启航 书课包

2025版

张宇考研数学系列丛书·一

书课包

张宇考研数学基础30讲

○主编 张宇

○副主编 高昆轮

【高等数学分册】

课程有效期至2024年12月31日

扫码领课

北京理工大学出版社

启航书课包

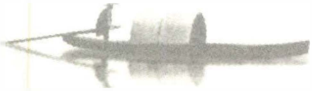
张宇考研数学系列丛书·一

书课包

张宇考研数学基础30讲

【高等数学分册】

○主编 张宇 ○副主编 高昆轮



北京理工大学出版社

前言

《张宇考研数学基础 30 讲》严格按照最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》编写，是真正意义上的考研数学基础阶段辅导用书，根据考研数学命题的趋势，并结合每一届使用本书的考生反馈，本书的 2025 版做了较大幅度的修改和完善，旨在帮助考生建立完整科学的考研数学基础知识结构体系，打下坚实的考研数学基础。

本书分成三个分册：高等数学分册、线性代数分册、概率论与数理统计分册。其中高等数学分册分为 18 讲、线性代数分册分为 6 讲、概率论与数理统计分册分为 6 讲，共 30 讲。每一讲由基础知识结构、基础内容精讲、基础习题精练三大模块组成。其中，基础内容精讲将知识点与例题完全结合在一起，即每讲一部分内容，接下来就配套相应的例题，可以帮助考生快速并深刻消化吸收所学内容。

《张宇考研数学基础 30 讲》书课包是一套完整的考研数学基础阶段备考方案。为帮助考生更好地理解每一个知识点，我对本书做了系统讲解，同学们扫描书中二维码即可快速定位对应知识点的视频讲解。本书的内容是根据基础课程讲解整理出来的学习笔记，我几乎把要说的话一句一句地写出来了，只需要集中精力认真听即可，帮助考生节省了做笔记的时间，真正做到了书和课的完美结合。

我建议考生结合课程反复研读本书直至字字搞懂、句句通透并熟稔于心，达到基础阶段的知识、思路、题型和方法皆会以清晰的结构呈现眼前的效果。本书是我多年基础阶段教学经验的总结，愿助潜心研读者打好地基、夯实基础，勇攀考研数学高峰。

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢考生们的努力和信任。

本书自出版以来，承蒙考生厚爱，在考研数学基础阶段起到了一定的积极作用。望各位不吝赐教，多提意见与建议，特此致谢！

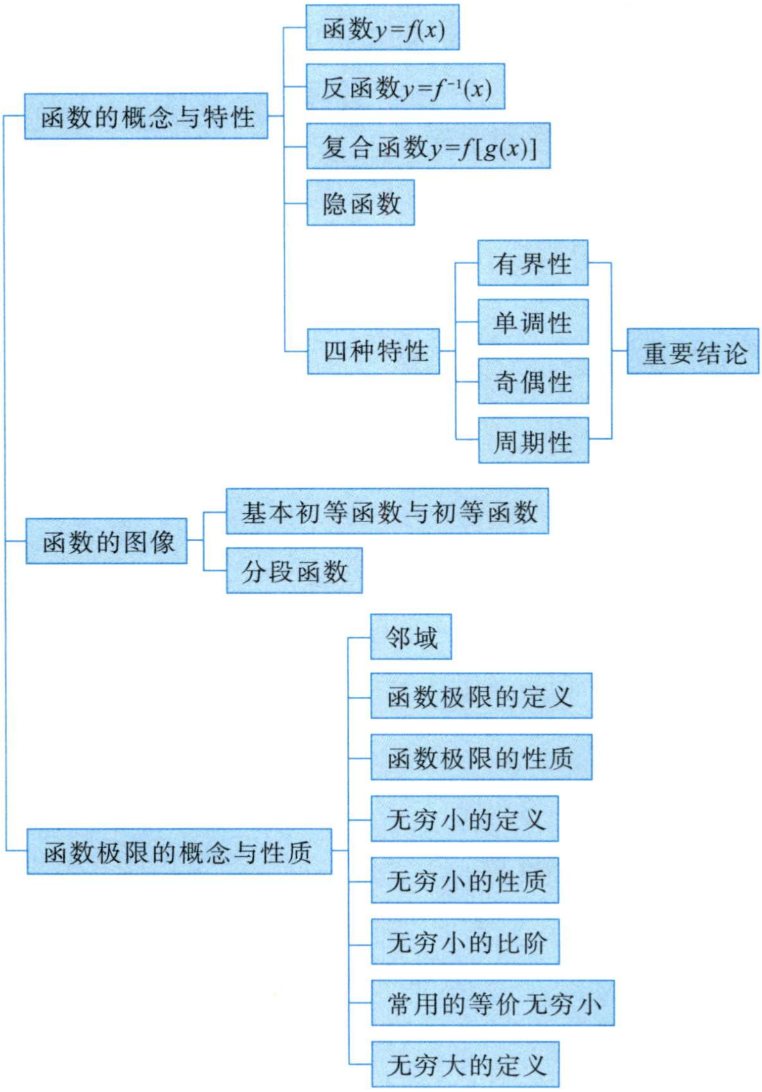
张宇

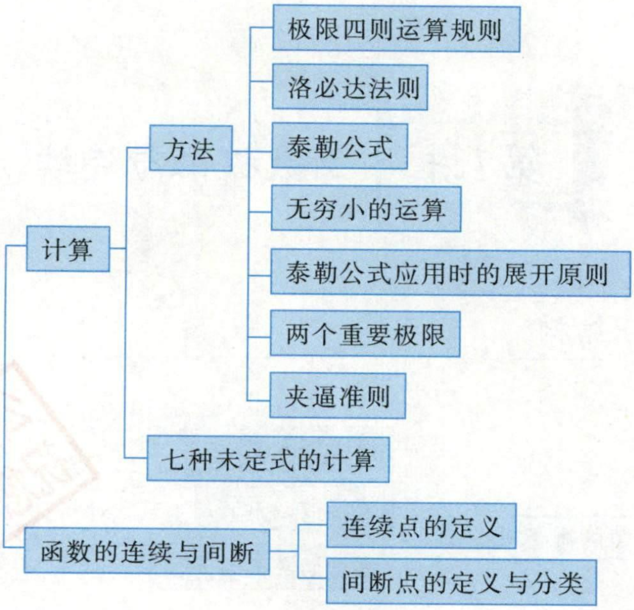
2023 年 6 月　于北京

目 录

第1讲 函数极限与连续

基础知识结构





基础内容精讲

一、函数的概念与特性

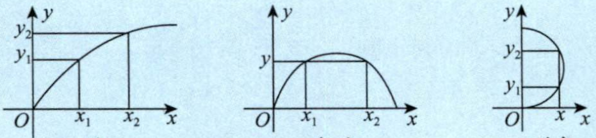
1. 函数

设x与y是两个变量，D是一个给定的数集，若对于每一个$x\in D$，按照一定的法则f，有一个确定的值y与之对应，则称y为x的**函数**，记作$y=f(x)$，称x为**自变量**，y为**因变量**，称数集D为此函数的**定义域**，定义域一般由实际背景中变量的具体意义或者函数对应法则的要求确定，称$\{f(x)\mid x\in D\}$为**值域**.

【注】单值函数与多值函数.

事实上，上述定义的函数是**单值函数**，若给一个x_1，对应一个y_1；给另外一个x_2，对应另外一个y_2，这叫一对一［见图 1-1(a)］. 若给定x_1，x_2（$x_1\neq x_2$），它们对应同一个y，则称多对一［见图 1-1(b)］，所以函数可以一对一，也可以多对一，这叫单值函数.

但是，若一个x对应一个y_1，又对应另一个y_2，也就是一对多，这叫多值函数［见图 1-1(c)］，它不在上述定义中.



一对一
(a)

多对一
(b)

一对多
(c)

图 1-1

我们的研究对象主要是单值函数．

例 1.1 设$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$，$x\geqslant 2$，则$f(x)=$______.

解 应填$\frac{x}{x^2-2}$．

$$f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}=\frac{x+\frac{1}{x}}{x^2+\frac{1}{x^2}}=\frac{x+\frac{1}{x}}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2}$$，于是$f(x)=\frac{x}{x^2-2}$．

例 1.2 设函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，且满足$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，则$f(x)=$______.

解 应填$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$．

由$2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$，得$2f\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x^2}f(x)=\dfrac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\dfrac{\frac{1+2x}{x^2}}{\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}}=\frac{1+2x}{x\sqrt{1+x^2}}$，结合以上两式，消去$f\left(\frac{1}{x}\right)$，可得$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$．

【注】 若给$f(x)+xf(-x)=x$，应学会写$f(-x)-xf(x)=-x$，消去$f(-x)$，得$f(x)=\frac{x+x^2}{1+x^2}$．

2. 反函数

设函数$y=f(x)$的定义域为D，值域为R．如果对于每一个$y\in R$，必存在唯一的$x\in D$使得$y=f(x)$成立，则由此定义了一个新的函数$x=\varphi(y)$，这个函数称为函数$y=f(x)$的**反函数**，一般记作$x=f^{-1}(y)$，它的定义域为R，值域为D．相对于反函数来说，原来的函数也称为**直接函数**．以下两点需要说明．

第一，严格单调函数必有反函数，比如函数$y=x^2(x\in[0,+\infty))$是严格单调函数，故它有反函数$x=\sqrt{y}$．

第二，若把$x=f^{-1}(y)$与$y=f(x)$的图形画在同一坐标系中，则它们完全重合．只有把$y=f(x)$的反函数$x=f^{-1}(y)$写成$y=f^{-1}(x)$后，它们的图形才关于$y=x$对称，事实上这也是字母x与y互换的结果．

【注】 有反函数的函数不一定是单调函数．比如$f(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ \dfrac{1}{x}, & x<0, \end{cases}$其图像如图 1-2 所示，其反函数即为$f(x)$本身，但$f(x)$不是单调函数．

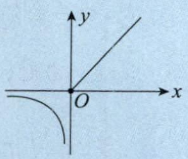


图 1-2

例 1.3 求函数$y=f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$的反函数$f^{-1}(x)$的表达式及其定义域．

解 直接由$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$解出$x=f^{-1}(y)$会很麻烦，现采用下述方法．

$$-y=-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}$$

$$=\ln\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)}=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),$$

所以 $$\mathrm{e}^{-y}=\sqrt{x^2+1}-x, \qquad ①$$

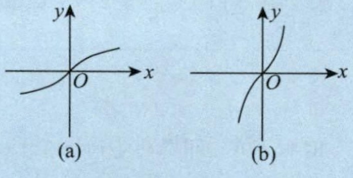
再由$y=f(x)$的表达式有 $$\mathrm{e}^{y}=\sqrt{x^2+1}+x, \qquad ②$$

②－①，得 $$x=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{y}-\mathrm{e}^{-y}\right),$$

交换上式中x，y的位置后就是$y=f(x)$的反函数，即

$$y=f^{-1}(x)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}\right),\ -\infty<x<+\infty .$$

【注】 (1) 函数$y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$叫作反双曲正弦函数，其图像如图 1-3(a) 所示．函数$y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{2}$叫作双曲正弦函数，其图像如图 1-3(b) 所示．考生应记住这两个函数的图像．



(a) (b)

图 1-3

(2) $y=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$叫作双曲余弦函数，其图像如图 1-4 所示，它是偶函数，是一种特殊的悬链线．达·芬奇在画《抱银貂的女子》时，曾仔细思索过女子的脖子上戴的项链的形状是什么函数，可惜他一生都未能明白，在他去世后近 200 年后，约翰·伯努利解决了这个问题．那不是抛物线$y=x^2$，而是悬链线$y=\dfrac{a}{2}\left(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}}\right)$，取$a=1$，便是此例．

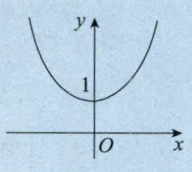


图 1-4

(3) 以后会知道如下 3 个重要结论 .

①$x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\sim x$.

②$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，于是 $\int\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\mathrm{d}x=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+C$.

③由于 $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$ 是奇函数，于是 $\int_{-1}^{1}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)+x^2\right]\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}x^2\mathrm{d}x=\dfrac{2}{3}$.

3. 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1，函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义，且 $g(D)\subset D_1$，则由

$$y=f[g(x)](x\in D)$$

确定的函数称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的**复合函数**，它的定义域为 D，u 称为**中间变量**. 考生要掌握复合的方法 .

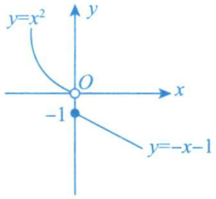
例 1.4　设 $f(x)=x^2$，$f[\varphi(x)]=-x^2+2x+3$，且 $\varphi(x)\geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 及其定义域与值域 .

解　由题设条件知，$f[\varphi(x)]=\varphi^2(x)=-x^2+2x+3$，于是 $\varphi(x)=\sqrt{-x^2+2x+3}$.

由 $-x^2+2x+3\geqslant 0$，即 $(x-3)(x+1)\leqslant 0$，知 $\varphi(x)$ 的定义域为 $[-1,3]$.

又 $\sqrt{-x^2+2x+3}=\sqrt{-(x-1)^2+4}$，当 $x=1$ 时，$\varphi(1)=2$ 为最大值，显然 $\varphi(-1)=\varphi(3)=0$ 为最小值，故 $\varphi(x)$ 的值域为 $[0,2]$.

例 1.5　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x-1, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$______.



解　应填 $\begin{cases}3+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$

先求出 $g[f(x)]$ 的表达式 .

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), & f(x)\leqslant 0,\\ 2+f(x), & f(x)>0,\end{cases}$$

当 $f(x)\leqslant 0$ 时，$x\geqslant 0$，此时 $f(x)=-x-1$；当 $f(x)>0$ 时，$x<0$，此时 $f(x)=x^2$.

综上，

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-(-x-1), & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0\end{cases}=\begin{cases}3+x, & x\geqslant 0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

4. 隐函数

设方程 $F(x,y)=0$，若当 x 取某区间内的任一值时，总有满足该方程的唯一的值 y 存在，则称方程 $F(x,y)=0$ 在上述区间内确定了一个隐函数 $y=y(x)$.

如$x+y^3-1=0$就表示一个隐函数，且可显化为$y=\sqrt[3]{1-x}$；再如$\sin(xy)=\ln\frac{x+e}{y}+1$也表示一个隐函数，但不易显化.

一般来说，由$F(x,y)=0$所确定的隐函数求$y(x_0)$，若代入x_0易求出$y(x_0)$，则直接求之；若不易求出$y(x_0)$，则用观察法.如：

①设函数$y=y(x)$由方程$\ln y-\frac{x}{y}+x=0$确定，当$x=2$时，$y(2)=1$.

$\ln y-\frac{2}{y}+2=0$，显然可看出，$y=1$时成立

②设函数$y=y(x)$由方程$\ln y+e^{y-1}=\frac{x}{2}$确定，当$x=2$时，$y(2)=1$.

$\ln y+e^{y-1}=1$，显然可看出，$y=1$时成立

> **【注】**考研试题中常出现这种问题，考生要重视.

5. 函数的四种特性

(1) 有界性.

设$f(x)$的定义域为D，数集$I\subset D$.如果存在某个正数M，使对任一$x\in I$，有$|f(x)|\leqslant M$，则称$f(x)$在I上**有界**；如果这样的M不存在，则称$f(x)$在I上**无界**.

> **【注】**(1) 从几何上看，如果在给定的区间，函数$y=f(x)$的图形能够被直线$y=-M$和$y=M$“完全包起来”，则为有界；从解析上说，如果找到某个正数M，使得$|f(x)|\leqslant M$，则为有界.
>
> (2) 有界还是无界的讨论首先需**指明区间**I，不知区间，无法谈论有界性.比如$y=\frac{1}{x}$在$(2,+\infty)$内有界，但在$(0,2)$内无界.
>
> (3) 事实上，只要在区间I上或其端点处存在点x_0，使得$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$的值为无穷大，则没有任何两条直线$y=-M$和$y=M$可以把$I$上的$f(x)$“包起来”，这就叫无界.考研中常出这样的题目，比如例1.17.

例 1.6 证明函数$f(x)=\frac{x}{1+x^2}$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

证明 当$x\neq 0$时，

$$|f(x)|=\frac{|x|}{1+x^2}=\frac{1}{\frac{1}{|x|}+|x|},$$

由不等式$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\,(a,b>0)$，有$\frac{1}{|x|}+|x|\geqslant 2\sqrt{\frac{1}{|x|}|x|}=2$，即$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}$.

当$x=0$时，$f(0)=0$.综上，函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有界.

(2) 单调性.

设$f(x)$的定义域为D，区间$I\subset D$.如果对于区间I上任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)<$

$f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上**单调增加**．如果对于区间I上任意两点x_1，x_2，当$x_1<x_2$时，恒有$f(x_1)>f(x_2)$，则称$f(x)$在区间I上**单调减少**．

【注】后面会看到，在考研试题中常常用求导的方法来讨论函数在某个区间上的单调性，但是定义法不可以忘记．试题中也常用到如下定义法的判别形式，请读者留意．

对任意x_1，$x_2\in D$，$x_1\neq x_2$，有

$$f(x)\text{是单调增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]>0\text{；}$$

$$f(x)\text{是单调减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]<0\text{；}$$

$$f(x)\text{是单调不减函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\geqslant0\text{；}$$

$$f(x)\text{是单调不增函数}\Leftrightarrow(x_1-x_2)[f(x_1)-f(x_2)]\leqslant0\text{．}$$

例 1.7　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上有定义，任给x_1，x_2，$x_1\neq x_2$，均有$(x_1-x_2)\cdot[f(x_1)-f(x_2)]>0$，则以下函数一定单调增加的是（　　）．

(A) $|f(x)|$　　(B) $f(|x|)$　　(C) $f(-x)$　　(D) $-f(-x)$

解　应选 (D).

由上述注知，$f(x)$是单调增函数，又$f(-x)$与$f(x)$的图像关于y轴对称，$-f(-x)$与$f(x)$的图像关于原点对称［见附录 1(2) 的②，③］，可知$f(-x)$单调减少，$-f(-x)$单调增加，$|f(x)|$是否具有单调性与$f(x)$的正负相关，$f(|x|)$为偶函数，在$(-\infty,+\infty)$上无单调性［见附录 1(2) 的⑤，⑥］，故选 (D).

(3) 奇偶性．

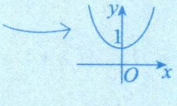
设$f(x)$的定义域D关于原点对称（若$x\in D$，则$-x\in D$）．如果对于任一$x\in D$，恒有$f(-x)=f(x)$，则称$f(x)$为**偶函数**．如果对于任一$x\in D$，恒有$f(-x)=-f(x)$，则称$f(x)$为**奇函数**．我们熟知的是，偶函数的图形关于y轴对称，奇函数的图形关于原点对称．

【注】(1) 前提：定义域关于原点对称．

(2) 基本类型．

①$f(x)+f(-x)$必是偶函数．

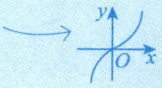
如$\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$．



如$\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)^2}$．

②$f(x)-f(-x)$必是奇函数．

如$\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$．



如 $\ln\dfrac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)$.

对任一函数 $f(x)$，令 $u(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$， $v(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，则 $u(x)$ 是偶函数， $v(x)$ 是奇函数 . 由

$$f(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]=u(x)+v(x),$$

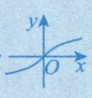
可知任何一个函数都可以写成一个奇函数与一个偶函数之和的形式 .

③$f[\varphi(x)]$（内偶则偶，内奇同外）.

$$\begin{cases}\text{奇[偶]}\Rightarrow\text{偶. 如}\sin x^2.\\ \text{偶[奇]}\Rightarrow\text{偶. 如}\cos(\sin x), |\sin x|.\\ \text{奇[奇]}\Rightarrow\text{奇. 如}\sin\dfrac{1}{x}, \sqrt[3]{\tan x}.\\ \text{偶[偶]}\Rightarrow\text{偶. 如}\cos|x|, |\cos x|.\\ \text{非奇非偶[偶]}\Rightarrow\text{偶. 如}e^{x^2}, \ln|x|.\end{cases}$$

奇

④一个特色：$\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.



⑤$f(x)$ 奇 $\Rightarrow f'(x)$ 偶 $\Rightarrow f''(x)$ 奇 $\Rightarrow\cdots$. 见例 3.1.

（偶）　（奇）　（偶）

⑥$f(x)$ 奇 $\Rightarrow\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 偶 .

（偶）　（奇）

⑦设对任意的 x, y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，则 $f(x)$ 是奇函数，证明见例 1.8.

例 1.8　设对任意 x, y，都有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，证明：$f(x)$ 是奇函数 .

证明　令 $x=y=0$，则 $f(0)=f(0)+f(0)$，于是 $f(0)=0$，再令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)$，即 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 是奇函数 .

(4) 周期性 .

设 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 T，使得对于任一 $x\in D$，有 $x\pm T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**周期函数**，T 称为 $f(x)$ 的**周期** .

【注】重要结论 .

①若 $f(x)$ 以 T 为周期，则 $f(ax+b)$ 以 $\dfrac{T}{|a|}$ 为周期 .

②若 $g(x)$ 是周期函数，则复合函数 $f[g(x)]$ 也是周期函数，如 $e^{\sin x}$，$\cos^2 x$ 等.

③若 $f(x)$ 是以 T 为周期的可导函数，则 $f'(x)$ 也以 T 为周期. 见例 3.1.

④若 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则只有在 $\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x=0$ 时，$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 也以 T 为周期. 见例 9.25.

例 1.9　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上满足 $f(x)=f(x-\pi)+\sin x$. 证明：$f(x)$ 是以 $T=2\pi$ 为周期的周期函数.

证明　多次利用题目等式条件，得到 $f(x+2\pi)=f(x+\pi)+\sin(x+2\pi)=f(x)+\sin(x+\pi)+\sin(x+2\pi)=f(x)$，故 $f(x)$ 以 $T=2\pi$ 为周期.

二、函数的图像

1. 基本初等函数与初等函数

基本初等函数：常数函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

(1) 常数函数. → 易考"找交点个数"或在概率论中求概率 $P\{g(X)\leq y\}$.

$y=A$，A 为常数，其图形为平行于 x 轴的水平直线（见图 1-5). → 为偶函数

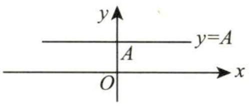


图 1-5

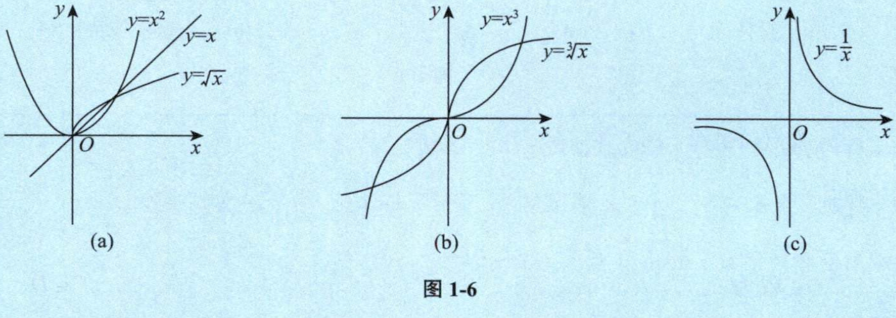
(2) 幂函数.

$y=x^{\mu}$（μ 是实数）.

【注】(1) $y=x^{\mu}$ 的定义域和值域取决于 μ 的值. 当 $x>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 都有定义.

(2) 常用的幂函数（见图 1-6).

$$y=x,\ y=x^2,\ y=\sqrt{x},\ y=x^3,\ y=\sqrt[3]{x},\ y=\frac{1}{x}.$$



(a)　(b)　(c)

图 1-6

(3) 当 $x>0$ 时，由 $y=x$ 与 $y=\sqrt{x}$，$y=\sqrt[3]{x}$，$y=\ln x$ [见图 1-8(b)] 具有相同的单调性且与 $y=\frac{1}{x}$ 具有相反的单调性，故

①见到 $\sqrt{u}$，$\sqrt[3]{u}$ 时，可用 u 来研究最值；

②见到$|u|$时，由$|u|=\sqrt{u^2}$，可用u^2来研究最值；

③见到$u_1u_2u_3$时，可用$\ln(u_1u_2u_3)=\ln u_1+\ln u_2+\ln u_3$来研究最值；

④见到$\frac{1}{u}$时，可用u来研究最值(结论相反，即$\frac{1}{u}$与u的最大值点、最小值点相反).

利用以上①～④，可使得计算简单方便.

例 1.10 设$0<x<\frac{1}{2}$，求$y(x)=x^6(1-x)^2(1-2x)^4$的最大值点.

解 取对数，得

$$\ln y(x)=6\ln x+2\ln(1-x)+4\ln(1-2x).$$

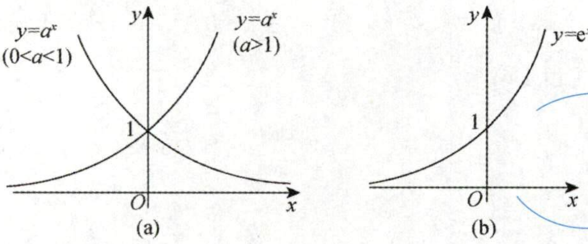
令

$$\frac{\mathrm{d}[\ln y(x)]}{\mathrm{d}x}=\frac{6}{x}-\frac{2}{1-x}-\frac{8}{1-2x}=\frac{24x^2-28x+6}{x(1-x)(1-2x)}=0,$$

即$12x^2-14x+3=0$，解得$x=\frac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，因为$\frac{7+\sqrt{13}}{12}>\frac{1}{2}$不符合题意，又$\lim\limits_{x\to 0^+}y(x)=\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{2}\right)^-}y(x)=0<y\left(\frac{7-\sqrt{13}}{12}\right)$，故$y$的最大值点为$x=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

(3) 指数函数.

$y=a^x(a>0,\ a\neq 1)$ [见图 1-7(a)].



很重要★

找对象，求$\lim\limits_{x\to\infty}e^x$.

图 1-7

【注】(1) 定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$(0,+\infty)$.

(2) 单调性：当$a>1$时，$y=a^x$单调增加；当$0<a<1$时，$y=a^x$单调减少.

(3) 常用的指数函数：$y=\mathrm{e}^x$ [见图 1-7(b)].

