零, $X_1, X_2, \dots$,

X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(1) 当 $\beta = e$ 时, 求 α 的最大似然估计量;

(2) 当 α 已知时, 求 β 的最大似然估计量.

31. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \alpha^{-\beta x} \beta \ln \alpha, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$ 其中参数 $\alpha > 1, \beta > 0$, $X_1, X_2, \dots, X_n$

为来自总体 X 的简单随机样本.

- (1) 当 $\beta = 1$ 时, 求 α 的矩估计量;
 (2) 当 $\alpha = 2$ 时, 求 β 的最大似然估计量.

32. 设总体 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 3(x-\theta)^2, & \theta < x \leq \theta+1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ 其中 θ 是未知参数, $X_1, X_2, \dots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本, 求:

- (1) θ 的矩估计量;
 (2) θ 的最大似然估计量.

33. 设总体 X 的分布列为截尾几何分布

$$P\{X = k\} = \theta^{k-1}(1-\theta), k = 1, 2, \dots, r,$$

$$P\{X = r+1\} = \theta^r,$$

从中抽得样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 其中有 m 个取值为 $r+1$, 求 θ 的最大似然估计.

34. 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是取自 $(0, \theta)$ 上均匀分布的一个样本, 证明: $T_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ 是 θ 的相合估计量.

35. 设从均值为 μ , 方差为 $\sigma^2 > 0$ 的总体中分别抽取容量为 n_1, n_2 的两个独立样本, 样本均值分别为 $\bar{X}, \bar{Y}$. 证明: 对于任何满足条件 $a+b=1$ 的常数 a, b , $T = a\bar{X} + b\bar{Y}$ 是 μ 的无偏估计量, 并确定常数 a, b 的值, 使得方差 DT 达到最小.

36. 设 $Y = \ln X \sim N(\mu, 1)$, $0.8, 1.25, 2, 0.5$ 是来自总体 X 的简单随机样本值, 已知 $\Phi(1.96) = 0.975$.

- (1) 求 μ 的置信度为 0.95 的置信区间;
 (2) 记 $EX = \nu$, 求 ν 的置信度为 0.95 的置信区间.

巩固提高



1. 设某种电子器件的寿命(以小时计) T 服从参数为 λ 的指数分布, 其中 $\lambda > 0$ 未知. 从这批器件中任取 $n(n \geq 2)$ 只, 并在时刻 $t = 0$ 时投入独立寿命试验, 试验进行到预定时间 T_0 结束, 此时有 $k(0 < k < n)$ 只器件失效, 则 λ 的最大似然估计量 $\hat{\lambda}$ 为().

- (A) $\frac{1}{T_0} e^{nT_0}$ (B) $\frac{1}{T_0} e^{-nT_0}$ (C) $\frac{1}{T_0} \ln \frac{n-k}{n}$ (D) $\frac{1}{T_0} \ln \frac{n}{n-k}$

2. 设总体 X 在非负整数集 $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ 上等可能取值, k 为未知参数, $x_1, x_2, \dots, x_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本值, 则 k 的最大似然估计值为().

- (A) x_n (B) $\bar{x}$
 (C) $\min\{x_1, \dots, x_n\}$ (D) $\max\{x_1, \dots, x_n\}$

3. 在单个正态总体均值的假设检验中, 若方差未知, 当显著性水平为 α , 样本容量为 n 时对应的拒绝域记为 $W(\alpha, n)$, 下列说法:

- ① 若 $\alpha = 0.01$, 则当 $n_1 = 10, n_2 = 15$ 时, $W(\alpha, n_1) \subset W(\alpha, n_2)$;
 ② 若 $\alpha = 0.01$, 则当 $n_1 = 10, n_2 = 15$ 时, $W(\alpha, n_1) \supset W(\alpha, n_2)$;
 ③ 若 $n = 10$, 则当 $\alpha_1 = 0.005, \alpha_2 = 0.01$ 时, $W(\alpha_1, n) \subset W(\alpha_2, n)$;

④ 若 $n = 15$, 则当 $\alpha_1 = 0.005, \alpha_2 = 0.01$ 时, $W(\alpha_1, n) \supset W(\alpha_2, n)$.