(4) 极限：$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.

(5) 特殊函数值：$a^0=1$, $\mathrm{e}^0=1$.

(6) 指数运算法则.

如 $|x|^{3n}=(|x|^3)^n=(|x^3|)^n$

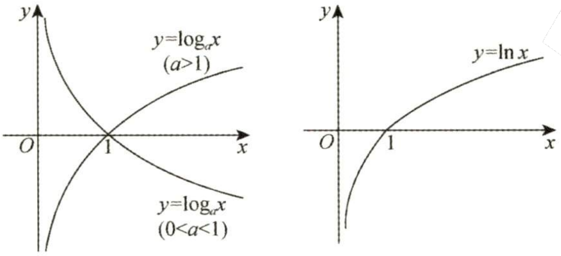
$$a^\alpha \cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta},\ \frac{a^\alpha}{a^\beta}=a^{\alpha-\beta},\ (a^\alpha)^\beta=a^{\alpha\beta},\ (ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha,\ \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha=\frac{a^\alpha}{b^\alpha},$$

如 $e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)$

其中 a, b 是正实数，α, β 是任意实数 .

(4) 对数函数 .

$y=\log_a x(a>0,\ a\neq1)$ [见图 1-8(a)] 是 $y=a^x$ 的反函数 .



(a) (b)

图 1-8

【注】(1) 定义域：$(0,+\infty)$，值域：$(-\infty,+\infty)$.

(2) 单调性：当 $a>1$ 时，$y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，$y=\log_a x$ 单调减少 .

(3) 常用的对数函数：$y=\ln x$ (自然对数：$\ln x=\log_e x$, $e=2.71828\cdots$)[见图 1-8(b)].

(4) 特殊函数值：$\log_a 1=0$, $\log_a a=1$, $\ln 1=0$, $\ln e=1$.

(5) 极限：$\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

(6) 常用公式：$x=e^{\ln x}(x>0)$, $u^v=e^{\ln u^v}=e^{v\ln u}(u>0)$.

(7) 对数运算法则 .

积变和

① $\log_a(MN)=\log_a M+\log_a N$ (积的对数 = 对数的和).

商变差

② $\log_a \dfrac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$ (商的对数 = 对数的差).

幂次变倍数

③ $\log_a M^n=n\log_a M$，$\log_a \sqrt[n]{M}=\dfrac{1}{n}\log_a M$ (幂的对数 = 对数的倍数).

常考：当 $x>0$ 时，

中值定理（拉格朗日中值定理）证明

$$\ln\sqrt{x}=\frac{1}{2}\ln x;\ \ln\frac{1}{x}=-\ln x;\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\ln\frac{x+1}{x}=\ln(x+1)-\ln x .$$

例 1.11 已知 $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$, $x\in\mathbf{R}$，则 $2^x=$ (　　) .

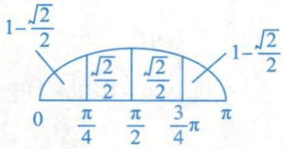
(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$　　(B) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$　　(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\ln 2)x^n}{n!}$　　(D) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(\ln 2)x^n}{n!}$

解　应选 (B).

由于 $2^x=\mathrm{e}^{x\ln 2}$，又 $\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!},\ x\in\mathbf{R}$，因此 $2^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(x\ln 2)^n}{n!}$.

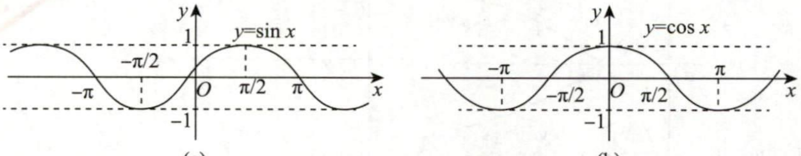
(5) 三角函数 .

一拱的面积为2.



①正弦函数与余弦函数 .

正弦函数 $y=\sin x$ [见图 1-9(a)]，余弦函数 $y=\cos x$ [见图 1-9(b)].



(a)　　(b)

图 1-9

【注】(1) 定义域：$(-\infty,+\infty)$，值域：$[-1,1]$.

(2) 奇偶性：$y=\sin x$ 是奇函数，$y=\cos x$ 是偶函数，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(3) 周期性：$y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 均以 2π 为最小正周期，$x\in(-\infty,+\infty)$.

(4) 有界性：$|\sin x|\leqslant 1,\ |\cos x|\leqslant 1$.

(5) 特殊函数值：

$$\sin 0=0,\ \sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2},\ \sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\sin\frac{\pi}{2}=1,\ \sin\pi=0,\ \sin\frac{3\pi}{2}=-1,\ \sin 2\pi=0,$$

$$\cos 0=1,\ \cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

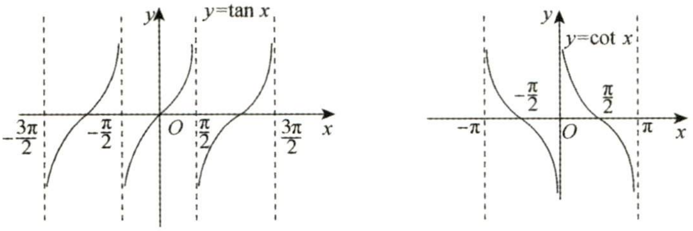
$$\cos\frac{\pi}{2}=0,\ \cos\pi=-1,\ \cos\frac{3\pi}{2}=0,\ \cos 2\pi=1\ .$$

(6) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$.

②正切函数与余切函数 .

正切函数 $y=\tan x$ [见图 1-10(a)]，余切函数 $y=\cot x$ [见图 1-10(b)].

$$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x},\ \cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}\ .$$



(a)　　　　(b)

图 1-10

【注】(1) 定义域：$y=\tan x$ 的定义域为 $\left\{x\middle|x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}$；$y=\cot x$ 的定义域为 $\{x\,|\,x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})\}$．

值域：$(-\infty,+\infty)$．

(2) 奇偶性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均为奇函数（在其定义域内）.

(3) 周期性：$y=\tan x$ 和 $y=\cot x$ 均以 π 为最小正周期（在其定义域内）.

(4) 特殊函数值：

$$\tan 0=0,\ \tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},\ \tan\frac{\pi}{4}=1,\ \tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3},$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x=\infty,\ \tan\pi=0,\ \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}}\tan x=\infty,\ \tan 2\pi=0,$$

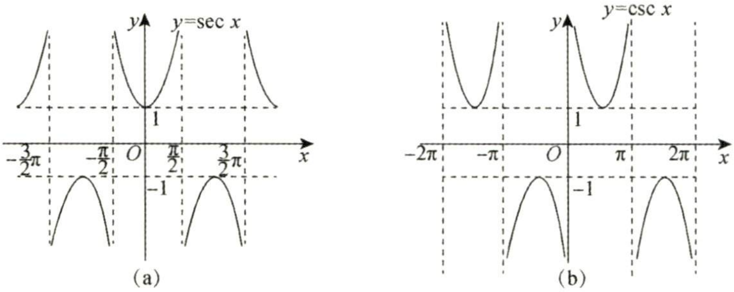
$$\lim_{x\to 0}\cot x=\infty,\ \cot\frac{\pi}{6}=\sqrt{3},\ \cot\frac{\pi}{4}=1,\ \cot\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\cot\frac{\pi}{2}=0,\ \lim_{x\to\pi}\cot x=\infty,\ \cot\frac{3\pi}{2}=0,\ \lim_{x\to 2\pi}\cot x=\infty.$$

③正割函数与余割函数 .

正割函数 $y=\sec x$［见图 1-11(a)]，余割函数 $y=\csc x$［见图 1-11(b)].

$$\sec x=\frac{1}{\cos x},\ \csc x=\frac{1}{\sin x}.$$



(a)　　　　(b)

图 1-11

【注】(1) 定义域：$y=\sec x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})\right\}$；$y=\csc x$ 的定义域为 $\{x \mid x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})\}$.

值域：$(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$.

(2) 奇偶性：$y=\sec x$ 为偶函数，$y=\csc x$ 为奇函数（在其定义域内）.

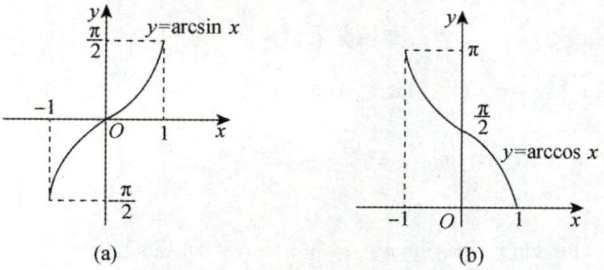
(3) 周期性：$y=\sec x$ 和 $y=\csc x$ 均以 2π 为最小正周期（在其定义域内）.

(4) $1+\tan^2\alpha=\sec^2\alpha$；$1+\cot^2\alpha=\csc^2\alpha$.

(6) 反三角函数 .

①反正弦函数与反余弦函数 .

反正弦函数 $y=\arcsin x$ [见图 1-12(a)]，反余弦函数 $y=\arccos x$ [见图 1-12(b)].



(a)　(b)

图 1-12

$y=\arcsin x$ 是 $y=\sin x\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，$y=\arccos x$ 是 $y=\cos x(0\leqslant x\leqslant\pi)$ 的反函数 .

【注】(1) 主值区间 .

$y=\arcsin x$ 的主值区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$，$y=\arccos x$ 的主值区间为 $[0,\pi]$.

(2) 反三角函数的恒等式有

$$\sin(\arcsin x)=x,\ x\in[-1,1],\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1];$$

$$\cos(\arccos x)=x,\ x\in[-1,1],\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2},\ x\in[-1,1];$$

$$\arcsin(\sin y)=y,\ y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right];$$

$$\arccos(\cos y)=y,\ y\in[0,\pi];$$

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}(-1\leqslant x\leqslant 1) .$$

$\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,1]$
令 $t=\arccos x\in[0,\pi]$
则 $x=\cos t$，$\sin t>0$
又 $\sin^2 t+\cos^2 t=1$
因此 $\sin t=\sqrt{1-x^2}$
即 $\sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$

(3) 特殊函数值：

$$\arcsin 0=0,\ \arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6},\ \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4},\ \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3},\ \arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$\arccos 1=0$，$\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$，$\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$，$\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$，$\arccos 0=\frac{\pi}{2}$.

例 1.12　设 $y=\sin x$，$0\leqslant x\leqslant 2\pi$，求其所有单调区间上的反函数.

只有当 x 落在 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上时，才有反函数 $x=\arcsin y$，$y\in[-1,1]$.

解　当 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时，对 $y=\sin x$，有 $x=\arcsin y$，$y\in[0,1]$；

当 $\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2}$ 时（见图 1-13），有 $-\frac{\pi}{2}<x-\pi\leqslant\frac{\pi}{2}$，此时 $\sin(x-\pi)=-\sin(\pi-x)=-\sin x=-y$，于是有 $x-\pi=-\arcsin y$，故 $x=\pi-\arcsin y$，$y\in[-1,1)$；

当 $\frac{3\pi}{2}<x\leqslant 2\pi$ 时（见图 1-13），有 $-\frac{\pi}{2}<x-2\pi\leqslant 0$，此时 $\sin(x-2\pi)=\sin x=y$，于是有 $x-2\pi=\arcsin y$，故

$$x=2\pi+\arcsin y,\ y\in(-1,0].$$

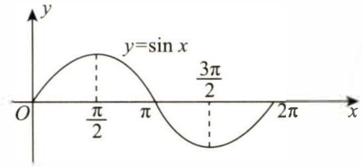


图 1-13

$$\text{综上所述，}x=\begin{cases}\arcsin y, & 0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2},\\ \pi-\arcsin y, & \frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3\pi}{2},\\ 2\pi+\arcsin y, & \frac{3}{2}\pi<x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

②反正切函数与反余切函数.

反正切函数 $y=\arctan x$ [见图 1-14(a)]，反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$ [见图 1-14(b)].

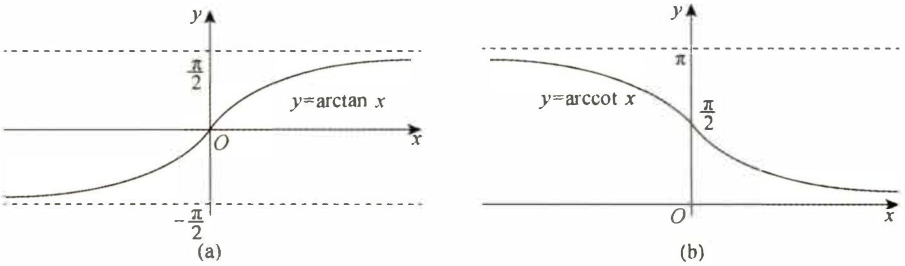


图 1-14

$y=\arctan x$ 是 $y=\tan x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ 的反函数，$y=\operatorname{arccot} x$ 是 $y=\cot x(0<x<\pi)$ 的反函数.

【注】(1) 定义域：$(-\infty, +\infty)$.

值域：$y=\arctan x$ 的值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=\operatorname{arccot} x$ 的值域为 $(0, \pi)$.

(2) 单调性：$y=\arctan x$ 单调增加，$y=\operatorname{arccot} x$ 单调减少 .

(3) 奇偶性：$y=\arctan x$ 为奇函数 (在其定义域内).

(4) 有界性：两个函数在其定义域内有界，$-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\operatorname{arccot} x<\pi$.

(5) 性质：$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\dfrac{\pi}{2}(-\infty<x<+\infty)$.

(6) 特殊函数值：$\arctan 0=0$，$\arctan \dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\pi}{6}$，$\arctan 1=\dfrac{\pi}{4}$，$\arctan \sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$，

$$\operatorname{arccot} 0=\frac{\pi}{2}, \operatorname{arccot} \sqrt{3}=\frac{\pi}{6}, \operatorname{arccot} 1=\frac{\pi}{4}, \operatorname{arccot} \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{3} .$$

(7) 极限：$\lim\limits_{x \to -\infty} \arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arccot} x=\pi$，$\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arccot} x=0$.

(7) 初等函数 .

由基本初等函数经过有限次的四则运算，以及有限次的复合步骤所构成的并且可以由一个式子所表示的函数称为**初等函数** .

【注】(1) 初等函数的定义域可以是一个区间，也可以是几个区间的并集，甚至可以是一些孤立的点 . 例如，$y=\sqrt{\cos \pi x-1}$ 的定义域是 $x=0, \pm 2, \pm 4, \cdots$.

(2) 幂指函数 $u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}$ 也是初等函数，如 $x>0$ 时，$f(x)=x^x=\mathrm{e}^{x\ln x}$ 是初等函数，其图形如图 1-15 所示 . 具体作图过程见例 5.12.

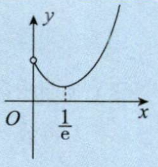


图 1-15

2. 分段函数

在自变量的不同变化范围中，对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数** . 需要强调一句，分段函数是用几个式子来表示的一个 (不是几个) 函数，一般来说，它不是初等函数 . 分段函数的典型形式如下：

$$f(x)=\begin{cases}\varphi_1(x), & x>x_0, \\ a, & x=x_0, \\ \varphi_2(x), & x<x_0\end{cases} \text{或 } f(x)=\begin{cases}\varphi(x), & x\neq x_0, \\ a, & x=x_0.\end{cases}$$

分段函数很重要，原因在于其形式的复杂性所带来的命题的丰富性 . 后面会看到，不论是求极限、求导数，还是求积分，出现最多的研究对象之一便是分段函数 .

下面列出三个重要的分段函数 .

①$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0, \\ -x, & x<0\end{cases}$ 称为**绝对值函数**，如图 1-16(a) 所示 .

②$y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$称为**符号函数**，如图 1-16(b) 所示．对于任意实数x，有$x=|x|\operatorname{sgn} x$．

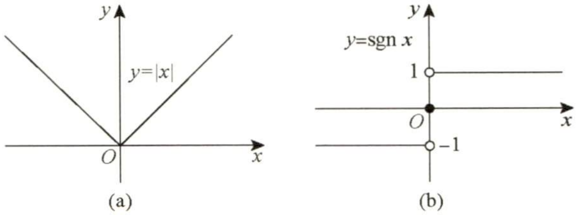


图 1-16

③$y=[x]$称为**取整函数**．先给出定义：设x为任一实数，不超过x的最大整数称为x的整数部分，记作$[x]$．如

$$[0.99]=0,\ [\pi]=3,\ [-1]=-1,\ [-1.99]=-2.$$

因此，取整函数$y=[x]$的定义域为$\mathbf{R}$，值域为$\mathbf{Z}$．它的图形如图 1-17 所示，在x为整数值处图形发生跳跃．

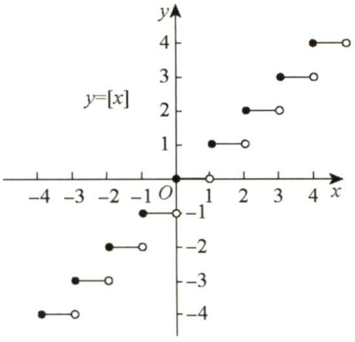


图 1-17

【注】(1) $[x+n]=[x]+n$，其中n为整数．

(2) $x-1<[x]\leqslant x$．

(3) $\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$；$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$．

例 1.13　设$[x]$表示不超过x的最大整数，则$y=x-[x]$是（　　）．

(A) 无界函数　　(B) 单调函数

(C) 偶函数　　(D) 周期函数

解　应选 (D).

由于$y(x+1)=x+1-[x+1]=x+1-([x]+1)=x-[x]=y(x)$，即$y(x)$是周期为 1 的周期函数，其图形如图 1-18 所示，故选 (D).

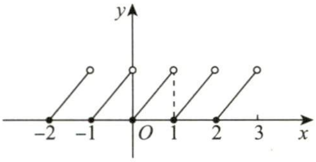


图 1-18

三、函数极限的概念与性质

1. 邻域

①δ邻域．设x_0是数轴上一个点，δ是某一正数，则称$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$为点$x_0$的**$\delta$邻域**，记作$U(x_0,\ \delta)$，即

$$U(x_0,\ \delta)=\left\{x\middle|x_0-\delta<x<x_0+\delta\right\}=\left\{x\middle|\,|x-x_0|<\delta\right\},$$

其中点x_0称为邻域的中心，δ称为邻域的半径．

②去心 δ 邻域 . 定义点 x_0 的去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)=\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$.

③左、右 δ 邻域 . $\{x|0<x-x_0<\delta\}$ 称为点 x_0 的**右 δ 邻域**，记作 $U^+(x_0,\delta)$；$\{x|0<x_0-x<\delta\}$ 称为点 x_0 的**左 δ 邻域**，记作 $U^-(x_0,\delta)$.

④邻域与区间 (区域). 邻域当然属于区间 (区域) 的范畴，但事实上，邻域通常表示“一个局部位置”，比如“点 x_0 的 δ 邻域”就可以称为“点 x_0 的附近”. 于是，函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某 δ 邻域内有定义也就是函数 $f(x)$ 在点 x_0 的附近有定义，这个“附近”到底有多近多远，既难以说明也没有必要说明 .

【注】 关于邻域的一组概念非常重要，因为我们将要“在一个局部位置”细致地研究问题 .

2. 函数极限的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义 . 若存在常数 A，对于任意给定的 $\varepsilon>0$ (不论它多么小)，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则 A 叫作函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \text{或} f(x)\to A(x\to x_0) .$$

写成“ $\varepsilon-\delta$ 语言”： $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时 , 有 $|f(x)-A|<\varepsilon$.

【注 1】 符号“$\forall$”是英文 Arbitrary(任意的) 的首字母上下方向倒着写出来的；符号“$\exists$”是英文 Exist(存在) 的首字母左右方向倒着写出来的 .

【注 2】

		$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
显微镜	$x\to x_0$	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<\lvert x-x_0\rvert<\delta$ 时，有 $f(x)<-M$
	$x\to x_0^+$ (右极限)	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta$ 时，有 $f(x)<-M$
	$x\to x_0^-$ (左极限)	$\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $f(x)>M$	$\forall M>0, \exists\delta>0$，使得当 $0<x_0-x<\delta$ 时，有 $f(x)<-M$

望远镜

续表

	$f(x)\to A$	$f(x)\to\infty$	$f(x)\to+\infty$	$f(x)\to-\infty$
$x\to\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$， 使得当$\lvert x\rvert>X$时， 有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$\lvert x\rvert>X$时， 有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$\lvert x\rvert>X$时， 有$f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$\lvert x\rvert>X$时， 有$f(x)<-M$
$x\to+\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$， 使得当$x>X$时， 有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x>X$时， 有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x>X$时， 有$f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x>X$时， 有$f(x)<-M$
$x\to-\infty$	$\forall\varepsilon>0,\ \exists X>0$， 使得当$x<-X$时， 有$\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x<-X$时， 有$\lvert f(x)\rvert>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x<-X$时， 有$f(x)>M$	$\forall M>0,\ \exists X>0$， 使得当$x<-X$时， 有$f(x)<-M$

例 1.14　已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}$存在，且函数

$$f(x)=\frac{x-\sin x}{x}+x^2\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{1-\cos x},$$

则$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=(\quad)$.

(A) $-\dfrac{1}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{3}$　　(C) $\dfrac{1}{6}$　　(D) $-\dfrac{1}{6}$

解　应选 (D).

设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=A$，且$x\to0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，于是$f(x)=\dfrac{x-\sin x}{x}+2x^2\cdot A$，则

$$\frac{f(x)}{x^2}=\frac{x-\sin x}{x^3}+2A,$$

上式两端同时取$x\to0$时的极限，有

$$A=\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}+2A,$$

则

$$A=\frac{1}{6}+2A,$$

即$A=-\dfrac{1}{6}$. 故选 (D).

3. 函数极限的性质

(1) 唯一性.

如果极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，那么极限唯一.

【注】(1) 函数极限存在的充要条件.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x)=A\text{且}\lim_{x\to x_0^+} f(x)=A,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A \Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\ \lim_{x\to x_0}\alpha(x)=0\ .$$

(2) 关于唯一性的说明.

①对于$x\to\infty$，意味着$x\to+\infty$且$x\to-\infty$；

②对于$x\to x_0$，意味着$x\to x_0^+$且$x\to x_0^-$.

我们称这个细节的问题为自变量取值的“双向性(有正有负)”，基于此，我们看几个重要的函数极限问题.

①$\lim\limits_{x\to\infty}\mathrm{e}^x$不存在，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0$，根据“极限若存在，必唯一”，得原极限不存在；

②$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{|x|}$不存在，因为$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sin x}{-x}=-1$；

③$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在，因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$；

④$\lim\limits_{x\to0}[x]$不存在，因为$\lim\limits_{x\to0^+}[x]=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}[x]=-1$；

⑤分段函数分段点两侧表达式不同，需分别求左、右极限.

例 1.15 当$x\to1$时，函数$\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$的极限(　　).

(A) 等于 1　　(B) 等于 0　　(C) 为 ∞　　(D) 不存在且不为 ∞

解　应选 (D).

函数$\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$在$x=1$处没有定义，在$x=1$的两侧表达式虽然相同，但是注意到当$x\to1$时，$\dfrac{1}{x-1}$左、右极限不相等，因此应该考虑单侧极限.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=0,$$

$$\lim_{x\to1^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}=\infty,$$

可知当$x\to1$时，函数$\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$的极限不存在且不为$\infty$，故选 (D).

【注】 对于上述 $\lim\limits_{x\to1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的情形，由于 $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}$ 与 $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{1}{x-1}$ 不相等，因此不能忽视左极限与右极限，否则会导致错误，这是这类问题经常出现错误的原因 .

例 1.16　设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant0,\\ 2+x, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x-1, & x\geqslant0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to0}g[f(x)]$（　　）.

(A) 为 3　　(B) 为 2　　(C) 为 1　　(D) 不存在

解　应选 (D).

由例 1.5 可知，

$$g[f(x)]=\begin{cases}3+x, & x\geqslant0,\\ 2+x^2, & x<0.\end{cases}$$

又 $\lim\limits_{x\to0^+}g[f(x)]=\lim\limits_{x\to0^+}(3+x)=3\neq\lim\limits_{x\to0^-}g[f(x)]=\lim\limits_{x\to0^-}(2+x^2)=2$，故 $\lim\limits_{x\to0}g[f(x)]$ 不存在 .

(2) 局部有界性 .

如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则存在正常数 M 和 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，有 $|f(x)|\leqslant M$.

【注】 ①设 $\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)$ 存在，则当 $x\to\bullet$ 时，$f(x)$ 有界 . 其中“$x\to\bullet$”是指 $x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\pm\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$ 六种情形 . 值得注意的是，极限存在只是函数局部有界的充分条件，并非必要条件；→如 $y=\sin x$ 在任意区间上有界，但 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sin x$ 不存在

②若 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上为连续函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上必定有界；

③若 $f(x)$ 在 (a,b) 内为连续函数，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 都存在，则 $f(x)$ 在 (a,b) 内必定有界；

④有界函数与有界函数的和、差、积仍为有界函数 .

例 1.17　在下列区间内，函数 $f(x)=\dfrac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}$ 有界的是（　　）.

(A) $(-2,1)$　　(B) $(-1,0)$　　(C) $(1,2)$　　(D) $(2,3)$

解　应选 (B).

所给选项皆为开区间，因此不能直接利用连续函数在闭区间上的有界性定理 . 可以考虑在开区间两个端点处函数的极限是否存在 .

由于 $f(x)$ 在 $x_1=1$，$x_2=3$ 处没有定义，因此当 $x\neq1$，$x\neq3$ 时，$f(x)$ 为初等函数且为连续函数 . 又由

$$\lim_{x\to1}f(x)=\lim_{x\to1}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

$$\lim_{x\to3}f(x)=\lim_{x\to3}\frac{x\sin(x-3)}{(x-1)(x-3)^2}=\infty,$$

可知在区间端点为 1 或 3 的开区间内，$f(x)$ 均为无界函数，故选 (B).

(3) 局部保号性 .

如果$f(x)\to A(x\to x_0)$且$A>0$（或$A<0$），那么存在常数$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$f(x)>0$（或$f(x)<0$）. 如果在x_0的某去心邻域内$f(x)\geqslant 0$（或$f(x)\leqslant 0$）且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则$A\geqslant 0$（或$A\leqslant 0$）.

$\lim f>0\Rightarrow f>0$

$\lim f<0\Rightarrow f<0$

（脱帽严格不等）

$f\geqslant 0\Rightarrow \lim f\geqslant 0$

$f\leqslant 0\Rightarrow \lim f\leqslant 0$

（戴帽非严格不等）

lim我=你：即使给我整个世界，我也只在你身边.

取$\varepsilon=2A$，则$-A<f(x)<3A$，此范围不够精确，不能用于证明此结论.

【注】证明 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(A>0)\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\varepsilon$.

取$\varepsilon=\dfrac{A}{2}>0$，即有$|f(x)-A|<\dfrac{A}{2}$，所以$f(x)>\dfrac{A}{2}>0$，证毕 .

例 1.18 已知$f(x)$在$x=0$的某个邻域内连续，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=-1$，则存在$\delta>0$，（　　）.

(A) 当$x\in(-\delta,0)$时，$f(x)>0$；当$x\in(0,\delta)$时，$f(x)<0$

(B) 当$x\in(-\delta,0)$时，$f(x)<0$；当$x\in(0,\delta)$时，$f(x)>0$

(C) 当$x\in(-\delta,0)$时，$f(x)>0$；当$x\in(0,\delta)$时，$f(x)>0$

(D) 当$x\in(-\delta,0)$时，$f(x)<0$；当$x\in(0,\delta)$时，$f(x)<0$

解 应选 (D).

由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{2f(x)}{x^2}=-1,$$

故$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=-\dfrac{1}{2}<0$，由极限的局部保号性可知，在$x=0$的某去心邻域内有$\dfrac{f(x)}{x^2}<0$，即$f(x)<0$，从而选 (D).

4. 无穷小的定义

如果当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时，函数$f(x)$的极限为零，那么称函数$f(x)$为当$x\to x_0$（或$x\to\infty$）时的无穷小，记为

包括 本身就是0→是一个常数
　　 本身不是0，是趋于0的$f(x)$或$\{x_n\}$→是一个极限过程

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=0\ （或\lim_{x\to\infty}f(x)=0）.$$

【注】（脱帽法）$\lim\limits_{x\to\bullet}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，这里$\lim\limits_{x\to\bullet}\alpha=0$，即$\alpha$是$x\to\bullet$时的无穷小 .

5. 无穷小的性质

①**有限个**无穷小的和是无穷小 .

②有界函数与无穷小的乘积是无穷小 .

③**有限个**无穷小的乘积是无穷小 .

6. 无穷小的比阶

设在自变量的同一变化过程中，$\lim\alpha(x)=0$, $\lim\beta(x)=0$，且 $\beta(x)\neq 0$，则

①若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **高阶的无穷小**，记为 $\alpha(x)=o\big(\beta(x)\big)$；

②若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$，则称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ **低阶的无穷小**；

③若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**同阶无穷小**；

④若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，则称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是**等价无穷小**，记为 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

⑤若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{[\beta(x)]^k}=c\neq 0, k>0$，则称 $\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的 k **阶无穷小** .

【注】并不是任意两个无穷小都可进行比阶的 . 例如，当 $x\to 0$ 时，$x\sin\dfrac{1}{x}$ 与 x^2 虽然都是无穷小，但是却不可以比阶，也就是说既无高低阶之分，也无同阶可言，因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin\frac{1}{x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在 .

7. 常用的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时，常用的等价无穷小有

$$\sin x\sim x,\ \tan x\sim x,\ \arcsin x\sim x,\ \arctan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x,\ \mathrm{e}^x-1\sim x,$$

$$a^x-1\sim x\ln a,\ 1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2,\ (1+x)^a-1\sim ax\ .$$

【注】 使用时一般都要做广义化：可将 x 替换为趋向于 0 的函数，请灵活使用 .

8. 无穷大的定义

如果当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，函数 $|f(x)|$ 无限增大，那么称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的**无穷大**，记为

同无穷小，也是一个极限过程

一定无界，但无界不一定是无穷大量

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty\ (\text{或}\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty)\ .$$

【注】 无穷小与无穷大的关系 .

在自变量的同一变化过程中，如果$f(x)$为无穷大，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷小；反之，如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$\frac{1}{f(x)}$为无穷大．

用除法的新颖观点来理解“无穷”．

$\frac{1}{1/2}=2(次)$ $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

$\frac{1}{1/4}=4(次)$ $1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0$

$\frac{1}{0}=不存在$ $1-0-0-\cdots\neq 0$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty(次)$ $1-x-x-\cdots=0$

例 1.19 设$x\to 0$时，$e^{\tan x}-e^{\sin x}$与x^n是同阶无穷小，则n为（　　）．

(A)1　　(B)2

(C)3　　(D)4

解 应选 (C).

当$x\to 0$时，

$$e^{\tan x}-e^{\sin x}=e^{\sin x}(e^{\tan x-\sin x}-1)\sim\tan x-\sin x=\tan x(1-\cos x)\sim\frac{1}{2}x^3,$$

因此选 (C).

四、计算

(一) 方法

1. 极限四则运算规则

若$\lim f(x)=A,\lim g(x)=B$，那么

① $\lim[kf(x)\pm lg(x)]=k\lim f(x)\pm l\lim g(x)=kA\pm lB$，其中$k,l$为常数；

② $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$．特别地，若$\lim f(x)$存在，$n$为正整数，则

$$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n;$$

③ $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}(B\neq 0)$．

加法中，有任何一部分极限存在，则可直接拆分．

【注】(1) 若$\lim f(x)$存在，$\lim g(x)$不存在，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$必不存在．

$=\lim f(x)\pm\lim g(x)$

(2) 若$\lim f(x)$不存在，$\lim g(x)$也不存在，则$\lim[f(x)\pm g(x)]$不一定不存在．

(3) 若$\lim f(x)=A\neq 0$，则$\lim f(x)g(x)=A\lim g(x)$，即乘除法中非零因子可往外先提出去．

例 1.20 证明：(1) 若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A$，且$\lim g(x)=0$，则$\lim f(x)=0$；

(2) 若$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=A\neq 0$，且$\lim f(x)=0$，则$\lim g(x)=0$．

证明 (1) 由于$f(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)$，则

$$\lim f(x)=\lim\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)=\lim\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\lim g(x)=A\cdot 0=0\ .$$

(2) 由于 $g(x)=\dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}$，则 $\lim g(x)=\lim\dfrac{f(x)}{\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}}=\dfrac{0}{A}=0$.

【注】以上结论非常重要，以后在有关定参数的题目中可直接使用，如下例．

例 1.21 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5$，则 b = (　　)．

(A) -4　　(B) -3　　(C) -2　　(D) -1

解 应选 (A).

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-a}(\cos x-b)=5\neq 0$，由例 1.20 的 (2) 知，$\lim\limits_{x\to 0}(\mathrm{e}^x-a)=0$，故 $a=1$，此时原极限变为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\mathrm{e}^x-1}(\cos x-b)=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x-b)=1-b$，故 $b=-4$.

2. 洛必达法则

洛必达

（1661—1704）

法则一 设①当 $x\to a$(或 $x\to\infty$)时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于零；

② $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内(或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数)存在，且 $F'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$) 存在或为无穷大，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}\ \left(\text{或}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}\right).$$

法则二 设①当 $x\to a$ (或 $x\to\infty$) 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 都趋于无穷大；

② $f'(x)$ 及 $F'(x)$ 在点 a 的某去心邻域内 (或当 $|x|>X$，此时 X 为充分大的正数) 存在，且 $F'(x)\neq 0$；

③ $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ (或 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$) 存在或为无穷大，则

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{F'(x)}\ \left(\text{或}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}\right).$$

【注】(1) 一般来说，洛必达法则是用来计算“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型未定式的，不是“$\dfrac{0}{0}$”型和“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，就不能用洛必达法则．

(2) 如果极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 仍属于“$\dfrac{0}{0}$”型或者“$\dfrac{\infty}{\infty}$”型，且 $f'(x)$，$F'(x)$ 继续满足洛必达法则的条件，则可以继续使用洛必达法则，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f''(x)}{F''(x)}$.

(3) 如果 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 不存在也不为 ∞，不能推出 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}$ 不存在也不为 ∞，简单一点说就是：

对于 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$，**“右存在，则左存在；但左存在，并不意味着右一定存在”**. 比如说，极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=0$$

存在，而如果使用洛必达法则，会有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(2x\cdot\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}\right),$$

这个极限显然不存在. 这是一个很细致、很隐蔽的问题，稍不注意就可能出错.

例 1.22 证明：

(1) 当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$；

(2) 当 $x\to 0$ 时，$1-(\cos x)^a\sim\dfrac{1}{2}ax^2$，$a\neq 0$.

证明 (1) 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{1}=1$，于是当 $x\to 0$ 时，$\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\sim x$.

(2) 当 $x\to 0$ 时，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-(\cos x)^a}{\frac{1}{2}ax^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-a(\cos x)^{a-1}(-\sin x)}{ax}=\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{a-1}=1$. 证毕 .

例 1.23 设 $f(x)=\ln^{10}x$，$g(x)=x$，$h(x)=\mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时，有（　　）.

(A) $g(x)<h(x)<f(x)$

(B) $h(x)<g(x)<f(x)$

(C) $f(x)<g(x)<h(x)$

(D) $g(x)<f(x)<h(x)$

解 应选 (C).

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{g(x)}{f(x)}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{h(x)}{g(x)}=+\infty$，所以当 x 充分大时，有 $f(x)<g(x)<h(x)$.

故选项 (C) 正确 .

【注】①当 $x\to+\infty$ 时，有 $\ln^{\alpha}x\ll x^{\beta}\ll a^{x}$，其中 $\alpha,\beta>0,a>1$，符号“≪”叫远远小于；

②当 $n\to\infty$ 时，有 $\ln^{\alpha}n\ll n^{\beta}\ll a^{n}\ll n!\ll n^{n}$，其中 $\alpha,\beta>0,a>1$.

3. 泰勒公式

泰勒

（1685—1731）

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处 n 阶可导，则存在 $x=0$ 的一个邻域，对于该邻域内的任一点 x，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^{2}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^{n}+o(x^{n}) .$$

如 $\sin x=\sin 0+(\sin x)'\big|_{x=0}\cdot x+\frac{(\sin x)''\big|_{x=0}}{2!}x^{2}+\frac{(\sin x)'''\big|_{x=0}}{3!}x^{3}+o(x^{3})$，即 $\sin x=x-\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})$.

再如 $\sec x=\sec 0+(\sec x)'\big|_{x=0}\cdot x+\frac{(\sec x)''\big|_{x=0}}{2!}x^{2}+\frac{(\sec x)'''\big|_{x=0}}{3!}x^{3}+o(x^{3})$，即 $\sec x=1+\frac{x^{2}}{2}+o(x^{3})$.

同理可得如下重要函数的泰勒公式 .

$\sin x=x-\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})$，　　$\cos x=1-\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{4}}{4!}+o(x^{4})$，

$\arcsin x=x+\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})$，　　$\tan x=x+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3})$，　　→背会泰勒公式，“一站直达”

$\arctan x=x-\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3})$，　　$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}+o(x^{3})$，

$\mathrm{e}^{x}=1+x+\frac{x^{2}}{2!}+\frac{x^{3}}{3!}+o(x^{3})$，　　$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+o(x^{2})$.

【注】从数学命题的角度对以上公式进行处理，可得到一组“差函数”的等价无穷小代换式，如 $x-\sin x=\frac{1}{6}x^{3}+o(x^{3})$，则 $x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^{3}(x\to0)$，同理有

$$\arcsin x-x\sim\frac{1}{6}x^{3}(x\to0),\ \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^{3}(x\to0),\ x-\arctan x\sim\frac{x^{3}}{3}(x\to0)$$

等，并可将这些公式广义化，如第一个公式广义化为 $\text{狗}-\sin\text{狗}\sim\frac{1}{6}(\text{狗})^{3}(\text{狗}\to0)$，其余类似 .

4. 无穷小的运算

设 m,n 为正整数，则

①$o(x^{m})\pm o(x^{n})=o(x^{l}),\ l=\min\{m,n\}$（加减法时低阶“吸收”高阶）；

②$o(x^{m})\cdot o(x^{n})=o(x^{m+n}),\ x^{m}\cdot o(x^{n})=o(x^{m+n})$（乘法时阶数“累加”）；

③$o(x^{m})=o(kx^{m})=k\cdot o(x^{m}),\ k\neq0$ 且为常数（非零常数相乘不影响阶数）.

【注】在后面泰勒公式的应用中，会对上述高阶无穷小的运算提出要求，请读者学会正确书写 .

5. 泰勒公式应用时的展开原则

(1) $\frac{A}{B}$ 型，适用“上下同阶”原则 .

具体说来，如果分母（或分子）是x的k次幂，则应把分子（或分母）展开到x的k次幂，可称为“上下同阶”原则 .

例如，计算 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$.

由于
$$\ln(1+x)=x+o(x),\ \ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+o(x^2),$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

……

因此
$$\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x^2}{2}}{x^2}=\frac{1}{2},$$

这里顺便得到了一个重要的等价代换式 $x-\ln(1+x)\sim\frac{1}{2}x^2(x\to0)$.

同理
$$x-\sin x\sim\frac{x^3}{6}(x\to0),$$
$$\arcsin x-x\sim\frac{x^3}{6}(x\to0),$$
$$\tan x-x\sim\frac{x^3}{3}(x\to0),$$
$$x-\arctan x\sim\frac{x^3}{3}(x\to0),$$

均可由“上下同阶”原则得到 .

(2) $A-B$型，适用“幂次最低”原则 .

具体说来，即将A,B分别展开到它们的系数不相等的x的最低次幂为止 .

例如，已知当$x\to0$时，$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$与$ax^b$为等价无穷小，求$a,b$.

用泰勒公式，$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4),\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)$.

显然，将$\cos x,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$展开到$x^4$时，其系数就不一样了，使用“幂次最低”原则，展开到此项后，进行运算，得

$$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}=\left[1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+o(x^4)\right]-\left[1-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2!}\frac{x^4}{4}+o(x^4)\right]=-\frac{1}{12}x^4+o(x^4),$$

于是可知$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\sim-\frac{1}{12}x^4(x\to0)$，故$a=-\frac{1}{12}$，$b=4$．

6. 两个重要极限

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\ .$$

【注】常考变量广义化

$$\lim_{狗\to0}\frac{\sin 狗}{狗}=1,\ \lim_{狗\to\infty}\left(1+\frac{1}{狗}\right)^{狗}=\mathrm{e}\ .$$

如$狗=\frac{1}{x}$，则上述式子为

$$\lim_{\frac{1}{x}\to0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1\text{，即}\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1\text{，}$$

$$\lim_{\frac{1}{x}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\text{，即}\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}\ .$$

7. 夹逼准则

$\longrightarrow$ 适当放缩$\begin{cases}\text{已知不等式}\\\text{题设条件}\end{cases}$

如果函数$f(x)$，$g(x)$及$h(x)$满足下列条件：

(1) $h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$；

(2) $\lim g(x)=A$，$\lim h(x)=A$．

则$\lim f(x)$存在，且$\lim f(x)=A$．

【注】常见的一个问题：设任意的x，总有$h(x)\leqslant f(x)\leqslant g(x)$，且$\lim[g(x)-h(x)]=0$，则$\lim f(x)$是否一定存在？答案是否定的．$\lim[g(x)-h(x)]$存在并不能说明$\lim g(x)$，$\lim h(x)$都存在，从而也不能保证$\lim f(x)$存在．

例如，当$x>0$时，取$h(x)=x+\frac{1}{x+1}$，$f(x)=x+\frac{2}{x+1}$，$g(x)=x+\frac{3}{x+1}$，则$h(x)<f(x)<g(x)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-h(x)]=0$，但$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$不存在．

(二) 七种未定式的计算

"未定"是你来定，有可能存在有可能不存在.

考研的函数极限计算题一般归纳为七种未定式：

$$\text{“}\frac{0}{0}\text{”}\quad \text{“}\frac{\infty}{\infty}\text{”}\quad \text{“}0\cdot\infty\text{”}\quad \text{“}\infty-\infty\text{”}\quad \text{“}\infty^0\text{”}\quad \text{“}0^0\text{”}\quad \text{“}1^\infty\text{”}.$$

题型：直接计算、反求参数、已知某一极限求另一极限、无穷小的比阶等 .

解题思路如下：

①化简先行 .

a. 提出极限不为 0 的因式；b. 等价无穷小代换；c. 恒等变形 (基本的恒等变形法如提公因式、拆项、合并、分子分母同除变量的最高次幂等，高级的恒等变形法如变量代换，也叫换元法等). 需要强调的是，很多问题如果不化简就计算，可能计算会很复杂，甚至可能计算不出结果 .

②判断类型 (运算类型) .

③选择方法 (洛必达法则、泰勒公式、夹逼准则等) .

(1) “$\frac{0}{0}$” “$\frac{\infty}{\infty}$” “$0\cdot\infty$”.

例 1.24 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}=$______.

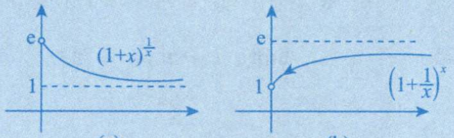
解 应填 $-\dfrac{\mathrm{e}}{2}$.

$$原极限=\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-\mathrm{e}}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}-1}{x}=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}\ln(1+x)-1}{x}$$

$$=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\mathrm{e}\lim_{x\to0^+}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}\mathrm{e}.$$

【注】 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$ 在 $x>0$ 时有以下性质：

①$f(x)$ 单调减少；② $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\mathrm{e}$; ③ $(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\sim-\dfrac{\mathrm{e}}{2}x\,(x\to0^+)$.



(a) (b)

例 1.25 求极限 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$，其中 $a_n(\neq0),\ b_m(\neq0)$ 为常数 .

解 若 $n=m$ ，则 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}}{b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\dfrac{b_0}{x^n}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(a_n+\dfrac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\dfrac{a_1}{x^{n-1}}+\dfrac{a_0}{x^n}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(b_m+\dfrac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\dfrac{b_1}{x^{n-1}}+\dfrac{b_0}{x^n}\right)}=\dfrac{a_n}{b_m}$;

若 $n>m$，则 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^{n-m}\left(a_nx^m+a_{n-1}x^{m-1}+\cdots+a_1x^{m-n+1}+a_0x^{m-n}\right)}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\to\infty}x^{n-m}\cdot\dfrac{a_n}{b_m}=\infty$；

若 $n<m$，则 $I=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{x^{m-n}\left(b_mx^n+b_{m-1}x^{n-1}+\cdots+b_1x^{n-m+1}+b_0x^{n-m}\right)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^{m-n}}\cdot\dfrac{a_n}{b_m}=0$.

综上，$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, & n=m,\\ \infty, & n>m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$

【注】本题的结果要记住，以后直接使用，这就是通常说的“抓大头”，即当 $x\to\infty$ 时，分别抓分子、分母中关于 x 的最高次项，忽略其他项，如 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\boxed{\sqrt{4x^2+x-1}}+\boxed{x+1}}{\boxed{\sqrt{x^2+\sin x}}}=1$. 另外**特别注意**，若 $x\to 0$，则应该分别抓分子、分母中关于 x 的最低次项 . $|2x|=-2x$　x　$|x|=-x$

例 1.26　设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)=$______.

解　应填 $\begin{cases}x^2, & x=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\ x(1-x), & x\text{取其他值}.\end{cases}$

当 $\sin\pi x=0$，即 $x=k$（整数）时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\cdot 0}{1+n\cdot 0}=x^2$；

当 $\sin\pi x\neq 0$，即 $x\neq k$（整数）时，$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2}{n}+x(1-x)\sin^2\pi x}{\dfrac{1}{n}+\sin^2\pi x}=\dfrac{x(1-x)\sin^2\pi x}{\sin^2\pi x}=x(1-x)$.

综上，$f(x)=\begin{cases}x^2, & x=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\ x(1-x), & x\text{取其他值}.\end{cases}$

例 1.27　已知极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2+f(x)}{x^2}=$（　　）.

(A) $\dfrac{13}{9}$　　(B)4　　(C) $\dfrac{10}{3}$　　(D) $-\dfrac{8}{3}$

解　应选 (D).

方法一　脱帽法 .

$$\lim_{x\to0}\frac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0,$$

则 $\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{x^3}=\alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 为 $x\to0$ 时的无穷小 . 因此

$$f(x)=\frac{x^3\cdot\alpha(x)-\tan 2x}{x},$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2+\dfrac{x^3\cdot\alpha(x)-\tan 2x}{x}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-\tan 2x+x^3\alpha(x)}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2x-\left[2x+\dfrac{1}{3}(2x)^3+o(x^3)\right]+x^3\alpha(x)}{x^3}$$

$$=-\frac{8}{3}.$$

方法二 泰勒展开．由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan 2x+xf(x)}{\sin x^3}=0$，得

$$\lim_{x\to0}\frac{2x+\dfrac{1}{3}(2x)^3+o(x^3)+xf(x)}{x^3}=0,$$

故
$$\lim_{x\to0}\frac{2+f(x)}{x^2}=-\frac{8}{3}.$$

例 1.28 求极限 $\lim\limits_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)$．

解 这是"$0\cdot\infty$"型未定式，注意一个事实：当 $x\to0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，将其广义化，得

$$\ln(1+u)\sim u(u\to0),$$

于是在考研中常考的一个式子是 $\ln x=\ln(1+x-1)\sim x-1(x\to1)$，则

$$\lim_{x\to1^-}\ln x\ln(1-x)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x-1)\ln(1-x)$$

$$=\lim_{x\to1^-}(x-1)\ln(1-x)$$

$$\xlongequal{令1-x=t}-\lim_{t\to0^+}t\ln t=0\ .$$

【注】事实上，当 $\alpha>0$ 时，$\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha=0$，本题中 $\alpha=1$．

例 1.29 求 $I=\lim\limits_{x\to0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]$，其中 $[\bullet]$ 为取整符号．

解 当 $x\to0$ 时，$\dfrac{10}{x}\to\infty$，对于 $[\infty]$，此时想到极限计算的利器——夹逼准则（当常规求极限的方法——比如等价无穷小代换、泰勒公式、洛必达法则——无法使用时，一定要能够想得起这个"两边夹击"的重要方法）．

根据 $x-1<[x]\leqslant x$，有

$$\frac{10}{x}-1<\left[\frac{10}{x}\right]\leqslant\frac{10}{x},$$

于是

$$\begin{cases} x>0\text{时，有}10-x<x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]\leqslant 10, \\ x<0\text{时，有}10-x>x\cdot\left[\dfrac{10}{x}\right]\geqslant 10. \end{cases}$$

可见，无论$x>0$，还是$x<0$，不等式两边均可趋于同一极限，故$I=\lim\limits_{x\to 0}x\left[\dfrac{10}{x}\right]=10$.

(2)“ $\infty-\infty$”.

【**注**】对于“ $\infty-\infty$”型未定式，一般有两种思路 .

(1) 如果函数中有分母，则通分，将加减法变形为乘除法，以便于使用其他计算工具 (比如洛必达法则)，见例 1.30.

(2) 如果函数中没有分母，则可以通过提取公因式或者作倒代换，出现分母后，再利用通分等恒等变形的方法，将加减法变形为乘除法，见例 1.31.

例 1.30　极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}\right]=$ (　　) .

(A)2　　(B) $\dfrac{3}{2}$　　(C)1　　(D) $\dfrac{1}{2}$

解　应选 (D).

所给极限为“ $\infty-\infty$”型，先变形，化为“$\dfrac{0}{0}$”型 .

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x}}{2x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x)}=\frac{1}{2}.$$

故选 (D).

例 1.31　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x^2\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1\right)-x\right]$.

解

$$\text{原式}\xlongequal{\text{令}u=\frac{1}{x}}\lim_{u\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^u-1-u}{u^2}=\lim_{u\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^u-1}{2u}=\frac{1}{2}.$$

(3) “∞^0” 和 “0^0” .

例 1.32 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$.

解 这是“∞^0”型未定式，是幂指函数的极限，对于“∞^0”和“0^0”型这两种未定式，一般来说，我们都用恒等变形

$$\lim u^v = \mathrm{e}^{\lim v\ln u} \xlongequal{记} \exp\{\lim v\ln u\},$$

将其化成“$\frac{0}{0}$”“$\frac{\infty}{\infty}$”“$0\cdot\infty$”这三种类型，然后计算，故原式 $=\exp\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right\}$.

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$，所以

$$\lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}^0=1 .$$

(4) “1^∞” .

例 1.33 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{3}\right)^{\frac{\mathrm{e}}{x}}$.

解 这是“1^∞”型未定式，是幂指函数的极限，如果 $\lim u^v$ 属于“1^∞”型，则有一个重要且简单的计算方法：$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim(u-1)v}$.

推导如下：利用第二重要极限公式 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$，得

$$\lim u^v=\lim\left\{\left[1+(u-1)\right]^{\frac{1}{u-1}}\right\}^{(u-1)v}=\mathrm{e}^{\lim(u-1)v},$$

故 $$原式=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}}{x}\left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^{3x}}{3}-1\right)\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}}{3}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\frac{\mathrm{e}}{3}\left(\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{\mathrm{e}^{3x}-1}{x}\right)\right\}=\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{e}}{3}(1+2+3)}=\mathrm{e}^{2\mathrm{e}} .$$

(5) 泰勒公式 .

例 1.34 设当 $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小，则（ ）.

(A) $a=\frac{1}{2}$, $b=1$

(B) $a=1$, $b=1$

(C) $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1$

(D) $a=-1$, $b=1$

解　应选 (A).

方法一　由泰勒公式可知
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + o(x^2).$$

由题设可知
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} = 0,$$

即
$$\lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{1}{2} - a\right)x^2 + (1-b)x + o(x^2)}{x^2} = 0,$$

则 $a = \frac{1}{2}$, $b = 1$.

方法二　由洛必达法则可知
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - (ax^2 + bx + 1)}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x},$$

若 $b \neq 1$，上式右端趋于无穷，从而左端也趋于无穷，与原题设矛盾，所以 $b = 1$．因此
$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 2ax - b}{2x} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{2x} - a = \frac{1}{2} - a = 0,$$

故 $a = \frac{1}{2}$，所以应选 (A).

例 1.35　设函数 $f($ [redacted] $^2 + cx^3$，则（　　）.