正确的说法是().

(A) ①③

(B) ①④

(C) ②③

(D) ②④

4. 设一批零件的长度 X 服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$, 其中 σ^2 未知, μ 未知. 现从中随机抽取 15 个零件, 测得样本均值为 $\bar{x}$, 样本方差为 s^2 , 则当置信度为 0.90 时, 判断 μ 是否大于 μ_0 的接受条件为().

$$(A) \bar{x} \geq \mu_0 - \frac{s}{\sqrt{15}} t_{0.05}(14)$$

$$(B) \bar{x} \geq \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{15}} t_{0.10}(15)$$

$$(C) \bar{x} \geq \mu_0 + \frac{s}{\sqrt{15}} t_{0.10}(14)$$

$$(D) \bar{x} \geq \mu_0 - \frac{s}{\sqrt{15}} t_{0.05}(15)$$

5. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), σ^2 是未知参数, 样本容量为 n , 置信度为 0.95, $\bar{X}$ 为样本均值, S 为样本标准差, 则以下不是总体期望 μ 的置信区间的是().

$$(A) \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.01}(n-1), \bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.96}(n-1) \right)$$

$$(B) \left(\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.99}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.04}(n-1) \right)$$

$$(C) \left(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1) \right)$$

$$(D) \left(\bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.025}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{0.975}(n-1) \right)$$

6. 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \begin{cases} \mu x, & 0 \leq x < 1, \\ \theta x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$ μ, θ 为未知参数且 $\mu > 0, \theta > 0, Y = e^X, X$

的样本观测值为 0.1, 0.9, 1.2, 1.2, 则 $P\{Y < 4\}$ 的最大似然估计值为_____.

7. 已知总体 X 的分布律为 $P\{X = k\} = -\frac{1}{k} \cdot \frac{p^k}{\ln(1-p)}$ ($0 < p < 1$), $k = 1, 2, \dots$. $X_1, X_2, \dots, X_n$ ($n \geq 2$) 为来自总体 X 的简单随机样本, 则 p 的矩估计为_____.

8. 设总体 $X \sim N(\mu, 0.2^2)$ (μ 未知), $\bar{X}_n$ 为容量为 n 的样本均值. 在对原假设 $H_0: \mu = \mu_0$ (μ_0 已知) 进行显著性检验时, 取接受域为 $\{|\bar{X}_n - \mu_0| < 0.1\}$, 要使犯第一类错误(即弃真错误)的概率不大于 0.05, 样本容量至少为_____. ($\Phi(1.64) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975$)

9. 设总体 X 的概率分布为 $\left(0 < \theta < \frac{1}{2}\right)$

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

(1) 利用总体 X 的简单随机样本值 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3, 求 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}$;

(2) 设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 是来自 X (其未知参数 θ 为(1)中确定的 $\hat{\theta}$) 的简单随机样本, 当 n 充分大时, 取值为 2 的样本个数 N 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\left\{\frac{N-a}{b} \leq x\right\} = \Phi(x)$, 求 a, b . ($\Phi(x)$ 为标准正态分布的分布函数)

10. 设总体 X 的概率密度 $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x-\mu|}$ ($-\infty < x < +\infty$), 其中 μ 为未知参数.

(1) 若总体 X 有样本值: 1 000, 1 100, 1 200, 求 μ 的矩估计值;

(2) 若总体 X 有样本值: 1 000, 1 100, 1 200, 求 μ 的最大似然估计值;

(3) 若总体 X 有样本值: 1 000, 1 100, 问 μ 的最大似然估计值唯一吗?