(A) $a = 1,\ b = 0,\ c = -$　　$\frac{7}{6}$

(C) $a = -1,\ b = -1,\ c = -\frac{7}{6}$　　(D) $a = -1,\ b = -1,\ c = \frac{7}{6}$

解　应选 (A).

方法一　由于在 $x = 0$ 处有泰勒展开式
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots,\quad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots,$$

因此
$$\frac{\sin x}{1+x^2} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)(1 - x^2 + x^4 - \cdots) = x - \frac{7}{6}x^3 + \cdots.$$

构成 x^3 项

又由题设知，在 $x = 0$ 处有
$$\frac{\sin x}{1+x^2} = ax + bx^2 + cx^3 + \cdots,$$

所以
$$a = 1,\ b = 0,\ c = -\frac{7}{6}.$$

故选 (A).

方法二 由题设可得在 $x=0$ 处

$$\sin x=(1+x^2)(ax+bx^2+cx^3+\cdots),$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x^2)(a+bx+cx^2+\cdots)=a,$$

故 $a=1$.

又因为 $\sin x$ 为奇函数，所以 $b=0$ ，从而可得

$$\sin x=(1+x^2)(x+cx^3+\cdots),$$

故
$$c=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-(1+x^2)x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}-1=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}-1=-\frac{7}{6}.$$

故选 (A).

五、函数的连续与间断

讨论间断点只看 $\begin{cases}\text{无定义点（必间断）}\\ \text{分段点（未必间断）}\end{cases}$

1. 连续点的定义

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义，且有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ ，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续 .

【注】(1) 当需要讨论左、右极限时，用以下结论：

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)\Leftrightarrow f(x)\text{在点}x_0\text{处连续}.$$

(2) 连续性运算法则 .

①(连续性的四则运算法则)设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都在点 $x=x_0$ 处连续，则 $f(x)\pm g(x)$ 与 $f(x)g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，当 $g(x_0)\neq 0$ 时，$f(x)/g(x)$ 在点 $x=x_0$ 处也连续 .

②(复合函数的连续性)设 $u=\varphi(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，$y=f(u)$ 在点 $u=u_0$ 处连续，且 $u_0=\varphi(x_0)$，则 $f[\varphi(x)]$ 在点 $x=x_0$ 处连续 .

③(反函数的连续性)设 $y=f(x)$ 在区间 I_x 上单调且连续，则反函数 $x=\varphi(y)$ 在对应的区间 $I_y=\{y\mid y=f(x),x\in I_x\}$ 上连续且有相同的单调性 .

(3) 设 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 处连续，且 $f(x_0)>0$ (或 $f(x_0)<0$)，则存在 $\delta>0$，使得当 $|x-x_0|<\delta$ 时 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$).

2. 间断点的定义与分类

以下设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义 . 这是讨论间断点的前提

(1) 可去间断点 .

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\neq f(x_0)$ ($f(x_0)$ 甚至可以无定义)，则 $x=x_0$ 称为**可去间断点** .

【注】只要修改或者补充$f(x_0)$，使得$f(x_0)=A=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$，就会使得函数在点$x_0$处连续，于是，这个点叫作可去间断点，也叫作**可补间断点**.

(2) 跳跃间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$都存在，但$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，则$x=x_0$称为**跳跃间断点**.

可去间断点和跳跃间断点统称为**第一类间断点**.

【注】按此定义，跳跃间断点和$f(x_0)$的值无关.

(3) 无穷间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，则$x=x_0$称为**无穷间断点**，如点$x=0$为函数$y=\dfrac{1}{x}$的无穷间断点.

(4) 振荡间断点.

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$振荡不存在，则$x=x_0$称为**振荡间断点**，如函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$在点$x=0$处没有定义，且当$x\to 0$时，函数值在$-1$与1这两个数之间交替振荡取值，极限不存在，故点$x=0$为函数$y=\sin\dfrac{1}{x}$的振荡间断点.

无穷间断点和振荡间断点都属于**第二类间断点**.

例 1.36　已知$f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{x^{-2}}, & x\neq 0,\\ a, & x=0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$______.

解　应填$\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}(\cos x)^{x^{-2}}\overset{\text{“}1^\infty\text{”}}{=\!=\!=}\mathrm{e}^A，式中A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=-\frac{1}{2}，故\lim_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}.$$

又$f(x)$在$x=0$处连续，所以$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

例 1.37　函数$f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(\mathrm{e}^x-1)(x-2)}$的第二类间断点的个数为（　　）.

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解　应选 (C).

本题考查初等函数的连续性、间断点、间断点分类等基本概念，考查利用等价无穷小替换及洛必达法则求极限的方法，是一道考查基本概念和简单运算的题目.

$f(x)$的定义域为$\{x|x\in(-\infty,+\infty), x\neq-1, x\neq 0, x\neq 1, x\neq 2\}$，而初等函数在定义域内是连续的，所以该函数的所有间断点是-1，0，1，2. 由于

$$\lim_{x\to-1} f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty,$$

$$\lim_{x\to2} f(x)=\lim_{x\to2}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=\infty,$$

由例 1.15 知，

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\infty,$$

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{e^{\frac{1}{x-1}}\ln|1+x|}{(e^x-1)(x-2)}=-\frac{1}{2e}\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{e^x-1}=-\frac{1}{2e},$$

因此 $x=0$ 是函数的可去间断点，而其余 3 个点均为函数的第二类间断点，故选 (C).

例 1.38 设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+nx(1-x)\sin^2\pi x}{1+n\sin^2\pi x}$，则 $f(x)$ (　　).

(A) 处处连续　　(B) 只有第一类间断点

(C) 只有第二类间断点　　(D) 既有第一类间断点，又有第二类间断点

解　应选 (B).

由例 1.26 可知，
$$f(x)=\begin{cases}x^2, & x=0,\pm1,\pm2,\cdots,\\ x(1-x), & x\text{取其他值}.\end{cases}$$

可见 $f(x)$ 有第一类间断点，没有第二类间断点，故选 (B).

基础习题精练

习题

1.1　设 $f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，下列结论正确的是 (　　).

(A) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

(B) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(C) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

(D) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

1.2　设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内有定义，且$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，$g(x)=\begin{cases}f\left(\dfrac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$则（　　）.

(A) $x=0$必是$g(x)$的第一类间断点

(B) $x=0$必是$g(x)$的第二类间断点

(C) $x=0$必是$g(x)$的连续点

(D) $g(x)$在点$x=0$处的连续性与a的取值有关

1.3　设函数$f(x)=\dfrac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$，则（　　）.

(A) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第一类间断点

(B) $x=0$，$x=1$都是$f(x)$的第二类间断点

(C) $x=0$是$f(x)$的第一类间断点，$x=1$是$f(x)$的第二类间断点

(D) $x=0$是$f(x)$的第二类间断点，$x=1$是$f(x)$的第一类间断点

1.4　函数$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}\left(1+\dfrac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}$在$(-\infty,+\infty)$内（　　）.

(A) 连续　　(B) 有可去间断点　　(C) 有跳跃间断点　　(D) 有无穷间断点

1.5　设函数$f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，关于该函数的间断点，下列结论正确的是（　　）.

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点$x=1$　　(C) 存在间断点$x=0$　　(D) 存在间断点$x=-1$

1.6　设$f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$，$f_1(x)=f[f(x)]$，$f_2(x)=f[f_1(x)]$，$f_{n+1}(x)=f[f_n(x)](n=1,2,3,\cdots)$，则$f_n(x)=$ ______.

1.7　极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$______.

1.8　极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^x=$______.

1.9　已知$a>0$，$b>0$，则$\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)=$______.

1.10　设函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-e^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}, & x>0,\\ ae^{2x}, & x\leqslant 0\end{cases}$在$x=0$处连续，则$a=$______.

1.11　设函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内连续，且对任意的x，$y\in(-\infty,+\infty)$，有

$$f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-f(y),$$

证明：$f(x)$是奇函数 .

1.12 设$f(x)=\arcsin(\sin x)$，画$f(x)$的图形 .

1.13 求下列极限 .

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}(n>0)$；

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{\lambda x}}$（$n$为正整数，$\lambda>0$）.

1.14 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\dfrac{1}{x}\right)$.

1.15 求极限$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}$，其中$a_i>0,\ i=1,2,\cdots,n$.

1.16 已知$I=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\ln\left(1+e^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}+a[x]\right)$存在，$[\cdot]$为取整函数，求$I$，$a$.

1.17 设$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$，求常数$a$，$b$.

解答

1.1 (C) **解** 由$f(x)+g(x)=2u(x)$，得$g(x)=2u(x)-f(x)$. 由“四、（一）1.”的注可知，若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，$\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$不存在，则$\lim\limits_{x\to x_0}[2u(x)-f(x)]$必不存在，即$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$必不存在，故选 (C).

取$u(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$，$v(x)=\dfrac{2}{x-x_0}$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$也不存在；取$u(x)=v(x)=\dfrac{1}{x-x_0}$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$不存在，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$存在 . 故排除 (A)，(B).

1.2 (D) **解** 因为$\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{x\to0}f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，而$g(0)=0$，所以当$a=0$时，函数$g(x)$在点$x=0$处连续；当$a\neq0$时，函数$g(x)$在点$x=0$处不连续，故选 (D).

1.3 (D) **解** $f(x)$非分段函数，只需讨论函数的无定义点$x=0,1$. 因为

$$\lim_{x\to0}f(x)=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=\infty,$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=0,\ \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}=-1\ ,$$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点， $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点 .

1.4　(B)　**解**　这是“1^∞”型未定式，于是

$$f(x)=\lim_{t\to0}\left(1+\frac{\sin t}{x}\right)^{\frac{x^2}{t}}=e^{\lim\limits_{t\to0}\frac{x^2}{t}\cdot\left(1+\frac{\sin t}{x}-1\right)}=e^{\lim\limits_{t\to0}x\cdot\frac{\sin t}{t}}=e^x\ ,\quad x\neq0\ .$$

又 $x=0$ 处无定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}e^x=1$ ，故 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，选 (B).

1.5　(B)　**分析**　函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}$ 是以 x 为自变量的函数，但是当 $n\to\infty$ 求极限时， x 则被看成一个常数 (参数)，根据 x 的不同取值求出极限，求完极限后 x 又恢复变量的本来身份 .

因为分式中有 x^{2n}，所以应先把 $x=-1$ 和 $x=1$ 作为分段点将函数写成分段函数，然后讨论函数的间断点 .

解　当 $|x|<1$ 时， $\lim\limits_{n\to\infty}x^{2n}=0$ ，所以 $f(x)=1+x$ ；当 $|x|>1$ 时， $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=0$.

又 $f(1)=1$，$f(-1)=0$ ，所以

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1+x}{1+x^{2n}}=\begin{cases}0, & x\leqslant-1,\\ 1+x, & -1<x<1,\\ 1, & x=1,\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

由此可知 $x=1$ 为间断点，故选 (B).

1.6　$\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　**解**　$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,

$$f_1(x)=f\left[f(x)\right]=\frac{f(x)}{\sqrt{1+f^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+2x^2}}\ ,$$

$$f_2(x)=f\left[f_1(x)\right]=\frac{f_1(x)}{\sqrt{1+f_1^2(x)}}=\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}}\ ,$$

一般地，可用数学归纳法证明，得

$$f_n(x)=\frac{x}{\sqrt{1+(n+1)x^2}}(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\ .$$

1.7　-1　**解**　$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{-e^{\frac{1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}}}=-1$.

1.8　e^3　**解**　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}\right)^x=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{e^2}{e^{-1}}=e^3$.

【注】$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{bx+d}=\mathrm{e}^{ab}$ 是常用的公式．

相仿，
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\dfrac{a}{x}}{1-\dfrac{a}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{a}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{a}{x}\right)^{x}}=\mathrm{e}^{2a}\ .$$

上述两种表达式变形是求极限运算的常见技巧，为固定模式的求解方法，应熟记．

1.9 $\ln\dfrac{a}{b}$ **解** 利用变量代换．令 $\dfrac{1}{x}=t$，则

$$\lim_{x\to+\infty}x\left(a^{\frac{1}{x}}-b^{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{t\to0^+}\frac{a^t-b^t}{t}=\lim_{t\to0^+}(a^t\ln a-b^t\ln b)=\ln\frac{a}{b}\,(a>0,\ b>0)\ .$$

1.10 -2 **解** 因为 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=f(0)$．又

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{1-\mathrm{e}^{\tan x}}{\arcsin\dfrac{x}{2}}=\lim_{x\to0^+}\frac{-\tan x}{\dfrac{x}{2}}=-2,$$
$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}a\mathrm{e}^{2x}=a,$$

所以 $a=-2$．

1.11 **证明** 在等式 $f(x+y)+2f(x-y)=3f(x)-f(y)$ 中令 $y=0$，得 $f(0)=0$．令 $x=0$，并将 $f(0)=0$ 代入，得 $f(-y)=-f(y)$，令 $y=x$，得 $f(-x)=-f(x)$，故 $f(x)$ 为奇函数．

1.12 **解** $f(x+2\pi)=\arcsin[\sin(x+2\pi)]=\arcsin(\sin x)=f(x)$，故 $f(x)$ 以 2π 为周期．

当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，有 $\arcsin(\sin x)=x$；

当 $x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，有 $\pi-x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$，则

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin[\sin(\pi-x)]=\pi-x\ ;$$

当 $x\in\left[\pi,\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 时，有 $x-\pi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

$$\arcsin(\sin x)=\arcsin[-\sin(x-\pi)]=\pi-x\ .$$

故在 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right)$ 上，$f(x)=\begin{cases}x, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right),\\ \pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3}{2}\pi\right),\end{cases}$ 于是在 $(-\infty,+\infty)$ 上，

$$f(x)=\arcsin(\sin x)=\begin{cases} x-2k\pi, & x\in\left[-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right), \\ (2k+1)\pi-x, & x\in\left[\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{3}{2}\pi+2k\pi\right), \end{cases} k\text{为整数}.$$

其图形如图 1-19 所示 .

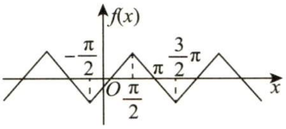


图 1-19

1.13 解 (1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{nx^{n-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{nx^n}=0$.

(2) 依次应用洛必达法则 n 次，得

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{\lambda e^{\lambda x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{n(n-1)x^{n-2}}{\lambda^2e^{\lambda x}}=\cdots=\lim_{x\to+\infty}\frac{n!}{\lambda^n e^{\lambda x}}=0 .$$

事实上，如果本题中的 n 不是正整数而是任何正数，那么极限仍为零 .

1.14 解 利用等价无穷小量代换，$e^x-1\sim x\ (x\to0)$，则

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{xe^x(1+x)+1-e^x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3xe^x+x^2e^x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{3e^x+xe^x}{2}=\frac{3}{2} .$$

【注】下面的做法是错误的：

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x+xe^x}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{e^x+xe^x-1}{x}=\lim_{x\to0}(2e^x+xe^x)=2 .$$

1.15 解 因为 $\lim\limits_{x\to0}a_i^x=1$，所以原极限为“$1^\infty$”型未定式 .

方法一 使用洛必达法则求极限 .

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{n}{x}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}-1\right)\right\}$$

$$=\exp\left\{\lim_{x\to0}\frac{a_1^x-1}{x}+\lim_{x\to0}\frac{a_2^x-1}{x}+\cdots+\lim_{x\to0}\frac{a_n^x-1}{x}\right\}$$

$$=\exp\{\lim_{x\to0}a_1^x\ln a_1+a_2^x\ln a_2+\cdots+a_n^x\ln a_n\}=a_1a_2\cdots a_n .$$

方法二 凑成第二个重要极限（“1^∞”型未定式都可以凑成第二个重要极限），在计算过程中使用洛必达法则．

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}\cdot\frac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}},$$

其中 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{x}=\ln(a_1a_2\cdots a_n)$，$\lim\limits_{x\to0}\left(1+\dfrac{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}{n}\right)^{\frac{n}{a_1^x+a_2^x+\cdots+a_n^x-n}}=\mathrm{e}$，

所以原式$=a_1a_2\cdots a_n$．

1.16 解 $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\frac{2\mathrm{e}^{2u}}{1+\mathrm{e}^{2u}}}{\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}a[x]=-a$，

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{2}{x}}\right)}{\ln\left(1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right)}\overset{u=\frac{1}{x}}{=\!=\!=}\lim_{u\to+\infty}\frac{\frac{2\mathrm{e}^{2u}}{1+\mathrm{e}^{2u}}}{\frac{\mathrm{e}^u}{1+\mathrm{e}^u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{2u})}{1+\mathrm{e}^{2u}}=\lim_{u\to+\infty}\frac{2(\mathrm{e}^{-u}+1)}{\mathrm{e}^{-2u}+1}=2，\lim_{x\to0^+}a[x]=0，$$

所以当且仅当 $a=-2$ 时，原极限存在，此时 $I=2$．

1.17 解 原极限$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)-ax-bx^2}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}=2$，从而

$$1-a=0，-\left(\frac{1}{2}+b\right)=2，$$

解得 $a=1, b=-\dfrac{5}{2}$．

【注】本题还有一个值得借鉴的解法．

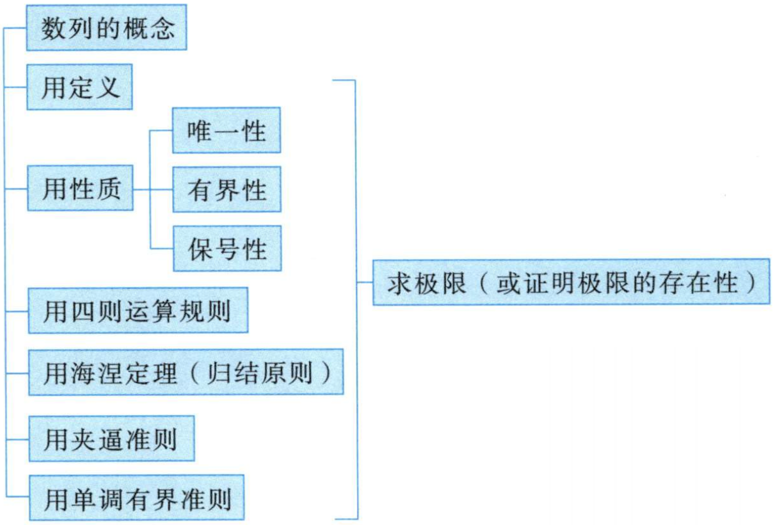
根据泰勒公式容易得：$x-\ln(1+x)\sim\dfrac{1}{2}x^2(x\to0)$（请读者记住此式），故想办法把分子凑出这种形式．

$$\begin{aligned}2&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=-\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)-x+(ax+bx^2)}{x^2}\\&=-\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x}{x^2}-\lim_{x\to0}\frac{bx^2}{x^2}=-\frac{1}{2}-b-\lim_{x\to0}\frac{(a-1)x}{x^2},\end{aligned}$$

故 $a-1=0$，得 $a=1$．因而 $-\dfrac{1}{2}-b=2$，得 $b=-\dfrac{5}{2}$．

第2讲 数列极限

基础知识结构



基础内容精讲

1. 数列的概念

对每个 $n \in \mathbf{N}_+$，如果按照某一法则，对应着一个确定的实数 x_n，这些实数 x_n 按照下标 n 从小到大排列得到的一个序列

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$$

就叫作数列，简记为数列 $\{x_n\}$.

数列中的每一个数叫作数列的项，第 n 项 x_n 叫作数列的一般项（或通项）.

在几何上，数列 $\{x_n\}$ 可看作数轴上的一个动点，它依次取数轴上的点 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$（见图 2-1).

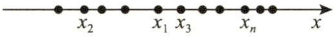


图 2-1

数列$\{x_n\}$可看作自变量为正整数n的函数

$$x_n = f(n),\ n \in \mathbf{N}_+ .$$

当自变量n依次取1, 2, 3, …一切正整数时，对应的函数值就排列成数列$\{x_n\}$.

【注】(1) 子列 .

从数列$\{a_n\}$: $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$中选取无穷多项，并按原来的先后顺序组成新的数列，称新数列为原数列的**子列**，记为

$$\{a_{n_k}\}:\ a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots,$$

其中下标$n_1, n_2, \cdots, n_k, \cdots$为正整数 .

例如，若$n_k(k=1, 2, \cdots)$分别取$2k$和$2k-1$，则得到数列$\{a_n\}$的两个子列

$$\{a_{2k}\}:\ a_2, a_4, \cdots, a_{2k}, \cdots;\ \{a_{2k-1}\}:\ a_1, a_3, \cdots, a_{2k-1}, \cdots,$$

这两个子列的项在原数列中交错出现 .

(2) 等差数列 .

首项为a_1，公差为$d(d \neq 0)$的数列$a_1, a_1+d, a_1+2d, \cdots, a_1+(n-1)d, \cdots$.

①通项公式$a_n = a_1+(n-1)d$.

②前n项的和$S_n = \dfrac{n}{2}\left[2a_1+(n-1)d\right] = \dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$.

(3) 等比数列 .

首项为a_1，公比为$r(r \neq 0)$的数列$a_1, a_1r, a_1r^2, \cdots, a_1r^{n-1}, \cdots$.

①通项公式$a_n = a_1r^{n-1}$.

②前n项的和$S_n = \begin{cases} na_1, & r=1, \\ \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}, & r \neq 1. \end{cases}$

③常用$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1} = \dfrac{1-r^n}{1-r}(r \neq 1)$.

(4) 单调数列 .

若对所有正整数n，有$a_{n+1} \geqslant a_n(a_{n+1} \leqslant a_n)$，则称数列$\{a_n\}$为单调不减（不增）数列 . 将$\geqslant(\leqslant)$换成$>(<)$，则称为单调递增（递减）数列 . 单调递增数列与单调递减数列统称为单调数列 .

(5) 有界数列 .

若对所有正整数n，存在正实数M，有$|a_n| \leqslant M$，则称数列$\{a_n\}$为有界数列 .

(6) 一些常见数列前n项的和 .

① $\sum\limits_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

② $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

③ $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{n}{n+1}$.

怎么算出来的？裂项相消

$=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$=1-\frac{1}{n+1}$

(7) 一个重要数列 $\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ 的结论：

①单调递增 .

② $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$.

当 n 无限增大时（即 $n\to\infty$ 时），对应的 $x_n = f(n)$ 是否能无限接近于某个确定的数值，这就是我们接下来要研究的数列极限 .

例 2.1 设 $0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1,\ 2,\ \cdots)$，证明数列 $\{x_n\}$ 有界 .

证明 因为 $0<x_1<3$，所以 x_1，$3-x_1$ 均为正数，从而

$$0<x_2=\sqrt{x_1(3-x_1)}\leqslant\frac{x_1+3-x_1}{2}=\frac{3}{2}\ .$$

$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}(a,\ b\geqslant0)$

设 $0<x_k\leqslant\dfrac{3}{2}(k>1)$，则 $0<x_{k+1}=\sqrt{x_k(3-x_k)}\leqslant\dfrac{1}{2}(x_k+3-x_k)=\dfrac{3}{2}$，由数学归纳法知，对任意正整数 $n>1$，都有 $0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$，即数列 $\{x_n\}$ 有界 .

2. 数列极限的定义

设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对于任意的 $\varepsilon>0$（不论它多么小），总存在正整数 N，使得当 $n>N$ 时，$|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，或者称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a\left(n\to\infty\right).$$

指 $n\to+\infty$，且是"离散"着趋于正无穷的

如果不存在这样的常数 a，就说数列 $\{x_n\}$ 是发散的 .

【注】(1) 常用的语言：① $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-a|<\varepsilon$，且当 $a=0$ 时，称 x_n 为 $n\to\infty$ 时的无穷小量 .

不等关系

② $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall x>0, \exists N\in\mathbf{N}_+$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n|>x$．此时称 x_n 为 $n\to\infty$ 时的无穷大量．

(2) 数列收敛与其子列收敛的关系．

定理 1 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则其任何子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$．

推论：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = a$，且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = a$．

$\to A\Rightarrow B\cap C$，则 $\overline{B}\cup\overline{C}\Rightarrow\overline{A}$

此定理为我们提供了一个判断数列发散的方法：对于一个数列 $\{a_n\}$，如果能找到一个发散的子列，则原数列一定发散；如果能找到至少两个收敛的子列 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{n'_k}\}$，但它们收敛到不同极限，则原数列也一定发散．

如 $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$，详见例 2.3.

再例如，对于数列 $\{(-1)^n\}$：$-1, 1, -1, 1, \cdots, (-1)^n, \cdots$，我们找到其收敛的子列

$$\left\{(-1)^{2k}\right\}: 1, 1, \cdots, 1, \cdots;\ \left\{(-1)^{2k-1}\right\}: -1, -1, \cdots, -1, \cdots,$$

它们的极限分别为 1 和 −1，所以原数列发散．

例 2.2 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$．

证明 因 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，所以对任意正数 ε，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$|a_n - A| < \varepsilon.$$

又由不等式 $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$，有

$$\big||a_n|-|A|\big| \leqslant |a_n - A| < \varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |A|$．

【注】 (1) 此命题反过来不对，如取 $a_n = (-1)^n$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|(-1)^n\right| = 1$．但 $\lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$ 不存在．

(2) 在本题中若 $A=0$，则 $\big||a_n|-|A|\big| = \big||a_n|-0\big| = |a_n - 0|$，即有

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0,$$

这结论常用，即若要证 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$，可转化为证 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = 0$，由于 $|a_n| \geqslant 0$，若使用夹逼准则，便省了一半的力气，只需证 $|a_n| \leqslant 0$ 即可．

(3) 此结论对函数亦成立，即若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |A|$．

例 2.3 证明数列 $\left\{n^{(-1)^n}\right\}$ 极限不存在．

证明　从数列

$$\left\{n^{(-1)^n}\right\}: \frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6, \cdots, \frac{1}{2n-1}, 2n, \cdots$$

中选取一个子列$\{2n\}$：$2, 4, \cdots, 2n, \cdots$，该数列不是有界数列，由下文定理3的逆否命题知该子列发散，因此，由“收敛数列的任何子列也收敛”的逆否命题知，原数列极限不存在．

【注】该数列存在收敛的子列$\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$：$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \cdots, \frac{1}{2n-1}, \cdots$，但原数列发散．这说明一个数列的某个子列收敛并不能保证原数列收敛．

例 2.4　设$x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & n\text{为正奇数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{为正偶数},\end{cases}$　则当$n\to\infty$时，变量x_n为（　　）．

(A) 无穷大量　　(B) 无穷小量

(C) 有界变量但不是无穷小量　　(D) 无界变量但不是无穷大量

解　应选 (D).

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}=0,$$

$$\lim_{n\to\infty} x_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)^2+\sqrt{2n-1}}{2n-1}=+\infty,$$

可知$\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n}\neq\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1}$，因此$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$不存在，且当$n\to\infty$时，$\{x_n\}$既不是无穷大量，也不是无穷小量，它是无界变量，故选 (D).

3. 收敛数列的性质

定理 2(唯一性)　给出数列$\{x_n\}$，若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$（存在），则$a$是唯一的．

定理 3(有界性)　若数列$\{x_n\}$极限存在，则数列$\{x_n\}$有界．

定理 4(保号性)　设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a\underset{(<)}{>}b$，则存在$N>0$，当$n>N$时，有$x_n\underset{(<)}{>}b$．若数列$\{x_n\}$从某项起有$x_n\underset{(\leqslant)}{\geqslant}b$，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$，则$a\underset{(\leqslant)}{\geqslant}b$，其中$b$为任意实数．常考$b=0$的情形．

例 2.5　已知$a_n=1-\dfrac{(-1)^n}{n}(n=1, 2, \cdots)$，则$\{a_n\}$（　　）．

(A) 有最大值，有最小值　　(B) 有最大值，没有最小值

(C) 没有最大值，有最小值　　(D) 没有最大值，没有最小值

解　应选 (A).

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$, $a_1=2>1$, $a_2=1-\dfrac{1}{2}<1$．由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_1)<0$，则存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，$a_n<a_1$．又

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_2)>0$，则存在$N_2>0$，当$n>N_2$时，$a_n>a_2$．取$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>N$时，$a_n$不可能是最大、最小值，而前有限项必存在最大、最小值．

【注】(1) 最值是比较出来的．

(2) 此题用保号性说明了$n>N$后的项没有资格参与比较，故前有限项必有最大、最小值．

4. 极限四则运算规则

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=a\pm b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=ab$；

(3) 若$b\neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\dfrac{a}{b}$．

四则运算规则可以推广至有限个数列情形．

例 2.6 设$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=3$，则（　　）．

(A) $\{a_n\}$ 极限存在，$\{b_n\}$ 极限不存在

(B) $\{a_n\}$ 极限存在，$\{b_n\}$ 极限存在

(C) $\{a_n\}$ 极限不存在，$\{b_n\}$ 极限不存在

(D) $\{a_n\}$ 极限不存在，$\{b_n\}$ 极限存在

解　应选 (B).

令$u_n=a_n+b_n$, $v_n=a_n-b_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}v_n=3$．由极限四则运算规则 (1) 知，$\{u_n+v_n\}$和$\{u_n-v_n\}$均存在极限，且有

$$\lim_{n\to\infty}(u_n+v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n+\lim_{n\to\infty}v_n=1+3=4,$$

$$\lim_{n\to\infty}(u_n-v_n)=\lim_{n\to\infty}u_n-\lim_{n\to\infty}v_n=1-3=-2\ .$$

又$a_n=\dfrac{1}{2}(u_n+v_n)$, $b_n=\dfrac{1}{2}(u_n-v_n)$，所以$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的极限均存在，且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}\times 4=2,\ \lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}\times(-2)=-1\ .$$

5. 海涅定理（归结原则）

设$f(x)$在$\mathring{U}(x_0,\delta)$内有定义，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$存在$\Leftrightarrow$对任何$\mathring{U}(x_0,\delta)$内以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}(x_n\neq x_0)$，极限$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$存在．

【注】众所周知，虽然数列极限与函数极限是分别独立定义的，但是海涅定理是联系数列极限与函数极限的桥梁．它指出：在极限存在的条件下，函数极限和数列极限可以相互转化．有些读者可能没有听说过这个定理，但是在不知不觉中我们已经使用它了．

常考①当 $x \to 0$ 时，取 $x_n = \frac{1}{n}$，即若 $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = A$．

②当 $x \to +\infty$ 时，取 $x_n = n$，即若 $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = A$．

③当 $x_n \to a$，且 $x_n \neq a$ 时，若 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$，则 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$．

例 2.7 当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）．

(A) 无穷大量　　(B) 无界量，但不是无穷大量

(C) 有界量，但不是无穷小量　　(D) 无穷小量

解 应选 (B).

设 $f(x) = \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$，若取 $x_n = \frac{1}{n\pi} \to 0,\ n \to \infty$，则有 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = 0$；若取 $x_n' = \frac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi} \to 0,\ n \to \infty$，则有 $f(x_n') = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi \to +\infty,\ n \to \infty$，根据归结原则，极限 $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 不存在，且当 $x \to 0$ 时，$\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$ 是无界量，但不是无穷大量．

例 2.8 求 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}}$．

解 $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}} = \lim\limits_{n \to \infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n \to \infty} n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}$．

因

$$\begin{aligned}\lim_{x \to +\infty} x\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}}\right) &= \lim_{x \to +\infty} x\ln\left(1 + \cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x\left(\cos\frac{1}{\sqrt{x}} - 1\right) \\ &= \lim_{x \to +\infty} x \cdot \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2\right] = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故由归结原则知，$\lim\limits_{n \to \infty} n\ln\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = -\frac{1}{2}$，即原式 $= \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$．

6. 夹逼准则

如果数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 及 $\{z_n\}$ 满足下列条件：

不需要验证等号

①从某项起，即存在$n_0 \in \mathbf{N}_+$，当$n > n_0$时，$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ (n=1, 2, 3, \cdots)$；

②$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

则数列$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \leqslant & & < & \\
 & & < & & < & \\
 & y_n & \leqslant & x_n & \leqslant & z_n \\
n\to\infty & \downarrow & < & \downarrow & \leqslant & \downarrow \\
 & a & \Rightarrow & a & \Leftarrow & a \\
 & (+\infty) & & (+\infty) & & (+\infty) \\
 & (-\infty) & & (-\infty) & & (-\infty)
\end{array}$$

【注】放缩的常用方法如下 .

(1) 利用简单的放大与缩小 .

$$\begin{cases} n\cdot u_{\min} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\cdot u_{\max}, \\ \text{当}u_i \geqslant 0\text{时},\ 1\cdot u_{\max} \leqslant u_1+u_2+\cdots+u_n \leqslant n\cdot u_{\max}. \end{cases}$$

(2) 利用重要不等式 .

①设a, b为实数，则 a. $|a\pm b| \leqslant |a|+|b|$；b. $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$.

可以将上述不等式 a. 推广为n个实数的情形，即

$$|a_1 \pm a_2 \pm \cdots \pm a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n| .$$

② a. $\sqrt{ab} \leqslant \dfrac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}\ (a,\ b \geqslant 0)$；

还有$|ab| \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$，例如，若$u_n > 0$，则$\dfrac{u_n}{n} = u_n \cdot \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{u_n^2 + \dfrac{1}{n^2}}{2}$.

b. $\sqrt[3]{abc} \leqslant \dfrac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}}\ (a,\ b,\ c \geqslant 0)$.

③设$a \geqslant b \geqslant 0$，则$\begin{cases} \text{当 } m>0 \text{ 时}, a^m \geqslant b^m, \\ \text{当 } m<0 \text{ 时}, a^m \leqslant b^m. \end{cases}$

④若$0<a<x<b$, $0<c<y<d$，则$\dfrac{c}{b} < \dfrac{y}{x} < \dfrac{d}{a}$.

考研中考过：当$n\pi < x < (n+1)\pi$, $2n < S(x) < 2(n+1)$时，$\dfrac{2n}{(n+1)\pi} < \dfrac{S(x)}{x} < \dfrac{2(n+1)}{n\pi}$.

⑤$\sin x < x < \tan x \left(0 < x < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

⑥$\sin x < x (x>0)$.

考研中考过：当$x_n > 0$时，$x_{n+1} = \sin x_n < x_n$，故$\{x_n\}$单调减少 .

⑦当$0 < x < \dfrac{\pi}{4}$时，$x < \tan x < \dfrac{4}{\pi}x$. 证明见习题 6.9.

⑧当$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$时，$\sin x > \dfrac{2}{\pi}x$. 证明见例 6.19.

⑨ $\arctan x \leqslant x \leqslant \arcsin x(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

可考：当 $x_n > 0$ 时，$x_{n+1} = \arctan x_n < x_n$，故 $\{x_n\}$ 单调减少.

⑩ $\mathrm{e}^x \geqslant x + 1(\forall x)$.

可考：当 $x_{n+1} = \mathrm{e}^{x_n} - 1$ 时，由 $\mathrm{e}^{x_n} - 1 \geqslant x_n$，得 $x_{n+1} \geqslant x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调不减.

⑪ $x - 1 \geqslant \ln x(x > 0)$.

可考：当 $x_n > 0$ 时，若 $x_{n+1} = \ln x_n + 1$，由 $\ln x_n + 1 \leqslant x_n$，得 $x_{n+1} \leqslant x_n$，即 $\{x_n\}$ 单调不增.

⑫ $\dfrac{1}{1+x} < \ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) < \dfrac{1}{x}(x>0)$ 或 $\dfrac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x(x>0)$.

(3) 利用闭区间上连续函数必有最大值与最小值.

(4) 利用压缩映射原理.

原理一 对数列 $\{x_n\}$，若存在常数 k $(0<k<1)$，使得 $|x_{n+1}-a| \leqslant k|x_n - a|$, $n=1, 2, \cdots$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明 $0 \leqslant |x_{n+1}-a| \leqslant k|x_n-a| \leqslant k^2|x_{n-1}-a| \leqslant \cdots \leqslant k^n|x_1-a|$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty} k^n = 0$，根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-a| = 0$，即 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

原理二 对数列 $\{x_n\}$，若 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=1, 2, \cdots$, $f(x)$ 可导，a 是 $f(x)=x$ 的唯一解，且 $\forall x \in \mathbf{R}$，有 $|f'(x)| \leqslant k < 1$，则 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

证明 $|x_{n+1}-a| = |f(x_n) - f(a)| \xlongequal{\text{拉格朗日中值定理}} |f'(\xi)||x_n - a| \leqslant k|x_n - a|$，其中 ξ 介于 a 与 x_n 之间，由原理一，有 $\{x_n\}$ 收敛于 a.

以上原理一、二是特殊的压缩映射过程，考生在使用它们时，要写出证明过程. 如例 2.15.

(5) 利用题设条件来推证（这往往是大题的第 1 问）.

例 2.9 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1} + \dfrac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n+n}\right) =$ ______.

解 应填 $\dfrac{1}{2}$.

分子不变，将分母放缩成相同的，则

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} \leqslant \frac{1}{n^2+n+1} + \frac{2}{n^2+n+2} + \cdots + \frac{n}{n^2+n+n} \leqslant \frac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)} = \dfrac{1}{2}$，所以根据夹逼准则，原式 $= \dfrac{1}{2}$.

例 2.10 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n}$，其中 $a_i(i=1, 2, \cdots, m)$ 都是非负数.

解 设 $a=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\}$，则

$$a^n \leqslant a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n \leqslant m \cdot a^n ,$$

即 $a \leqslant \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leqslant a \cdot m^{\frac{1}{n}}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} m^{\frac{1}{n}} = 1$. 故

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_m\} .$$

【**注**】这是一个结论，应当记住 .

如当 $0<a<b$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{a}\right)^n + \left(\frac{1}{b}\right)^n} = \frac{1}{a}$. 又如当 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\sin^n x + \cos^n x} = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, \\ \sin x, & \frac{\pi}{4} < x \leqslant \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

再如 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}} = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ |x|^3, & |x| > 1. \end{cases}$

例 2.11 设 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$，求 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2}$.

解 由 $\cos a_n - \cos b_n = a_n > 0$，知 $0 < a_n < b_n$，则由夹逼准则，得

$\cos x$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 内是减函数.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 ,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos b_n}{b_n^2}\cdot\frac{a_n}{1-\cos b_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1-\cos a_n + a_n} = \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1-\cos a_n}{a_n}+1} = \frac{1}{2}.$$

7. 单调有界准则

单调有界数列必有极限，即若数列 $\{x_n\}$ 单调增加（减少）且有上界（下界），则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在 .

证明数列 $\{x_n\}$ 单调性的常用方法：

不等关系

a. $x_{n+1} - x_n \underset{(<)}{>} 0$ 或 $\frac{x_{n+1}}{x_n} \underset{(<)}{>} 1$（同号）.

b. 利用数学归纳法 .

c. 利用重要不等式（见夹逼准则的注 (2)）.

d. $x_n - x_{n-1}$ 与 $x_{n-1} - x_{n-2}$ 同号，则 $\{x_n\}$ 单调 .

e. 利用结论：对 $x_{n+1} = f(x_n)(n=1, 2, \cdots)$，$x_n \in$ 区间 I .

若$f'(x)>0$，$x\in$区间I，则数列$\{x_n\}$单调，且$\begin{cases}\text{当}x_2>x_1\text{时，数列}\{x_n\}\text{单调增加，}\\ \text{当}x_2<x_1\text{时，数列}\{x_n\}\text{单调减少．}\end{cases}$

证明见例2.13.

若$f'(x)<0$，$x\in$区间I，则数列$\{x_n\}$不单调．

例 2.12 设$0<x_1<3$，$x_{n+1}=\sqrt{x_n(3-x_n)}(n=1, 2, \cdots)$，证明数列$\{x_n\}$的极限存在，并求此极限．

证明 证明这种由递推形式给出的数列的收敛性，一般都是根据“单调有界数列必收敛”这一准则进行证明；在证明了极限存在的前提下再求极限．

由例 2.1 知数列$\{x_n\}$是有界的，对任意正整数$n>1$，都有$0<x_n\leqslant\dfrac{3}{2}$．

再证明$\{x_n\}$单调：当$n>1$时，

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{x_n(3-x_n)}-x_n=\sqrt{x_n}(\sqrt{3-x_n}-\sqrt{x_n})$$
$$=\frac{2\sqrt{x_n}\left(\dfrac{3}{2}-x_n\right)}{\sqrt{3-x_n}+\sqrt{x_n}}\geqslant 0,$$

即$x_{n+1}\geqslant x_n(n>1)$，所以数列$\{x_n\}(n>1)$是单调增加的．

根据单调有界数列必有极限的准则知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，设其为$a$，则

$$a=\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{x_{n-1}(3-x_{n-1})}=\sqrt{a(3-a)},$$

解得$a=\dfrac{3}{2}$或$a=0$（舍去）. 故

由于$\{x_n\}$单调增加，且$x_n>0$，故$a>0$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{3}{2}.$$

例 2.13 设$x_{n+1}=f(x_n)$，则以下命题正确的是（　　）．

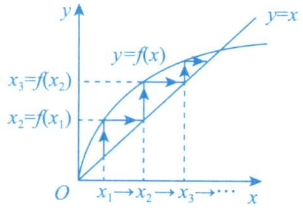
①若$f(x)$单调增加，且$x_1<x_2$，则数列$\{x_n\}$单调增加

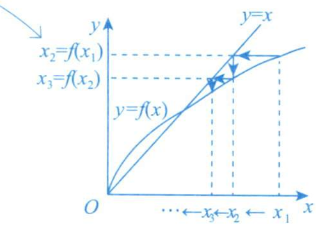
②若$f(x)$单调增加，且$x_1>x_2$，则数列$\{x_n\}$单调减少

③若$f(x)$单调减少，且$x_1<x_2$，则数列$\{x_n\}$单调增加

④若$f(x)$单调减少，且$x_1>x_2$，则数列$\{x_n\}$单调减少

理解见例2.15的注.





(A) ①②　　(B) ①③

(C) ②③　　(D) ②④

解 应选 (A).

对上述命题逐个分析，如下．

对①，若$f(x)$单调增加，且$x_1<x_2$，$x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)$，则$f(x_1)<f(x_2)$，即$x_2<x_3$，又$x_3=$

$f(x_2), x_4 = f(x_3)$，此时$f(x_2) < f(x_3)$，即$x_3 < x_4, \cdots$，依次类推，便知数列$\{x_n\}$越来越大，即单调增加．

对②，若$f(x)$单调增加，且$x_1 > x_2$，$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$，则$f(x_1) > f(x_2)$，即$x_2 > x_3$，又$x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3)$，此时$f(x_2) > f(x_3)$，即$x_3 > x_4, \cdots$，依次类推，便知数列$\{x_n\}$越来越小，即单调减少．

对③，若$f(x)$单调减少，且$x_1 < x_2$，$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$，则$f(x_1) > f(x_2)$，即$x_2 > x_3$，又$x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3)$，此时$f(x_2) < f(x_3)$，即$x_3 < x_4, \cdots$，依次类推，便知数列$\{x_n\}$是摆动的，不单调．

对④，若$f(x)$单调减少，且$x_1 > x_2$，$x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2)$，则$f(x_1) < f(x_2)$，即$x_2 < x_3$，又$x_3 = f(x_2), x_4 = f(x_3)$，此时$f(x_2) > f(x_3)$，即$x_3 > x_4, \cdots$，依次类推，便知数列$\{x_n\}$是摆动的，不单调．

例 2.14 (1) 证明方程$x = 2\ln(1+x)$在$(0, +\infty)$内有唯一实根ξ；

(2) 对于 (1) 中的ξ，任取$x_1 > \xi$，定义$x_{n+1} = 2\ln(1+x_n), n = 1, 2, \cdots$，证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，并求其值．

证明 (1) 令$F(x) = x - 2\ln(1+x), x > 0$，则

$$F'(x) = 1 - \frac{2}{1+x} = \frac{x-1}{1+x},$$

令$F'(x) = 0$，得$x = 1$是唯一驻点，且当$0 < x < 1$时，$F'(x) < 0$；当$x > 1$时，$F'(x) > 0$．

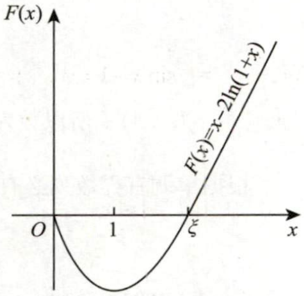


图 2-2

又

$$F(0) = 0, F(1) = 1 - 2\ln 2 < 0,$$

$$\lim_{x\to+\infty}[x - 2\ln(1+x)] = +\infty > 0,$$

如图 2-2 所示，所以$F(x)$在$(0, 1)$内无零点，在$(1, +\infty)$内有唯一零点ξ，故原方程在$(0, +\infty)$内有唯一实根ξ．

(2) 由$x_1 > \xi, F(x_1) > F(\xi) = 0$，得

$$x_1 > \boxed{2\ln(1+x_1)} = x_2 > \boxed{2\ln(1+\xi)} = \xi,$$

$x_1 > \xi$，故 $2\ln(1+x_1) > 2\ln(1+\xi)$

即$x_1 > x_2 > \xi$．

假设$x_{n-1} > x_n > \xi$成立，则有

$$x_n > 2\ln(1+x_n) = x_{n+1} > 2\ln(1+\xi) = \xi,$$

$x_n > \xi$，故 $2\ln(1+x_n) > 2\ln(1+\xi)$

即$x_n > x_{n+1} > \xi$．于是$\{x_n\}$单调减少且有下界ξ．

故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在，记为$a$，在$x_{n+1} = 2\ln(1+x_n)$两边取极限，有$a = 2\ln(1+a)$，由 (1) 可知$a = \xi$．

【注】读者可画出如图 2-3 所示的情形，加深理解．

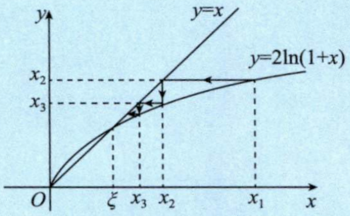


图 2-3

例 2.15 (1) 证明方程 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一实根 a；

(2) 设 $-1\leqslant x_1\leqslant 1$，定义 $x_{n+1}=\cos x_n$，$n=1,2,\cdots$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，且极限值就是 (1) 中的 a .

证明 (1) 令 $F(x)=\cos x-x$，则

$$F(0)=1>0,\ F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{3}<0,$$

且 $F'(x)=-\sin x-1<0$，于是存在唯一的 $a\in\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$，使得 $F(a)=0$，即 $x=\cos x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内有唯一实根 a .

(2) 由于 $-1\leqslant x_1\leqslant 1$，则 $0<x_{n+1}=\cos x_n\leqslant 1,\ n\geqslant 1$，故 $0<x_n\leqslant 1<\dfrac{\pi}{3},\ n>1$.

令 $f(x)=\cos x$，显然 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{3}\right)$ 内单调减少，于是 $\{x_n\}$ 不单调，下面直接考虑 $|x_{n+1}-a|$：

$|x_{n+1}-a|=|\cos x_n-\cos a|=|-\sin\xi\cdot(x_n-a)|\leqslant\overset{=\sin\frac{\pi}{3}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}|x_n-a|\leqslant\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2|x_{n-1}-a|\leqslant\cdots\leqslant\underset{\text{压缩映射}}{\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n}|x_1-a|$（$\xi$ 介于 a 和 x_n 之间），当 $n\to\infty$ 时，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^n|x_1-a|\to 0$，于是 $x_{n+1}\to a$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

【注】读者可画出如图 2-4 所示的情形，加深理解 .

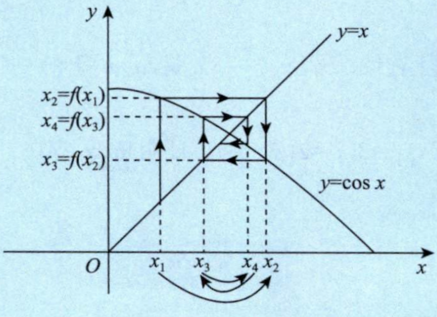


图 2-4

基础习题精练

习题

2.1 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0, \lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，则（　　）.

(A) 对任意n，$a_n<b_n$成立

(B) 存在正整数N，当$n>N$时，总有$a_n<b_n$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$必定存在

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$可能不存在

2.2 设数列$\{x_n\}$满足$x_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}$，则（　　）.

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，但不为零

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$可能存在，也可能不存在

2.3 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}})=$______.

2.4 设$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}$存在且不为零，则常数$k=$______.

2.5 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=$______.

2.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}=$______.

2.7 设函数$f(x)$在$[a, b]$上连续，$x_1, x_2, \cdots, x_n$是$[a, b]$上的一个点列，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}$.

2.8 设$x_1=2, x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3(n=2, 3, \cdots)$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，并求其值.

解答

2.1 (B) **解** 数列极限的概念是描述变量在给定过程中的变化趋势，数列极限存在与否与前有限

项的值无关，因此可以排除 (A).

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$，由极限四则运算规则可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n$ 必定存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_n}$ 不符合极限四则运算规则，由无穷小量的性质可知其肯定不存在．因此可以排除 (C)，(D). 故由排除法，应选 (B).

2.2 (A) **解** 因 $x_n>0$，所以数列 $\{x_n\}$ 有下界．又 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}<1$，由数列极限的保号性可知，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$，即当 $n>N$ 时，数列 $\{x_n\}$ 是单调减少的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 是存在的．结合极限四则运算规则，通过反证法易知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$．

【注】(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 与 $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}<1$ 之间的区别：前者从第 N 项开始满足 $x_{n+1}<x_n$，而后者从指定项（默认第一项）开始满足．

(2) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=2$，令 $u_n=\dfrac{1}{x_n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{u_{n+1}}=2$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．利用无穷小与无穷大之间的关系，知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$．

(3) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 可能存在，也可能不存在．如当 $x_n=\dfrac{1}{n}$ 时存在，当 $x_n=n$ 时不存在．

2.3 1 **解** 所给极限为“$\infty-\infty$”型未定式，表达式中含有根式，可先将其变形，即

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n-\sqrt{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}}+\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{n}}}}=1.\end{aligned}$$

2.4 100 **解**

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k-(n-1)^k}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99}}{n^k\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^k\right]}\\&=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k-1}=-\lim_{n\to\infty}\frac{n^{99-k}}{k\left(-\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{k}\lim_{n\to\infty}n^{99-k+1}.\end{aligned}$$

由此可知，极限存在且不为零的充要条件是 $99-k+1=0$，即 $k=100$．

2.5 1 **解** 因为

$$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+i}} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n^2+1}},$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1$，根据夹逼准则，所以原式 $=1$.

2.6 1 **解** 因为

$$1 \leqslant \sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \leqslant \sqrt[n]{n},$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}=1 .$$

2.7 **解** 本题考虑夹逼准则 . 由 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，知 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上非负连续，且 $0<m\leqslant \mathrm{e}^{f(x)}\leqslant M$，其中 M，m 分别为 $\mathrm{e}^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上的最大值和最小值，于是 $0<m\leqslant\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}\leqslant M$，故

$$\sqrt[n]{m}\leqslant\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}\leqslant\sqrt[n]{M} .$$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{M}=1$，根据夹逼准则，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{e}^{f(x_k)}}=1$.

2.8 **证明** 先证单调性 . 由 $x_n+(x_n-4)x_{n-1}=3$，得 $x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，又 $x_1=2$，所以 $x_2=\frac{3+4\times 2}{1+2}=\frac{11}{3}>x_1>0$，假设 $x_k>x_{k-1}>0$ 成立，则

$$x_{k+1}-x_k=\frac{3+4x_k}{1+x_k}-\frac{3+4x_{k-1}}{1+x_{k-1}}=\frac{x_k-x_{k-1}}{(1+x_k)(1+x_{k-1})}>0,$$

故 $x_{k+1}>x_k$，即数列 $\{x_n\}$ 单调增加 .

再证明其有界 . 因 $x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}=3+\frac{x_{n-1}}{1+x_{n-1}}<3+1=4$，所以数列 $\{x_n\}$ 有上界 .

由单调有界准则知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在 . 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，当 $n\to\infty$ 时，由 $x_n=\frac{3+4x_{n-1}}{1+x_{n-1}}$，得 $A=\frac{3+4A}{1+A}$，解得 $A=\frac{3\pm\sqrt{21}}{2}$，由题设，$x_n>x_1>0$，根据极限保号性可知 $A>0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{3+\sqrt{21}}{2}$.