11. 设一批产品的不合格品数与合格品数之比为 R (未知常数), 现在按还原抽样方式随意抽取的 n 件中发现 k 件不合格品, 求 R 的最大似然估计值.

12. 设袋中有编号为 $1 \sim N$ 的 N 张卡片, 其中 N 未知, 每次从中有放回地任取 1 张, 取 n 次, 所得号码为 $x_1, x_2, \dots, x_n$.

(1) 求 N 的矩估计量 $\hat{N}_1$, 并计算概率 $P\{\hat{N}_1 = 1\}$;

(2) 求 N 的最大似然估计量 $\hat{N}_2$, 并求 $\hat{N}_2$ 的分布律.

13. 设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, $X_1, X_2, \dots, X_{2n}$ ($n \geq 2$) 是来自 X 的简单随机样本, 且 $\bar{X} = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{2n} X_i$,

统计量 $Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$.

(1) 判断统计量 Y 是否为 σ^2 的无偏估计;

(2) 当 $\mu = 0$ 时, 求 $D(\bar{X}^2)$.

14. 设有一批产品, 为估计其次品率 p ($0 < p < 1$), 随机抽取一样本 $X_1, X_2, \dots, X_n$, 其中

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{第 } i \text{ 次取得次品,} \\ 0, & \text{第 } i \text{ 次取得合格品,} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

证明 $\hat{p} = \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ 是 p 的无偏估计量, 并讨论该统计量的一致性.

15. 设容量为 n 的简单随机样本取自总体 $X \sim N(3.4, 6^2)$, 且样本均值在区间 $(1.4, 5.4)$ 内的概率不小于 0.95, 问样本容量 n 至少应取多大? ($\Phi(1.96) = 0.975$)

16. 设 0.55, 1.25, 0.80, 2.00 是来自总体 X 的简单随机样本值, 已知 $Y = 3X - 1$ 服从正态分布 $N(\mu, 1)$.

(1) 求 X 的数学期望 EX (记 $EX = b$);

(2) 求 μ 的置信水平为 0.95 的置信区间;

(3) 利用上述结果求 b 的置信水平为 0.95 的置信区间. ($\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.64) = 0.95$)

17. 设 $X_1, X_2, \dots, X_{100}$ 为取自总体 X 的一个简单随机样本, X 服从参数为 λ ($\lambda > 0, \lambda$ 未知) 的指数分布.

(1) 求 λ 的置信水平为 0.95 的置信区间;

(2) 若由样本值 $x_1, x_2, \dots, x_{100}$ 算得 $\bar{x} = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} x_i = 8$, 求相应的 λ 的置信水平为 0.95 的置信区间. ($\Phi(1.96) = 0.975, \Phi(1.64) = 0.95$)

18. 某种零件的尺寸方差为 $\sigma^2 = 1.21$, 抽取一批这类零件中的 6 件检查, 得尺寸数据如下 (单位: 毫米):

32.56, 29.66, 31.64, 30.00, 21.87, 31.03.

设零件尺寸服从正态分布, 问这批零件的平均尺寸能否认为是 32.50 毫米? ($\alpha = 0.05$)

19. 设某产品的指标服从正态分布, 它的标准差为 $\sigma = 100$, 现抽取了一个容量为 26 的样本, 计算平均值为 1 580, 问在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下, 能否认为这批产品的指标的期望值 μ 不低于 1 600?

张宇



博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计8讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类联考综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及新编《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇数学教育系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 

张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 

张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 

张宇高等数学18讲 

张宇线性代数9讲 

张宇概率论与数理统计9讲 

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三） 

张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三） 

考研数学命题人终极预测8套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分过关版、高分版）（分数学一、数学二、数学三）

北京理工大学出版社网址：<http://www.bitpress.com.cn>



宇哥考研
新浪微博二维码



张宇考研数学
微信公众号



启航教育
微信公众号

ISBN 978-7-5763-0818-1



9 787576 308181 >

定价：129.80元（共2册）