第3讲 一元函数微分学的概念

基础知识结构

- 导数
- 导数的几何意义
- 高阶导数
- 微分的概念

基础内容精讲

1. 导数

设$y=f(x)$定义在区间I上，让自变量在$x=x_0$处加一个增量Δx（可正可负），其中$x_0\in I$，$x_0+\Delta x\in I$，则可得函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$．若函数增量$\Delta y$与自变量增量$\Delta x$的比值在$\Delta x\to 0$时的极限存在，即$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$存在，则称函数$y=f(x)$在点$x_0$处**可导**，并称这个极限为$y=f(x)$在点$x_0$处的**导数**，记作$f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{*}$$

当然，$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\dfrac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$y'(x_0)$或$y'|_{x=x_0}$这些符号记法与$f'(x_0)$等价．顺便交代一下，“导数”这个名词被认为是拉格朗日最先使用的，记号$f'(x_0)$，$y'|_{x=x_0}$多次出现在拉格朗日的文章中，而莱布尼茨则

喜欢写作 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$，$\left.\frac{\mathrm{d}[f(x)]}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}$.

莱布尼茨所用的符号d具有普适意义：如果要求A对B的变化率，就把A，B填进$\frac{\mathrm{d}□}{\mathrm{d}□}$，得$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}B}$，它可表示几乎所有你想研究的变化率问题，而不仅仅是位移s对时间t的变化率——$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$等于速度$v$.

比如：$\frac{\mathrm{d}(\text{兴趣})}{\mathrm{d}(\text{时间})}$，它往往小于零，你同意吗？再比如：$\frac{\mathrm{d}(\text{利润})}{\mathrm{d}(\text{价格})}$，若$\frac{\mathrm{d}(\text{利润})}{\mathrm{d}(\text{价格})}>0$，也就是涨价可以增加利润，此时定价低了；若$\frac{\mathrm{d}(\text{利润})}{\mathrm{d}(\text{价格})}<0$，也就是降价可以增加利润，此时定价高了.综上，当$\frac{\mathrm{d}(\text{利润})}{\mathrm{d}(\text{价格})}=0$时，利润最大，也就是说导数为零时的价格应是商品标签上的数字.懂得了这些道理后，请问，当$\frac{\mathrm{d}(\text{成绩})}{\mathrm{d}(\text{努力})}>0$时，说明什么？

【注】这里有几点需要说明．

(1) 在考题中，增量Δx一般会被命题人广义化为“狗”：

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\overset{\text{广义化}}{=\!=\!=}\lim_{\text{狗}\to 0}\frac{f(x_0+\text{狗})-f(x_0)}{\text{狗}}. \tag{**}$$

(2) 若在上面 (*) 式中，令$x_0+\Delta x=x$，则可将导数定义式写成

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}, \tag{***}$$

(**)，(***) 两式等价，读者将会在各种场合见到这两种等价写法．

(3) 下面这三种提法是等价的．

①$y=f(x)$在点x_0处可导；

②$y=f(x)$在点x_0处导数存在；

③$f'(x_0)=A$（A为有限数）．

(4) 函数在一点可导的充要条件．

①单侧导数．

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\overset{\text{记}}{=\!=}f'_-(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\overset{\text{记}}{=\!=}f'_+(x_0),$$

这里，$f'_-(x_0)$，$f'_+(x_0)$分别是$f(x)$在点x_0处的左导数、右导数，统称为单侧导数．

②$f'(x_0)$存在$\Leftrightarrow$其左导数$f'_-(x_0)$与右导数$f'_+(x_0)$均存在且相等．这一点当然是与极限存在的充分必要条件(左、右极限均存在且相等)对应．因为从本质上来说，导数的定义就是一个极限问题．

(5) 函数在一点可导的必要条件：若$f(x)$在一点可导，则$f(x)$在该点连续．反之未必．

如：$f(x)=|x|$在$x=0$处的情形．

例 3.1 以下命题，错误的是（　　）．

(A) 若$f(x)$是可导的偶函数，则$f'(x)$是奇函数

(B) 若$f(x)$是可导的奇函数，则$f'(x)$是偶函数

(C) 若$f(x)$是可导的周期为T的周期函数，则$f'(x)$也是以T为周期的周期函数

(D) 若$f(x)$是可导的有界函数，则$f'(x)$是有界函数

解　应选 (D).

对于选项 (A)，由导数定义，得

$$f'(-x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=(-1)\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}=-f'(x),$$

故$f'(x)$是奇函数 .

对于选项 (B)，由导数定义，得

$$\begin{aligned}f'(-x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(-x+\Delta x)-f(-x)}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-f(x-\Delta x)+f(x)}{\Delta x}\\&=\lim_{-\Delta x\to 0}\frac{f(x-\Delta x)-f(x)}{-\Delta x}\\&=f'(x),\end{aligned}$$

故$f'(x)$是偶函数 .

对于选项 (C)，由导数定义，得

$$f'(x+T)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+T+\Delta x)-f(x+T)}{\Delta x}$$
$$\xlongequal{f(x+T)=f(x)}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$
$$=f'(x),$$

故$f'(x)$也是以T为周期的周期函数 .

对于选项 (D)，举反例：$f(x)=\sqrt{x}\,(x\in(0,1])$有界，而$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,(x\in(0,1])$无界 . 应选 (D).

例 3.2　设$f(x)$是二阶可导且以 2 为周期的奇函数，$f\left(\frac{1}{2}\right)>0$，$f'\left(\frac{1}{2}\right)>0$，记$M=f\left(-\frac{1}{2}\right)$，$N=f'\left(\frac{3}{2}\right)$，$K=f''(0)$. 则（　　）.

(A) $M<N<K$　　(B) $M>N>K$

(C) $M<K<N$　　(D) $M>K>N$

解 应选 (C).

由$f(x)$为奇函数，则$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$. 根据例 3.1(B) 选项的结论，知$f'(x)$为偶函数，由例 3.1(A) 选项的结论，知$f''(x)$为奇函数（事实上，若$f(x)$无穷阶可导，则每求导一次，奇偶性即互换一次），由$f''(x)$存在，故$f''(0)=0$.

又$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，由例 3.1(C) 选项的结论，知$f'(x)$也是以 2 为周期的周期函数，则$f'\left(\dfrac{3}{2}\right)=f'\left(\dfrac{3}{2}-2\right)=f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f'\left(\dfrac{1}{2}\right)>0$，故$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<f''(0)<f'\left(\dfrac{3}{2}\right)$，即$M<K<N$，应选 (C).

例 3.3 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内有定义，并且$|f(x)|\leqslant 1-\cos x$，则$f(x)$在$x=0$处（ ）.

(A) 极限存在但不连续

(B) 连续但不可导

(C) 可导且$f'(0)=0$

(D) 可导且$f'(0)\neq 0$

解 应选 (C).

由于$\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos x)=0$，由夹逼准则知$\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 又将$x=0$代入所给不等式，有$|f(0)|\leqslant 0$，所以$f(0)=0$，故$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=f(0)$，得$f(x)$在$x=0$处连续，且

$$|f(x)-f(0)|=|f(x)-0|=|f(x)|\leqslant 1-\cos x,$$

$$0\leqslant\left|\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|\leqslant\frac{1-\cos x}{|x|}.$$

因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|x|}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{|x|}=0$，再次使用夹逼准则，有$\lim\limits_{x\to 0}\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right|=0$，也即$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，故$f'(0)=0$，应选 (C).

例 3.4 设函数$f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中$n$为正整数，则$f'(0)=$（ ）.

(A) $(-1)^{n-1}(n-1)!$

(B) $(-1)^{n}(n-1)!$

(C) $(-1)^{n-1}n!$

(D) $(-1)^{n}n!$

解 应选 (A).

方法一 利用导数的定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)-0}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}[(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)]=(-1)^{n-1}(n-1)!\ .$$

方法二 公式法 .

$$f'(x)=(e^x-1)'(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)+(e^x-1)(e^{2x}-2)'\cdots(e^{nx}-n)+\cdots+(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)',$$

故$f'(0)=(1-2)\cdots(1-n)+0+\cdots+0=(-1)^{n-1}(n-1)!$.

例 3.5 设$f(x)$在$x=a$处连续，$F(x)=f(x)|x-a|$，则$f(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的(　　).

(A) 充要条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 必要非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

解 应选 (A).

由题意得，

$$F(x)=\begin{cases}-(x-a)f(x), & x<a,\\ 0, & x=a,\\ (x-a)f(x), & x>a.\end{cases}$$

又

$$F'_-(a)=\lim_{x\to a^-}\frac{-(x-a)f(x)}{x-a}=-\lim_{x\to a^-}f(x)=-f(a),$$

$$F'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{(x-a)f(x)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a),$$

故$f(a)=0$是$F(x)$在$x=a$处可导的充要条件，应选 (A).

例 3.6 设函数

$$f_1(x)=(x^2-1)\left|x^3+x^2-2x-2\right|,$$

$$f_2(x)=(x^2-1)\left|x^3-2x^2-x+2\right|,$$

$$f_3(x)=(x^2-1)\left|x^3+3x^2-2x-6\right|,$$

将函数$f_i(x)(i=1, 2, 3)$的不可导点个数记为n_i，则（　　）.

(A) $n_2<n_1<n_3$　　(B) $n_1<n_2<n_3$

(C) $n_3<n_2<n_1$　　(D) $n_2<n_3<n_1$

解 应选 (A).

由例 3.5 可知：若$\varphi(x)$在$x=x_0$处连续，则$f(x)=|x-x_0|\varphi(x)$在点x_0处可导的充分必要条件是$\varphi(x_0)=0$．因为

$$f_1(x)=(x^2-1)\left|x^3+x^2-2x-2\right|=(x+1)(x-1)\left|(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+1)\right|,$$

$$f_2(x)=(x^2-1)\left|x^3-2x^2-x+2\right|=(x+1)(x-1)\left|(x+1)(x-1)(x-2)\right|,$$

$$f_3(x)=(x^2-1)\left|x^3+3x^2-2x-6\right|=(x+1)(x-1)\left|(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+3)\right|,$$

所以$f_1(x)$有两个不可导点$x=-\sqrt{2}$，$x=\sqrt{2}$；$f_2(x)$有一个不可导点$x=2$；$f_3(x)$有三个不可导点$x=-\sqrt{2}$，$x=\sqrt{2}$，$x=-3$．于是，$n_2<n_1<n_3$，应选 (A).

2. 导数的几何意义

函数$y=f(x)$在点x_0处的导数值$f'(x_0)$就是曲线$y=f(x)$在点(x_0, y_0)处切线（见图 3-1）的斜率k，即$k=f'(x_0)$，于是曲线$y=f(x)$在点(x_0, y_0)处的切线方程为$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$．

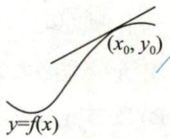


图 3-1

什么是切线？它就像一把锋利无比的刀，“嗖”地切过点(x_0, y_0)，在此瞬间，切线的方向就是点(x_0, y_0)运动的方向．想想看，掷铁饼（作为质点）时，运动员旋转轨迹的每一点的切线方向就是铁饼那一瞬时的运动方向．在那一瞬时脱手，铁饼就会沿着该点的切线方向飞出．

法线方程为
$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)(f'(x_0)\neq 0).$$

【注】 **注例 1**　研究$y=f(x)=|x|$在$x=0$处的切线问题．

解　从$x=0$出发，取增量Δx，有$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|\Delta x|$．

当$\Delta x>0$时，$\Delta y=\Delta x$，则$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=1\xlongequal{\text{记}}k_+$；

当$\Delta x<0$时，$\Delta y=-\Delta x$，则$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=-1\xlongequal{\text{记}}k_-$．

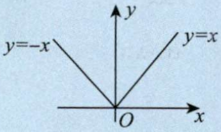


图 3-2

如图 3-2 所示，曲线$y=f(x)=|x|$在原点O处出现了两条**单侧切线**，这两条单侧切线形成了一个角，数学上称这里的原点O为一个**角点**．不过，虽然此曲线在角点O处有两条单侧切线，但按照前面讲到的$f(x)$在点x_0处可导的充要条件，这里的$f'_+(0)=k_+\neq k_-=f'_-(0)$，显然$f'(0)$不存在，所以我们说$y=f(x)=|x|$在原点$O$处不可导，也就没有切线．

注例 2　研究$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$x=0$处的切线问题．

解　显然，在$x=0$处$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\dfrac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}$．

当$\Delta x>0$时，$f'_+(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$；

当$\Delta x<0$时，$f'_-(0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty$．

这样的结果称为**无穷导数**．又$\pm\infty$被叫作广义的数，所以无穷导数在有些数学场合也可被视为导数存在的特殊情形．不过要强调的是，学习“高等数学”这门课程的读者，还是将无穷导数视为导数不存在为好，因为这是“高等数学”里的“规矩”．

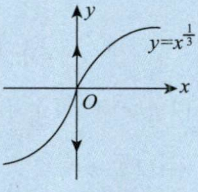


图 3-3

还要指出，如图 3-3 所示，$y=f(x)=x^{\frac{1}{3}}$在$x=0$处有垂直于x轴的切线$x=0$．我们说，若曲线$y=f(x)$在点$P(x_0, y_0)$处有垂直于x轴的切线，则等价于
$$f'(x_0)=+\infty\text{或}-\infty\text{（为无穷导数）}.$$

例 3.7　设曲线$y=f(x)=x^n$在点$(1,1)$处的切线与x轴的交点为$(\xi_n,0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$______.

解　应填$\dfrac{1}{\mathrm{e}}$.

由于$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=1}=\left.nx^{n-1}\right|_{x=1}=n$，故过点$(1,1)$的切线方程为$y-1=n(x-1)$，令$y=0$得$x=\xi_n=1-\dfrac{1}{n}$. 于是

$$\lim_{n\to\infty}f(\xi_n)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

3. 高阶导数

函数$f(x)$在点x_0处的二阶导数为

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}\text{或}f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}.$$

函数$f(x)$在点x_0处的n(n为大于 2 的整数)阶导数为

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}\text{或}f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n-1)}(x)-f^{(n-1)}(x_0)}{x-x_0}.$$

【注】(1) 如果$f(x)$在点x_0处有二阶导数，则$f(x)$在x_0的某个邻域内有一阶导数且$f'(x)$在x_0处连续.

(2) 如果$f(x)$在点x_0处有n阶导数，则$f(x)$在x_0的某个邻域内有$1\sim(n-1)$阶的各阶导数.

例 3.8　设$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$. 证明：

(1) 若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值；

(2) 若$f''(x_0)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值.

证明　(1) 因$f''(x_0)<0$，故按二阶导数的定义有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0.$$

根据函数极限的局部保号性，存在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$，当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，有$\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}<0$.

因为$f'(x_0)=0$，所以上式为$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}<0$. 从而当$x\in\mathring{U}(x_0,\delta)$时，$f'(x)$与$x-x_0$符号相反. 当$x-x_0<0$时，$f'(x)>0$；当$x-x_0>0$时，$f'(x)<0$. 根据判别极值的第一充分条件，$f(x)$在点$x_0$处取得极大值.

(2) 因$f''(x_0)>0$，故按二阶导数的定义有

$$f''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0.$$

根据函数极限的局部保号性，存在x_0的去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$，当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时，有$\dfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}>0$.

因为$f'(x_0)=0$，所以上式为$\dfrac{f'(x)}{x-x_0}>0$.从而当$x \in \mathring{U}(x_0, \delta)$时，$f'(x)$与$x-x_0$符号相同.当$x-x_0<0$时，$f'(x)<0$；当$x-x_0>0$时，$f'(x)>0$.根据判别极值的第一充分条件，$f(x)$在点$x_0$处取得极小值.

4. 微分的概念

(1) 引例.

如图 3-4 所示，设正方形边长为 1，当其边长增加Δx时，它的面积S增加了

$$\Delta S=(1+\Delta x)^2-1^2=2\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

上述面积的增量ΔS由两部分组成，一部分是$2\Delta x$（图 3-4 中两个小长方形面积），它是Δx的一次项；另一部分是$(\Delta x)^2$（图 3-4 中右上角小正方形的面积），它满足$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=0$，即$(\Delta x)^2=o(\Delta x)$.故$\Delta S=2\Delta x+o(\Delta x)$，$2\Delta x$为增量的主要部分，也叫线性主部，$o(\Delta x)$为$\Delta x \to 0$时$\Delta x$的高阶无穷小，是误差，当$\Delta x$足够小时，有$\Delta S \approx 2\Delta x$.

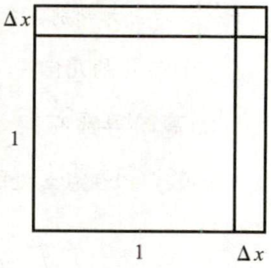


图 3-4

(2) 概念.

设函数$y=f(x)$在点x_0的某邻域内有定义，且$x_0+\Delta x$在该邻域内，对于函数增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若存在与Δx无关的常数A，使得
$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x),$$
其中$o(\Delta x)$是在$\Delta x \to 0$时比Δx更高阶的无穷小，则称$f(x)$在点x_0处**可微**，并把增量的主要部分$A\Delta x$称为线性主部，也叫作$f(x)$在点x_0处的微分，记$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\Delta x$或$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{A\Delta x}{\Delta x}+\lim_{\Delta x \to 0}\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=A,$$

由此可知$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=A\cdot\Delta x=f'(x_0)\Delta x$，

又$\mathrm{d}x=\Delta x$，故$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\mathrm{d}x$.

【注】 (1) 可微的判别.

①写增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；

②写线性增量$A\Delta x=f'(x_0)\Delta x$；

③作极限$\lim\limits_{\Delta x \to 0}\dfrac{\Delta y-A\Delta x}{\Delta x}$.

若该极限等于 0，则$y=f(x)$在点x_0处可微，否则不可微.

(2) 从上述判别步聚可以看出，用形式简单的“线性增量 $A\Delta x$”去代替形式复杂的“增量 Δy”，且其误差“$\Delta y - A\Delta x$”是 $o(\Delta x)$，这就是说，用“简单的量”代替了“复杂的量”，且产生的误差又可以忽略不计，这就是可微的含义．

(3)“$f(x)$在点x_0处可微”与“$f(x)$在点x_0处可导”互为充要条件，故判别$f(x)$在点x_0处是否可微可以转化为判别其在点x_0处是否可导，这样的话考生会比较熟悉．

(4) 可微的几何意义．

若$f(x)$在点x_0处可微，则在点(x_0, y_0)附近可以用切线段近似代替曲线段，这是可微的几何意义．

(5) 图 3-5 可以较好地帮助读者理解以上论述．

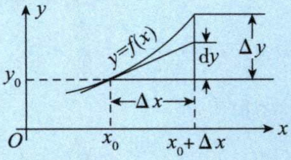


图 3-5

例 3.9 设函数 $y = f(x)$ 在任意点 x 处的增量 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} + o(\Delta x)$，且 $f(0)=1$，则 $y=f(x)$在点$x=0$处的微分 $\mathrm{d}y =$（　　）．

(A) 0　　(B) $\mathrm{d}x$　　(C) $2\mathrm{d}x$　　(D) $3\mathrm{d}x$

解 应选 (B).

由 $\Delta y = \dfrac{y\Delta x}{x+\sqrt{x^2+y^2}} + o(\Delta x)$，知 $y' = \dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$，又 $f(0)=1$，可得 $y'(0)=1$，进而 $\mathrm{d}y\big|_{x=0} = y'(0)\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$，应选 (B).

例 3.10 设函数$f(u)$可导，且 $y = f(x^2)$，当自变量x在$x=-1$处取得增量$\Delta x=-0.1$时，相应的函数增量Δy的线性主部为 0.1，则 $f'(1) =$（　　）．

(A) -1　　(B) 0.1　　(C) 0.5　　(D) 1

解 应选 (C).

本题依然是考查微分的定义．函数的微分是函数增量的线性主部，且 $\mathrm{d}y = y'\mathrm{d}x = y'\Delta x$，而

$$\mathrm{d}y = f'(x^2)\mathrm{d}(x^2) = 2xf'(x^2)\mathrm{d}x = 2xf'(x^2)\Delta x,$$

因此，由 $0.1 = -2f'(1)\cdot(-0.1)$，可得 $f'(1)=0.5$，故选 (C).

基础习题精练

习题

3.1 设函数$f(x)=|x^3-1|\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$在$x=1$处连续，则$\varphi(1)=0$是$f(x)$在$x=1$处可导的（　　）.

(A) 充分必要条件　　(B) 充分但非必要条件

(C) 必要但非充分条件　　(D) 既非充分又非必要条件

3.2 设函数$f(x)$可导，且曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线与直线$y=2-x$垂直，则当$\Delta x\to 0$时，该函数在$x=x_0$处的微分$\mathrm{d}y$是（　　）.

(A) 与Δx同阶但非等价的无穷小　　(B) 与Δx等价的无穷小

(C) 比Δx高阶的无穷小　　(D) 比Δx低阶的无穷小

3.3 设函数$y=f(x)$在点x_0处可导，且$f'(x_0)\neq 0$．当自变量有增量Δx时，函数$y=f(x)$的增量为Δy，则当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y-\mathrm{d}y$是$\mathrm{d}y$的（　　）.

(A) 高阶无穷小　　(B) 低阶无穷小　　(C) 同阶非等价无穷小　　(D) 等价无穷小

3.4 设$f(x)=(x-a)\cdot\varphi(x)$，其中$\varphi(x)$连续，则$f'(a)=$______.

3.5 设$f(x)$满足$f(0)=0$，且$f'(0)$存在，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-\sqrt{\cos x})}{\ln(1-x\sin x)}=$______.

3.6 证明：(1) 若$F(x)$在$[x_0, x_0+\delta)(\delta>0)$连续，在$(x_0, x_0+\delta)$内可导，当$\lim\limits_{x\to x_0^+}F'(x)\overset{存在}{=\!=\!=}A$时，有$F'_+(x_0)=A$；

(2) 若$F(x)$在$(x_0+\delta, x_0](\delta>0)$连续，在$(x_0-\delta, x_0)$内可导，当$\lim\limits_{x\to x_0^-}F'(x)\overset{存在}{=\!=\!=}A$时，有$F'_-(x_0)=A$.

3.7 设$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{\pi}{x}, & x<0, \\ A, & x=0, \\ ax^2+b, & x>0, \end{cases}$求常数$A, a, b$的值，使$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

3.8 已知函数$f(x)$在$x=1$处可导，且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求$f'(1)$.

3.9 设$\delta>0$，$f(x)$在$[-\delta, \delta]$上有定义，$f(0)=1$，且满足

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=0,$$

证明：$f(x)$在$x=0$处可导，并求$f'(0)$.

解答

3.1　(A)　**解**　由 $\varphi(1)=0$ 可知

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\left|x^3-1\right|\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=0,$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left|x^3-1\right|\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)\varphi(x)=0,$$

即 $f'_+(1)=f'_-(1)=0$，所以 $f'(1)=0$.

设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，因为 $f(1)=0$，所以

$$f'_+(1)=\lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\left|x^3-1\right|\varphi(x)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x^2+x+1)\varphi(x)=3\varphi(1),$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{\left|x^3-1\right|\varphi(x)}{x-1}=-\lim_{x\to1^-}(x^2+x+1)\varphi(x)=-3\varphi(1)\ .$$

由 $f'_+(1)=f'_-(1)$ 可得，3

3.2　(B)　**解**　由题设　n $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\Delta x}\right|_{x=x_0}=1$，即当 $\Delta x\to0$ 时，

该函数在 $x=x_0$ 处 $\mathrm{d}y$ 与 Δx

3.3　(A)　**解**　题目给出 $f(x)$ 在 x_0 处可导，考查 $\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}$，注意，如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则必定可微分，因此可以由微分的性质入手 .

由微分的定义可知 $\Delta y-\mathrm{d}y=o(\Delta x)$，而 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}=f'(x_0)\Delta x$.

由题设知 $f'(x_0)\neq0$，可得

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y-\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{o(\Delta x)}{f'(x_0)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{1}{f'(x_0)}\cdot\frac{o(\Delta x)}{\Delta x}=0,$$

故选 (A).

3.4　$\varphi(a)$　**分析**　概念题 . 有的同学用公式法求出 $f'(a)$，但这是错误解法，

$$f'(a)=f'(x)\big|_{x=a}=\left[\varphi(x)+(x-a)\cdot\varphi'(x)\right]\Big|_{x=a}=\varphi(a)+0=\varphi(a),$$

错误，因为 $\varphi(x)$ 仅连续，$\varphi'(x)$ 不一定存在！应该用“导数定义”求出 .

解　导数定义 .

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)\cdot\varphi(x)-0}{x-a}=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\varphi(a)\ .$$

【注】求导数时，当函数不具备“导数存在”的条件时，往往只能用“导数定义”求．

3.5 $-\frac{1}{4}f'(0)$ **解**

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{f(1-\sqrt{\cos x})-f(0)}{(1-\sqrt{\cos x})-0}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$=f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{\ln(1-x\sin x)}$$

$$\xlongequal{\text{等价无穷小替换}}f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\bullet\frac{1}{2}x^2}{-x\sin x}=-\frac{1}{4}f'(0)\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=-\frac{1}{4}f'(0)\,.$$

3.6 证明 (1) $F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{F'(x)}{1}=A$.

(2) $F'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{F'(x)}{1}=A$.

【注】满足 (1)，(2) 的条件时，有 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x_0^-)}}F'(x)\xlongequal{\text{存在}}A$，则 $F'_{\substack{+\\(-)}}(x_0)\xlongequal{\text{存在}}A$. 但 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0^+\\(x_0^-)}}F'(x)$ 不存在时，$F'_{\substack{+\\(-)}}(x_0)$ 亦可能存在 . 如 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

当 $x=0$ 时，$F'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0.$

当 $x\neq 0$ 时，$F'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0^+}F'(x)$ 不存在 . 但由 $F'(0)=0$，知 $F'_+(0)=0$（存在）.

3.7 解 由可导与连续的关系有

$$\lim_{x\to 0^-}x^2\sin\frac{\pi}{x}=\lim_{x\to 0^+}(ax^2+b)=A,$$

所以 $A=b=0$. 又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2\sin\frac{\pi}{x}-0}{x-0}=0,\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax^2-0}{x-0}=0,$$

所以 a 可以为任意常数，且 $f'(0)=0$.

3.8 解 因为 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处连续，从而

$$\lim_{x\to 0}[f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)]=f(1)-3f(1)=-2f(1)\,.$$

由 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，可知

$$\lim_{x\to0}[f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)]=0\,,$$

所以$f(1)=0$．因此

$$\begin{aligned}&\lim_{x\to0}\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\left[\frac{f(\mathrm{e}^{x^2})-f(1)}{\mathrm{e}^{x^2}-1}\cdot\frac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}-3\frac{f(1+\sin^2 x)-f(1)}{\sin^2 x}\cdot\frac{\sin^2 x}{x^2}\right]\\&=f'(1)-3f'(1)\\&=-2f'(1)\,.\end{aligned}$$

综上，$f'(1)=-1$．

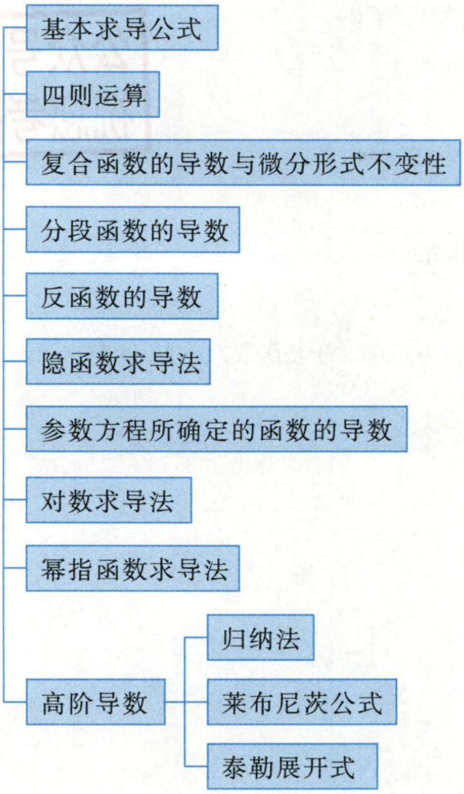
3.9　证明　使用泰勒公式，有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1-2x)+2xf(x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{-2x-\dfrac{1}{2}\cdot4x^2+o(x^2)+2xf(x)}{x^2}=2\lim_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x}-2+0=0,$$

于是极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$，即为$f'(0)$，于是函数$f(x)$在$x=0$处可导，且$f'(0)=1$．

第4讲 一元函数微分学的计算

基础知识结构



- 基本求导公式
- 四则运算
- 复合函数的导数与微分形式不变性
- 分段函数的导数
- 反函数的导数
- 隐函数求导法
- 参数方程所确定的函数的导数
- 对数求导法
- 幂指函数求导法
- 高阶导数
  - 归纳法
  - 莱布尼茨公式
  - 泰勒展开式

基础内容精讲

1. 基本求导公式

以下公式要熟记.

$(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$ (α为常数)，$(a^{x})'=a^{x}\ln a(a>0,\ a\neq1)$, $(\mathrm{e}^{x})'=\mathrm{e}^{x}$, $(\log_{a}x)'=\dfrac{1}{x\ln a}(a>0,\ a\neq1)$,

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$，$(\sin x)'=\cos x$，$(\cos x)'=-\sin x$，$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，$(\tan x)'=\sec^2 x$，$(\cot x)'=-\csc^2 x$，$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$，

$(\operatorname{arccot} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$，$(\sec x)'=\sec x\tan x$，$(\csc x)'=-\csc x\cot x$，

$[\ln(x+\sqrt{x^2+1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$，$[\ln(x+\sqrt{x^2-1})]'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

2. 四则运算

若以下函数均可导，则

和、差的导数（微分）　$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$，$\mathrm{d}[u(x)\pm v(x)]=\mathrm{d}[u(x)]\pm\mathrm{d}[v(x)]$.

积的导数（微分）　$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$，$\mathrm{d}[u(x)v(x)]=u(x)\mathrm{d}[v(x)]+v(x)\mathrm{d}[u(x)]$.

【注】 $[u(x)v(x)w(x)]'=u'(x)v(x)w(x)+u(x)v'(x)w(x)+u(x)v(x)w'(x)$，如果遇到因式超过三个的式子，一般不要直接求导，而要另谋他法 .

商的导数（微分）　$\left[\dfrac{u(x)}{v(x)}\right]'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$，$v(x)\neq 0$，

$$\mathrm{d}\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]=\frac{v(x)\mathrm{d}[u(x)]-u(x)\mathrm{d}[v(x)]}{[v(x)]^2},\ v(x)\neq 0 .$$

例 4.1　设 $f(x)=\prod\limits_{n=1}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4}-n\right)$，则 $f'(1)=$______.

解　应填 $-\dfrac{\pi\cdot 99!}{2}$.

本题的研究对象 $f(x)$ 是多因式相乘，如果直接对其使用导数定义或者先求导再代值，都比较麻烦 . 本题希望考生发现，当把 $x=1$ 代入每个因式后，只有第一项 $\tan\dfrac{\pi}{4}-1=0$，而其余所有项都不等于 0，抓住第一项这个“特立独行”的主要条件，记 $g(x)=\prod\limits_{n=2}^{100}\left(\tan\dfrac{\pi x^n}{4}-n\right)$，于是

$$f(x)=\left(\tan\frac{\pi x}{4}-1\right)\cdot g(x),$$

故

$$f'(1)=\frac{\pi}{4}\sec^2\frac{\pi x}{4}\bigg|_{x=1}\cdot g(1)=-\frac{\pi\cdot 99!}{2} .$$

3. 复合函数的导数与微分形式不变性

设 $u=g(x)$ 在点 x（没有下标是泛指的点，下同）处可导，$y=f(u)$ 在点 $u=g(x)$ 处可导，则

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]g'(x),$$

如果你愿意一层一层一层地剥开"它"的心，你会发现，你会讶异……

$$\mathrm{d}\{f[g(x)]\}=f'[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x=f'[g(x)]\mathrm{d}[g(x)].$$

上式就是微分形式的不变性——无论 u 是中间变量还是自变量，$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u$ 都成立．

【注】 $\{f[g(x)]\}'=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}x}$，而 $f'[g(x)]=\dfrac{\mathrm{d}\{f[g(x)]\}}{\mathrm{d}[g(x)]}$，要看清楚求导符号的位置，不要弄错了．

例 4.2 设 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})(a\neq 0)$，求 $y'|_{x=0}$．

解 因为

$$\begin{aligned}y'&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x+\sqrt{x^2+a^2})'\\&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+a^2}}\cdot(x^2+a^2)'\right]\\&=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+a^2}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}},\end{aligned}$$

所以

$$y'|_{x=0}=\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\bigg|_{x=0}=\frac{1}{|a|}(a\neq 0).$$

例 4.3 设函数 $f(x)=\begin{cases}\ln\sqrt{x}, & x\geqslant 1,\\ 2x-1, & x<1,\end{cases}$ 且 $y=f[f(x)]$，则 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=$______．

解 应填 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

因为 $$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=f'[f(x)]f'(x)|_{x=\mathrm{e}}=f'[f(\mathrm{e})]f'(\mathrm{e}),$$

其中

$$f(\mathrm{e})=\ln\sqrt{x}\big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{2},\ f'[f(\mathrm{e})]=f'\left(\frac{1}{2}\right)=(2x-1)'\Big|_{x=\frac{1}{2}}=2,\ f'(\mathrm{e})=(\ln\sqrt{x})'\big|_{x=\mathrm{e}}=\frac{1}{2\mathrm{e}},$$

所以

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=\mathrm{e}}=2\cdot\frac{1}{2\mathrm{e}}=\frac{1}{\mathrm{e}}.$$

例 4.4 设 $y=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}$，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$．

解 由一阶微分形式的不变性，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}[\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}]&=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\mathrm{d}[\sin(\ln x)]\\&=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)\\&=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

$$\to \mathrm{d}(\mathrm{e}^u)=(\mathrm{e}^u)'\mathrm{d}u=\mathrm{e}^u\mathrm{d}u$$

$$\to \mathrm{d}(\sin v)=(\sin v)'\mathrm{d}v=\cos v\mathrm{d}v$$

所以

$$\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\mathrm{e}^{\sin(\ln x)}\cos(\ln x)\frac{1}{x}\ .$$

4. 分段函数的导数

设$f(x)=\begin{cases}f_1(x), & x\geqslant x_0,\\ f_2(x), & x<x_0,\end{cases}$其中$f_1(x)$，$f_2(x)$分别在$x>x_0$，$x<x_0$时可导，则

①**在分段点x_0处用导数定义求导**：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f_1(x)-f(x_0)}{x-x_0}$，$f'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f_2(x)-f(x_0)}{x-x_0}$．根据$f'_+(x_0)$是否等于$f'_-(x_0)$来判定$f'(x_0)$；

②**在非分段点用导数公式求导**，即$x>x_0$时，$f'(x)=f'_1(x)$；$x<x_0$时，$f'(x)=f'_2(x)$．

例 4.5　设$y=\ln|x|$，$x\neq 0$，求y'．

解

$$y=\ln|x|=\begin{cases}\ln x, & x>0,\\ \ln(-x), & x<0.\end{cases}$$

当$x>0$时，

$$y'=(\ln x)'=\frac{1}{x};$$

当$x<0$时，

$$y'=[\ln(-x)]'=\frac{1}{-x}\cdot(-x)'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}\ .$$

因此

$$y'=(\ln|x|)'=\frac{1}{x}(x\neq 0)\ .$$

【注】 $\ln|x|$求导时，可视“绝对值符号”而不见．

例 4.6　设函数$y=|x\mathrm{e}^{-x}|$，求y''．

解　y的表达式含有绝对值符号，可知其为分段函数，$x=0$为其分段点，则

$$y=|x\mathrm{e}^{-x}|=\begin{cases}-x\mathrm{e}^{-x}, & x<0,\\ x\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 0,\end{cases}$$

所以
$$y'=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}(x-1), & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}(1-x), & x>0.\end{cases}$$

而
$$y'_{-}(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{-x\mathrm{e}^{-x}}{x}=-1\,,$$
$$y'_{+}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{y(x)-y(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x}=1\,,$$

可知y在$x=0$处不可导．所以
$$y''=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}(2-x), & x<0,\\ \mathrm{e}^{-x}(x-2), & x>0.\end{cases}$$

5. 反函数的导数

设$y=f(x)$为单调、可导函数，且$f'(x)\neq0$，则存在反函数$x=\varphi(y)$，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}$，即$\varphi'(y)=\dfrac{1}{f'(x)}$．

【注】(1) 设$y=\arcsin x$，$-1<x<1$．

由$y=\arcsin x$，得反函数$x=\sin y$，$y\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$．根据反函数求导公式，得
$$(\arcsin x)'=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,(-1<x<1)\,.$$

(2) 反函数的二阶导数. $\longrightarrow$ 重要

在$y=f(x)$单调，且二阶可导的情况下，若$f'(x)\neq0$，则存在反函数$x=\varphi(y)$，记$f'(x)=y'_x$，$\varphi'(y)=x'_y$，则有
$$y'_x=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{x'_y}\,,$$
$$y''_{xx}=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{x'_y}\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{1}{(x'_y)^2}\cdot(x'_y)'_y\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^2}\cdot\frac{1}{x'_y}=-\frac{x''_{yy}}{(x'_y)^3}\,.$$

反过来，则有
$$x'_y=\frac{1}{y'_x}\,,\;x''_{yy}=-\frac{y''_{xx}}{(y'_x)^3}\,.$$

例 4.7 当$x>0$时，设$y=f(x)=3x^2+\mathrm{e}^x$有反函数$x=\varphi(y)$，则$\varphi''(3+\mathrm{e})=$______.

解 应填$-\dfrac{1}{(6+\mathrm{e})^2}$．

当$f(x)=3x^2+\mathrm{e}^x=3+\mathrm{e}$时，有$x=1$，于是

$$\varphi''(y)\Big|_{y=3+\mathrm{e}}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}\Bigg|_{x=1}=-\frac{6+\mathrm{e}^x}{(6x+\mathrm{e}^x)^3}\Bigg|_{x=1}=-\frac{1}{(6+\mathrm{e})^2}.$$

6. 隐函数求导法

设函数$y=y(x)$是由方程$F(x,y)=0$确定的可导函数，则

①方程$F(x,y)=0$两边对自变量x求导，注意$y=y(x)$，即将y看作中间变量，得到一个关于y'的方程；

②解该方程便可求出y'.

例 4.8 设函数$y=y(x)$由方程$y^3+xy^2+x^2y+6=0$确定，且$y'(1)=0$，求$y''(1)$的值.

解 在$y^3+xy^2+x^2y+6=0$两边关于x求导，得

$$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0,$$

由$y'(1)=0$，得$y^2(1)+2\cdot1\cdot y(1)=0$，解得$y(1)=-2$或$y(1)=0$（不适合方程，舍去）.

在$3y^2y'+y^2+2xyy'+2xy+x^2y'=0$两边关于$x$求导，得

$$(3y^2+2xy+x^2)y''+2(3y+x)(y')^2+4(y+x)y'+2y=0,$$

代入$x=1$, $y(1)=-2$与$y'(1)=0$，解得$y''(1)=\frac{4}{9}$.

7. 参数方程所确定的函数的导数

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$确定，其中$t$是参数，且$\varphi(t),\psi(t)$均可导，$\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

【注】由参数方程确定的函数的二阶导数.

设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t)\end{cases}$确定，其中$t$是参数，且$\varphi(t),\psi(t)$均二阶可导，$\varphi'(t)\neq0$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)},\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\Big/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

例 4.9 设$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=\sin t,\\y=t\sin t+\cos t\end{cases}$确定，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=$______.

解 应填$\sqrt{2}$.

因为
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=t,$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{\cos t},$$

所以
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}.$$

例 4.10 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases}x=\arctan t,\\ 2y-ty^2+\mathrm{e}^t=5\end{cases}$ 所确定，则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

解 应填 $\frac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}$.
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{1+t^2},$$

由 $2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}-y^2-2ty\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\mathrm{e}^t=0$，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\frac{y^2-\mathrm{e}^t}{2(1-ty)}$，因而
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{(y^2-\mathrm{e}^t)(1+t^2)}{2(1-ty)}.$$

8. 对数求导法

对于多项相乘、相除、开方、乘方的式子，一般先取对数再求导．设 $y=f(x)(f(x)>0)$，则

①等式两边取对数，得 $\ln y=\ln f(x)$；

②两边对自变量 x 求导（同样注意 $y=f(x)$，即将 y 看作中间变量），得
$$\frac{1}{y}y'=[\ln f(x)]'\Rightarrow y'=\frac{yf'(x)}{f(x)}.$$

例 4.11 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 2$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

解 应填 $-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

方程 $x\mathrm{e}^{f(y)}=\mathrm{e}^y\ln 2$ 两端取对数，得 $\ln x+f(y)=y+\ln(\ln 2)$．两端关于 x 求导，得 $\frac{1}{x}+f'(y)\cdot y'=y'$，两端继续关于 x 求导，得 $-\frac{1}{x^2}+f''(y)\cdot(y')^2+f'(y)\cdot y''=y''$，由此可得
$$y''=-\frac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}.$$

9. 幂指函数求导法

对于$u(x)^{v(x)}(u(x)>0$，且$u(x)\neq 1)$，除了用上面的对数求导法外，还可以先化成指数函数

$$u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)},$$

然后求导，得

$$\left[u(x)^{v(x)}\right]'=\left[\mathrm{e}^{v(x)\ln u(x)}\right]'=u(x)^{v(x)}\left[v'(x)\ln u(x)+v(x)\cdot\frac{u'(x)}{u(x)}\right].$$

例 4.12　求函数$y=x^x(x>0)$的导数．

解

$$\begin{aligned}y'&=(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'\\&=\mathrm{e}^{x\ln x}(x\ln x)'\\&=x^x(1+\ln x)(x>0).\end{aligned}$$

例 4.13　求函数$y=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$的导数．

解

$$\begin{aligned}y'&=\left(x^{\frac{1}{x}}\right)'=\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\right)'\\&=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}\ln x}\left(-\frac{1}{x^2}\cdot\ln x+\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\right)\\&=x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x)(x>0).\end{aligned}$$

10. 高阶导数

求高阶导数主要有三种方法．

(1) 归纳法．

逐次求导，探索规律，得出通式．

例 4.14　求$y=\sin x$的n阶导数．

解

$$y'=(\sin x)'=\cos x,$$

$$y''=(\cos x)'=-\sin x,$$

$$y'''=(-\sin x)'=-\cos x,$$

……

但这样算下去，很难找到规律．想到$\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$，则有

$$y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

于是

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

即

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ n=1,\ 2,\ \cdots .$$

【注】常用高阶导数（n 为正整数）：

$$(\mathrm{e}^{ax+b})^{(n)}=a^n\mathrm{e}^{ax+b};$$

$$[\sin(ax+b)]^{(n)}=a^n\sin\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$[\cos(ax+b)]^{(n)}=a^n\cos\left(ax+b+\frac{n\pi}{2}\right);$$

$$[\ln(ax+b)]^{(n)}=(-1)^{n-1}a^n\frac{(n-1)!}{(ax+b)^n};$$

$$\left(\frac{1}{ax+b}\right)^{(n)}=(-1)^na^n\frac{n!}{(ax+b)^{n+1}}.$$

读者若能记住这些式子，那是最好 . 若记不住，学会推导的方式，在考试中快速计算出来，也是可以的 .

例 4.15 设 $y=\frac{1-x}{1+x}$，则 $y^{(n)}(0)=$（　　）.

(A) $(-1)^n2\cdot n!$　　(B) $-2^n\cdot n!$　　(C) $2^n\cdot(n-1)!$　　(D) $-2^n\cdot(n-1)!$

解 应选 (A).

本题考核的知识点是高阶导数运算 . 求高阶导数的关键在于将 y，y'，y'' 恒等变形，简化运算以寻找规律 .

由于
$$y=\frac{1-x}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}=2(1+x)^{-1}-1,$$

套公式，得
$$y^{(n)}=(-1)^n2\cdot n!(1+x)^{-(n+1)},$$

因此
$$y^{(n)}(0)=(-1)^n2\cdot n!\ .$$

故选 (A).

例 4.16 已知函数 $f(x)$ 具有任意阶导数，且 $f'(x)=[f(x)]^2$，其中 n 为正整数，则 $f^{(n)}(x)=$ ______.

解 应填$n![f(x)]^{n+1}$.

$f'(x)=[f(x)]^2$两边同时对x求导，得

$$f''(x)=2f(x)f'(x)=2[f(x)]^3,$$

$$f'''(x)=2\cdot3[f(x)]^2\cdot f'(x)=2\cdot3[f(x)]^4,$$

$$f^{(4)}(x)=2\cdot3\cdot4[f(x)]^3\cdot f'(x)=2\cdot3\cdot4[f(x)]^5,$$

于是得到 $$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}.$$

【**注**】可用数学归纳法严格证明，但考试中不必给出．

设$n=k$时，有$f^{(k)}(x)=k![f(x)]^{k+1}$，则$n=k+1$时，将上式两边再对$x$求导，有

$$f^{(k+1)}(x)=(k+1)\cdot k![f(x)]^k f'(x)=(k+1)![f(x)]^{k+2},$$

故对正整数n，有$f^{(n)}(x)=n![f(x)]^{n+1}$.

(2) 莱布尼茨公式．

设$u=u(x)$, $v=v(x)$均n阶可导，则

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)},$$

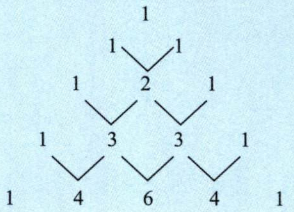
$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+\mathrm{C}_n^1u^{(n-1)}v'+\mathrm{C}_n^2u^{(n-2)}v''+\cdots+\mathrm{C}_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+uv^{(n)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^ku^{(n-k)}v^{(k)}. \qquad (*)$$

(*) 式就是求函数乘积的高阶导数的**莱布尼茨公式**，其中$u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

【**注**】(1) 见到求两个函数乘积的高阶导数，一般用莱布尼茨公式即可，有时要结合“(1) 归纳法”中的通式；当一个函数求高阶导数较困难时，若能转化成两个函数的乘积形式，亦可用莱布尼茨公式．

(2) 若n不太大，其系数C_n^0, C_n^1, C_n^2, $\cdots$, C_n^{n-1}, C_n^n的记忆方法可按下述“三角形”：



例 4.17 设$f(x)=x\mathrm{e}^x$，则$f^{(n)}(x)=$______.

解 应填$(n+x)\mathrm{e}^x$.

$$f^{(n)}(x)=(x\mathrm{e}^x)^{(n)}=(\mathrm{e}^x)^{(n)}x+\mathrm{C}_n^1(\mathrm{e}^x)^{(n-1)}\cdot1$$

$$=x\mathrm{e}^x+n\mathrm{e}^x=(n+x)\mathrm{e}^x\ .$$

(3) 泰勒展开式 .

①任何一个无穷阶可导的函数都可写成

抽象展开

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n\ ,$$

或者

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n\ .$$

具体展开

②题目给出一个具体的无穷阶可导函数$y=f(x)$，可以通过已知公式展开成幂级数 . 这些已知公式为

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ .$$

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,\ -1<x<1\ .$$

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,\ -1<x<1\ .$$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,\ -1<x\leqslant 1\ .$$

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ .$$

$$\cos x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty\ .$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ \begin{cases}x\in(-1,1), & \alpha\leqslant -1,\\ x\in(-1,1], & -1<\alpha<0,\\ x\in[-1,1], & \alpha>0,\ \alpha\notin\mathbf{N}_+,\\ x\in\mathbf{R}, & \alpha\in\mathbf{N}_+.\end{cases}$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\cdots\ .$$

$$\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\cdots\ .$$

$$\arctan x=x-\frac{1}{3}x^3+\cdots\ .$$

由唯一性，比较系数

③函数泰勒展开式的唯一性：无论$f(x)$由何种方法展开，其泰勒展开式具有唯一性 . 于是我们可以通过比较①，②中公式的系数，获得$f^{(n)}(x_0)$或者$f^{(n)}(0)$.

例 4.18　设$f(x)=x^2\ln(1-x)$，则当$n\geqslant 3$时，$f^{(n)}(0)=(\qquad)$.

(A) $-\dfrac{n!}{n-2}$　　(B) $\dfrac{n!}{n-2}$　　(C) $-\dfrac{(n-2)!}{n}$　　(D) $\dfrac{(n-2)!}{n}$

解 应选 (A).

利用泰勒公式展开，有

$$f(x)=x^2\ln(1-x)=x^2\cdot\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}\cdot\frac{(-1)^m x^m}{m}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m+2}}{m}=-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^{m+3}}{m+1}.$$

由于$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，根据函数展开式的唯一性，比较系数，有$n=m+3$，所以

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=-\frac{1}{m+1},$$

即$f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$.

【注】
$$f(x)=x^2\ln(1-x)=x^2\left(-x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^{n-2}}{n-2}-\cdots\right).$$

又$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$，根据展开式的唯一性，对比$x^n$的系数，得$-\dfrac{1}{n-2}=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$，故$f^{(n)}(0)=-\dfrac{n!}{n-2}$.

例 4.19 设$f(x)=x^2 2^x$，则当$n\geqslant1$时，$f^{(n)}(0)=$______.

解 应填$n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

方法一 利用泰勒公式展开，有

$$f(x)=x^2 2^x=x^2\mathrm{e}^{x\ln 2}=x^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x\ln 2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\ln 2)^n}{n!}x^{n+2}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}x^n,$$

又$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$，由泰勒展开式的唯一性，得$\dfrac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$. 又$f'(0)=0$，故

$$f^{(n)}(0)=\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}n!=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots).$$

方法二 利用莱布尼茨高阶求导公式，有

$$\begin{aligned}f^{(n)}(x)&=\mathrm{C}_n^0x^2(2^x)^{(n)}+\mathrm{C}_n^1\cdot2x\cdot(2^x)^{(n-1)}+\mathrm{C}_n^2\cdot2\cdot(2^x)^{(n-2)}\\&=x^2\cdot2^x\cdot(\ln 2)^n+n\cdot2x\cdot2^x\cdot(\ln 2)^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot2\cdot2^x\cdot(\ln 2)^{n-2},\end{aligned}$$

当$x=0$时，$f^{(n)}(0)=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}(n=1,2,3,\cdots)$.

【注】 在方法一中，事实上，由于$f(0)=0$，$f'(0)=0$，故

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

与$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(\ln 2)^{n-2}}{(n-2)!}x^n$完全对应．

基础习题精练

习题

4.1 设$y=f(\ln^2 x)\mathrm{e}^{f^2(x)}$，其中$f$可微，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=$______.

4.2 设$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}$，则$f'(x)=$______.

4.3 已知$f'(x)=A\mathrm{e}^x$（A为正常数），则$f(x)$的反函数的二阶导数为______.

4.4 设函数$y=y(x)$由$\begin{cases}x=\ln(1+t^2)+1,\\ y=2\arctan t-(t+1)^2\end{cases}$确定，则$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

4.5 设函数$f(x)$在$x=2$的某邻域内具有任意阶导数，且$f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$，$f(2)=1$，则当$n\geqslant 1$时，$f^{(n)}(2)=$______.

4.6 设$y=\sin^4 x+\cos^4 x$，则当$n\geqslant 1$时，$y^{(n)}(x)=$______.

4.7 设$y=y(x)$是由方程$\sin(xy)=\ln\frac{x+\mathrm{e}}{y}+1$确定的隐函数，求$y'(0)$的值．

4.8 已知$g(x)$在$x=0$处二阶可导，且$g(0)=g'(0)=0$，设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

证明：$f(x)$的导函数在$x=0$处连续．

解答

4.1 $2\mathrm{e}^{f^2(x)}\left[\frac{\ln x}{x}\cdot f'(\ln^2 x)+f(\ln^2 x)\cdot f(x)\cdot f'(x)\right]$

解
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=[f(\ln^2 x)]'\cdot \mathrm{e}^{f^2(x)}+f(\ln^2 x)\cdot[\mathrm{e}^{f^2(x)}]'$$
$$=f'(\ln^2 x)\cdot 2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot \mathrm{e}^{f^2(x)}+f(\ln^2 x)\cdot \mathrm{e}^{f^2(x)}\cdot 2f(x)\cdot f'(x)$$
$$=2\mathrm{e}^{f^2(x)}\left[\frac{\ln x}{x}\cdot f'(\ln^2 x)+f(\ln^2 x)\cdot f(x)\cdot f'(x)\right].$$

4.2　$(1+2x)\mathrm{e}^{2x}$　**解**　$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}x(1-2t)^{-\frac{x}{t}}=x\lim\limits_{t\to 0}\left[(1-2t)^{-\frac{1}{2t}}\right]^{2x}=x\mathrm{e}^{2x}$，因此

$$f'(x)=(x\mathrm{e}^{2x})'=\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^{2x}\cdot 2=(1+2x)\mathrm{e}^{2x}.$$

4.3　$-\dfrac{1}{A^2\mathrm{e}^{2x}}$　**解**　设 $y=f(x)$，则

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}=\frac{1}{f'(x)},$$
$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}=\frac{\mathrm{d}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}\left[\frac{1}{f'(x)}\right]}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}\cdot\frac{1}{f'(x)}$$
$$=-\frac{f''(x)}{[f'(x)]^3}=-\frac{A\mathrm{e}^x}{(A\mathrm{e}^x)^3}=-\frac{1}{A^2\mathrm{e}^{2x}}.$$

4.4　$-\dfrac{(1+2t)(1+t^2)}{2t}$　**解**　$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\dfrac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^3}$

$$=\frac{\frac{2t}{1+t^2}\cdot\left[-\frac{4t}{(1+t^2)^2}-2\right]-\frac{2-2t^2}{(1+t^2)^2}\cdot\left[\frac{2}{1+t^2}-2(t+1)\right]}{\frac{8t^3}{(1+t^2)^3}}$$
$$=-\frac{(1+2t)(1+t^2)}{2t},$$

或
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{\frac{2}{1+t^2}-2(t+1)}{\frac{2t}{1+t^2}}=-(t^2+t+1),$$
$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(t^2+t+1)]\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[-(t^2+t+1)]}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=-\frac{(1+2t)(1+t^2)}{2t}.$$

4.5　$(n-1)!\mathrm{e}^n$　**解**　对 $f'(x)=\mathrm{e}^{f(x)}$ 两边关于 x 求导，得

$$f''(x)=\mathrm{e}^{f(x)}\cdot f'(x)=\mathrm{e}^{2f(x)},$$

两边再对x求导，得

$$f'''(x)=\mathrm{e}^{2f(x)}\cdot 2f'(x)=2!\mathrm{e}^{3f(x)},$$

两边再对x求导，得

$$f^{(4)}(x)=2\mathrm{e}^{3f(x)}\cdot 3f'(x)=3!\mathrm{e}^{4f(x)},$$

由以上导数规律可得

$$f^{(n)}(x)=(n-1)!\mathrm{e}^{nf(x)},$$

所以$f^{(n)}(2)=(n-1)!\mathrm{e}^{n}$.

4.6 $4^{n-1}\cos\left(4x+\dfrac{n\pi}{2}\right)$ **解** 对原式化简，得

$$y=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-2\sin^2 x\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x,$$

则当$n\geqslant 1$时，

$$y^{(n)}(x)=\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}=\left(\frac{3}{4}\right)^{(n)}+\left(\frac{1}{4}\cos 4x\right)^{(n)}$$

$$=\frac{1}{4}(\cos 4x)^{(n)}=4^{n-1}\cos\left(4x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

4.7 **解** 在方程中令$x=0$可得$0=\ln\dfrac{\mathrm{e}}{y(0)}+1$，故$y(0)=\mathrm{e}^2$.将方程两边对x求导，得

$$\cos(xy)(y+xy')=\frac{1}{x+\mathrm{e}}-\frac{y'}{y}.$$

将$x=0$，$y(0)=\mathrm{e}^2$代入，有$\mathrm{e}^2=\dfrac{1}{\mathrm{e}}-\dfrac{y'(0)}{\mathrm{e}^2}$，即$y'(0)=\mathrm{e}-\mathrm{e}^4$.

4.8 **证明** 根据导数定义，有

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{g(x)}{x}-0}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)-g'(0)}{x-0}=\frac{1}{2}g''(0).$$

当$x\neq 0$时，$f'(x)=\dfrac{xg'(x)-g(x)}{x^2}$，则

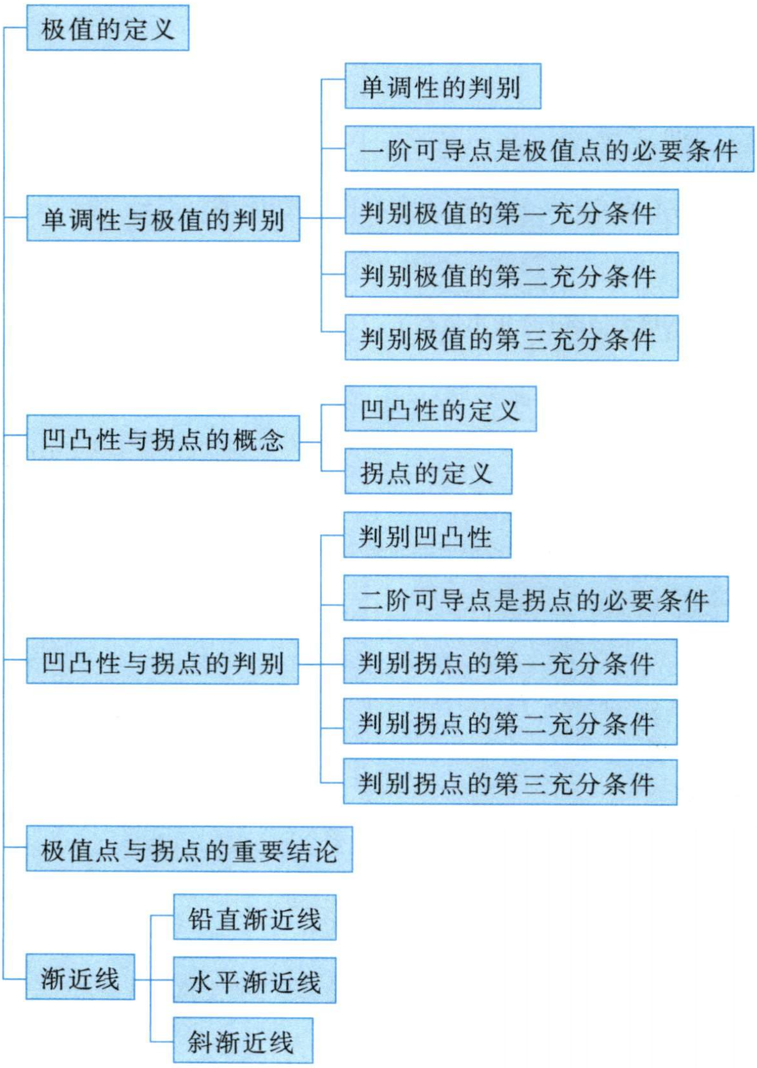
$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xg'(x)-g(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{x^2}$$

$$=g''(0)-\frac{1}{2}g''(0)=\frac{1}{2}g''(0)=f'(0),$$

所以$f(x)$的导函数在$x=0$处连续 .

第5讲 一元函数微分学的应用（一）——几何应用

基础知识结构



- 极值的定义
- 单调性与极值的判别
  - 单调性的判别
  - 一阶可导点是极值点的必要条件
  - 判别极值的第一充分条件
  - 判别极值的第二充分条件
  - 判别极值的第三充分条件
- 凹凸性与拐点的概念
  - 凹凸性的定义
  - 拐点的定义
- 凹凸性与拐点的判别
  - 判别凹凸性
  - 二阶可导点是拐点的必要条件
  - 判别拐点的第一充分条件
  - 判别拐点的第二充分条件
  - 判别拐点的第三充分条件
- 极值点与拐点的重要结论
- 渐近线
  - 铅直渐近线
  - 水平渐近线
  - 斜渐近线

- 最值或取值范围
  - 最值的定义
  - 求闭区间上连续函数的最大值和最小值
  - 求开区间内连续函数的最值或取值范围
- 作函数图像
- 曲率及曲率半径（仅数学一、数学二）

基础内容精讲

一、极值的定义

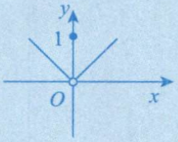
对于函数$f(x)$，若存在点x_0的某个邻域，使得在该邻域内任意一点x，均有

$$f(x)\leqslant f(x_0)(\text{或 } f(x)\geqslant f(x_0))$$

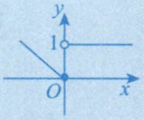
成立，则称点x_0为$f(x)$的**极大值点**(或**极小值点**)，$f(x_0)$为$f(x)$的**极大值**(或**极小值**).

【注】结合第 1 讲的知识，一个常见的问题是：间断点可以是极值点吗？答案是肯定的．举四个例子供考生分析．

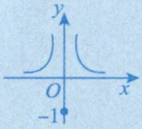
(1) $f(x)=\begin{cases}1, & x=0,\\ |x|, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的可去间断点，但它是$f(x)$的极大值点．



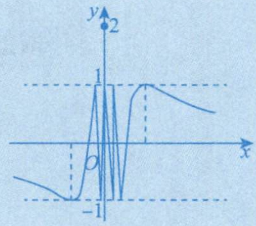
(2) $f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -x, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的跳跃间断点，但它是$f(x)$的极小值点．



(3) $f(x)=\begin{cases}-1, & x=0,\\ \dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的无穷间断点，但它是$f(x)$的极小值点．



(4) $f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ \sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\end{cases}$ $x=0$是$f(x)$的振荡间断点，但它是$f(x)$的极大值点．



二、单调性与极值的判别

1. 单调性的判别

设函数$y=f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导．

①如果在(a,b)内$f'(x)\geqslant 0$，且等号仅在有限个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加；

②如果在(a,b)内$f'(x)\leqslant 0$，且等号仅在有限个点处成立，那么函数$y=f(x)$在$[a,b]$上严格单调减少．

【注】例如，函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上连续且可导，且导函数$y'=3x^2\geqslant 0$，等号仅在$x=0$处成立，则函数$y=x^3$在$(-\infty,+\infty)$上严格单调增加．

2. 一阶可导点是极值点的必要条件

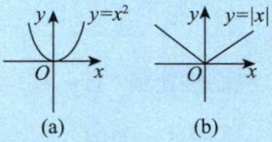
设$f(x)$在$x=x_0$处可导，且在点x_0处取得极值，则必有$f'(x_0)=0$．

【注】事实上，若$x=x_0$为曲线$y=f(x)$的极值点，则只有以下两种情况：

驻点与不可导点

(1) $f'(x_0)=0$，如$y=x^2$在$(0,0)$处的情形，如图5-1(a)所示．

(2) $f'(x_0)$不存在，如$y=|x|$在$(0,0)$处的情形，如图5-1(b)所示．



(a)　　(b)

图5-1

3. 判别极值的第一充分条件

设$f(x)$在$x=x_0$处连续，且在x_0的某去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)(\delta>0)$内可导．

①若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)<0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)>0$，则$f(x)$在$x=x_0$处取得极小值；

②若$x\in(x_0-\delta,x_0)$时，$f'(x)>0$，而$x\in(x_0,x_0+\delta)$时，$f'(x)<0$，则$f(x)$在$x=x_0$处取得极大值；

③若$f'(x)$在$(x_0-\delta,x_0)$和$(x_0,x_0+\delta)$内不变号，则点x_0不是极值点．

4. 判别极值的第二充分条件

设$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导，且$f'(x_0)=0$，$f''(x_0)\neq 0$．

①若$f''(x_0)<0$，则$f(x)$在x_0处取得极大值；

②若$f''(x_0)>0$，则$f(x)$在x_0处取得极小值．

上述第二充分条件可以推广为第三充分条件．

5. 判别极值的第三充分条件

设$f(x)$在$x=x_0$处n阶可导，且$f^{(m)}(x_0)=0(m=1,2,\cdots,n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 2)$，则

①当n为偶数且$f^{(n)}(x_0)<0$时，$f(x)$在x_0处取得极大值；

②当n为偶数且$f^{(n)}(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0处取得极小值．

【注】上述第三充分条件的证明如下：由于n为偶数，因此令$n=2k$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{2k(x-x_0)^{2k-1}}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\cdots\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k-1)}(x)-f^{(2k-1)}(x_0)}{(2k)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)\neq 0\ .$$

上述洛必达法则成立的依据是，最后的结果$\frac{1}{(2k)!}f^{(2k)}(x_0)$是存在的．

当$f^{(2k)}(x_0)<0$时，由函数极限的局部保号性知，存在x_0的某去心邻域，对于该邻域内的任意x，有$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}<0$，即$f(x)<f(x_0)$，故$x_0$为极大值点；

当$f^{(2k)}(x_0)>0$时，由函数极限的局部保号性知，存在x_0的某去心邻域，对于该邻域内的任意x，有$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{2k}}>0$，即$f(x)>f(x_0)$，故$x_0$为极小值点．

例 5.1 设函数$f(x)$可导，且$f(x)f'(x)>0$，则（　　）．

(A) $f(1)>f(-1)$　(B) $f(1)<f(-1)$　(C) $|f(1)|>|f(-1)|$　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$

解 应选 (C).

由$f(x)f'(x)>0$知

$$\left[\frac{1}{2}f^2(x)\right]'=f(x)f'(x)>0,$$

则$\frac{1}{2}f^2(x)$单调增加，从而$f^2(x)$单调增加，由此可知$f^2(1)>f^2(-1)$，两端开方得$|f(1)|>|f(-1)|$．故排除 (D)，选 (C).

取$f(x)=-\mathrm{e}^x$，$f(x)f'(x)>0$，有$f(1)<f(-1)$；取$f(x)=\mathrm{e}^x$，$f(x)f'(x)>0$，有$f(1)>f(-1)$．故排除 (A)，(B).

例 5.2 设函数$f(x)$二阶可导，且在$x=x_0$处取极大值，则有（　　）．

(A) $f''(x_0)<0$　(B) $f''(x_0)\leqslant 0$　(C) $f''(x_0)>0$　(D) $f''(x_0)\geqslant 0$

解 应选 (B).

因$f(x)$二阶可导，且$f(x)$在$x=x_0$处取得极值，故$f'(x_0)=0$．根据判别极值的第二充分条件，当$f''(x_0)>0$时，$f(x)$在x_0处取得极小值，与已知矛盾．取$f(x)=-x^4$，可知$f(x)$在$x=0$处取极大值，此时$f''(0)=0$，因此$f''(x_0)$可取 0，故$f''(x_0)\leqslant 0$．故选 (B).

【注】 $f''(x_0)<0$（在 $f'(x_0)=0$ 条件下）是 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值的充分不必要条件．

例 5.3 设函数 $y=y(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值．

解 由例 4.8 知 $x=1$ 是函数 $y(x)$ 的极小值点，极小值为 $y(1)=-2$ ．

例 5.4 设 $f(x)=xe^x$，求 $f^{(n)}(x)$ 的极值点和极值．

解 由例 4.17 知

$$f^{(n)}(x)=(n+x)e^x,\ f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x,\ f^{(n+2)}(x)=(n+2+x)e^x .$$

令 $f^{(n+1)}(x)=(n+1+x)e^x=0$，得函数 $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$ 的驻点 $x=-(n+1)$．又

$$f^{(n+2)}[-(n+1)]=e^{-n-1}>0,$$

所以 $x=-(n+1)$ 是函数 $f^{(n)}(x)=(n+x)e^x$ 的极小值点，极小值为

$$f^{(n)}[-(n+1)]=-e^{-(n+1)} .$$

三、凹凸性与拐点的概念

1. 凹凸性的定义

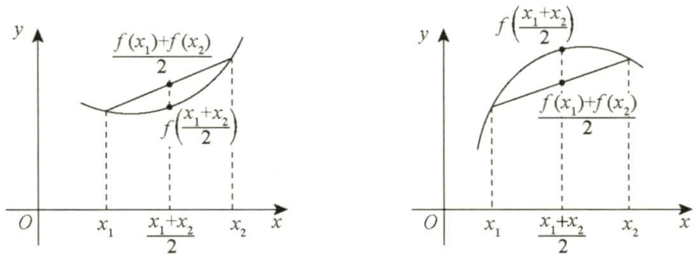
定义 1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续．如果对 I 上任意不同两点 x_1，x_2，恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的**图形是凹的**（**或凹弧**），如图 5-2(a) 所示；如果恒有

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

则称 $y=f(x)$ 在 I 上的**图形是凸的**（**或凸弧**），如图 5-2(b) 所示．



图形上任意弧段位于弦的下方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}>f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(a)

图形上任意弧段位于弦的上方

$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}<f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$

(b)

图 5-2

【注】 事实上，当图形为$\underset{(凸)}{\text{凹}}$时，可以将$f\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)\underset{(>)}{<}\frac{1}{2}f(x_1)+\frac{1}{2}f(x_2)$更一般地写为

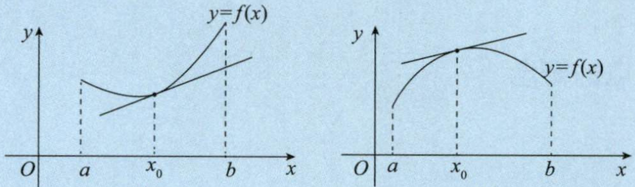
$$f(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)\underset{(>)}{<}\lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)，其中 0<\lambda_1<1, 0<\lambda_2<1, \lambda_1+\lambda_2=1 .$$

定义 2 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，若对(a, b)内的任意x及$x_0(x\neq x_0)$，均有

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)\underset{(>)}{<}f(x), \tag{*}$$

则称$f(x)$在$[a, b]$的图形上是$\underset{(凸)}{\text{凹}}$的.

【注】（**几何意义**）$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$是曲线$y=f(x)$在点$(x_0, f(x_0))$处的切线方程，因此 **(*)** 式的几何意义如图 5-3 所示. 若曲线$y=f(x)(a<x<b)$在任意点处的切线（除该点外）总在曲线的下方（上方），则该曲线是凹（凸）的.



(a) (b)

图 5-3

2. 拐点的定义

连续曲线的凹弧与凸弧的分界点称为该曲线的**拐点**.

①拐点处只需连续.
②判别拐点时凹凸不分先后.
③拐点在曲线上，写$(x_0, f(x_0))$.

四、凹凸性与拐点的判别

1. 判别凹凸性

设函数$f(x)$在I上二阶可导.

①若在I上$f''(x)>0$，则$f(x)$在I上的**图形是凹的**;

②若在I上$f''(x)<0$，则$f(x)$在I上的**图形是凸的**.

2. 二阶可导点是拐点的必要条件

设$f''(x_0)$存在，且点$(x_0, f(x_0))$为曲线的拐点，则$f''(x_0)=0$.

【注】 事实上，若点$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点，则只有以下两种情况:

(1) $f''(x_0)=0$，如$y=x^3$在$(0, 0)$处的情形，如图 5-4(a) 所示.

(2) $f''(x_0)$不存在，如$y=\sqrt[3]{x}$在(0, 0)处的情形，如图 5-4(b) 所示．

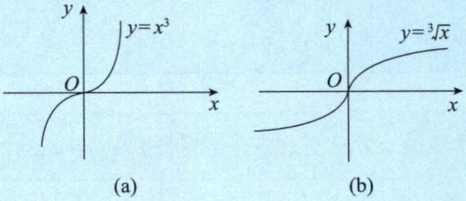


图 5-4

3. 判别拐点的第一充分条件

设$f(x)$在点$x=x_0$处连续，在点$x=x_0$的某去心邻域$\mathring{U}(x_0, \delta)$内二阶导数存在，且在该点的左、右邻域内$f''(x)$变号（无论是由正变负，还是由负变正），则点$(x_0, f(x_0))$为曲线的**拐点**．

【注】$(x_0, f(x_0))$为曲线$y=f(x)$的拐点，并不要求$f(x)$在点x_0的导数存在，如$y=\sqrt[3]{x}$在$x=0$的情形，如图 5-5 所示，其中$y'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$，$y''=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$，当$x>0$时，$y''<0$；当$x<0$时，$y''>0$，故点(0, 0)为曲线$y=\sqrt[3]{x}$的拐点，但在该点的导数不存在．

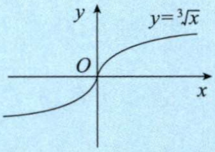


图 5-5

4. 判别拐点的第二充分条件

设$f(x)$在$x=x_0$的某邻域内三阶可导，且$f''(x_0)=0$，$f'''(x_0)\neq 0$，则点$(x_0, f(x_0))$为曲线的**拐点**．

5. 判别拐点的第三充分条件

设$f(x)$在x_0处n阶可导，且$f^{(m)}(x_0)=0(m=2, \cdots, n-1)$，$f^{(n)}(x_0)\neq 0(n\geqslant 3)$，则当$n$为奇数时，点$(x_0, f(x_0))$为曲线的拐点．

【注 1】上述第三充分条件的证明如下：由于n为奇数，因此令$n=2k+1$，构造极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\cdots\overset{\text{洛必达法则}}{=\!=\!=}\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k-1)!(x-x_0)}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{f^{(2k)}(x)-f^{(2k)}(x_0)}{(2k-1)!(x-x_0)}=\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0\ .$$

上述洛必达法则成立的依据是，最后的结果$\frac{1}{(2k-1)!}f^{(2k+1)}(x_0)$是存在的．

不妨设$f^{(2k+1)}(x_0)>0$，由函数极限的局部保号性知，存在x_0的某去心邻域，对于该邻域内的任意x，有

$$\frac{f''(x)}{(x-x_0)^{2k-1}}>0,$$

当 $x\to x_0^+$ 时，$f''(x)>0$；当 $x\to x_0^-$ 时，$f''(x)<0$，故点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线的拐点．

【注 2】 由上述证明过程可知，第三充分条件不需要 $f'(x_0)=0$ 这个条件．

例 5.5 设函数 $f(x)$ 满足关系式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=\sin x$，且 $f'(0)=0$，则（　　）．

(A) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极大值

(B) $f(0)$ 是 $f(x)$ 的极小值

(C) 点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

(D) $f(0)$ 不是 $f(x)$ 的极值，点 $(0, f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点

解 应选 (C).

在等式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=\sin x$ 中，令 $x=0$，得 $f''(0)=0$．

在等式 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^2=\sin x$ 两端对 x 求导，得

$f''(x)=-[f'(x)]^2+\sin x$，$f'(x)$ 和 $\sin x$ 均可导，故 $f''(x)$ 可导.

$$f'''(x)+2f'(x)f''(x)=\cos x,$$

上式中令 $x=0$，得 $f'''(0)=1>0$，则点 $(0, f(0))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点，由“五、①”知 (A), (B) 错误．故应选 (C).

五、极值点与拐点的重要结论

以下结论均可直接使用，不必证明．

①曲线的可导点不可同时为极值点和拐点；曲线的不可导点可同时为极值点和拐点．

②设多项式函数 $f(x)=(x-a)^n g(x)(n>1)$，且 $g(a)\neq 0$，则当 n 为偶数时，$x=a$ 是 $f(x)$ 的极值点；当 n 为奇数时，点 $(a, 0)$ 是曲线 $f(x)$ 的拐点．

③设多项式函数 $f(x)=(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}$，其中 n_i 是正整数，a_i 是实数且 a_i 两两不等，$i=1, 2, \cdots, k$．

记 k_1 为 $n_i=1$ 的个数，k_2 为 $n_i>1$ 且 n_i 为偶数的个数，k_3 为 $n_i>1$ 且 n_i 为奇数的个数，则 $f(x)$ 的极值点个数为 $k_1+2k_2+k_3-1$，拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2$．

例 5.6 设函数 $y=\left|xe^{-x}\right|$，则（　　）．

(A) $x=0$ 是 y 的极大值点，点 $(0, 0)$ 不是曲线 y 的拐点

(B) $x=0$ 是 y 的极小值点，点 $(0,\ 0)$ 不是曲线 y 的拐点

(C) $x=0$ 是 y 的极大值点，点 $(0,\ 0)$ 是曲线 y 的拐点

(D) $x=0$ 是 y 的极小值点，点 $(0,\ 0)$ 是曲线 y 的拐点

解 应选 (D).

注意到 $y\big|_{x=0}=0$，当 $x\neq 0$ 时，$y=\left|xe^{-x}\right|>0$，由极值的定义可知 $x=0$ 为 y 的极小值点 .

由例 4.6 知 $y''=\begin{cases} e^{-x}(2-x), & x<0, \\ e^{-x}(x-2), & x>0, \end{cases}$ 令 $y''=0$，得 $x=2$.

当 $x<0$ 时，$y''=e^{-x}(2-x)>0$；当 $0<x<2$ 时，$y''=e^{-x}(x-2)<0$，可知 y'' 在 $x=0$ 的左、右邻域内符号不同 . 因此点 $(0,\ 0)$ 为曲线 y 的拐点 .

故选 (D).

例 5.7 曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点是（　　）.

(A) (1, 0)　　(B) (2, 0)　　(C) (3, 0)　　(D) (4, 0)

解 应选 (C).

令
$$y=(x-3)^3(x-1)(x-2)^2(x-4)^4=(x-3)^3g(x),$$
显然 $g(3)\neq 0$，且 $n=3$ 是奇数 . 由“五、②”可知，点 $(3,\ 0)$ 是 y 的一个拐点，故选 (C).

【注】 (1) 由“五、③”可知，$k_1=1,\ k_2=2,\ k_3=1$，故 y 的拐点个数为 $1+2\times2+3\times1-2=6$.

若 α 是 $f(x)=0$ 的 $m\geq1$ 重根，则 α 是 $f'(x)=0$ 的 $m-1$ 重根.

若 $x-\alpha$ 是 $f(x)$ 的 k 重因式，则 α 称为 $f(x)=0$ 的 k 重根.

(2) 本题的常规解法：因为 $x=3$ 是方程 $(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4=0$ 的三重根，所以它是方程 $y''=0$ 的单根，从而函数 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的二阶导数在点 $x=3$ 的两侧附近改变正负号，故点 $(3,\ 0)$ 是曲线 $y=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$ 的一个拐点 .

例 5.8 曲线 $f(x)=(x-1)^2(x-3)^3$ 的拐点个数为（　　）.

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解 应选 (D).

由“五、③”可知，$k_1=0,\ k_2=1,\ k_3=1$，则拐点个数为 $k_1+2k_2+3k_3-2=2\times1+3\times1-2=3$.

【注】 (1) 本题的常规解法：由
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-1)(x-3)^3+3(x-1)^2(x-3)^2 \\ &= (x-1)(x-3)^2(5x-9), \end{aligned}$$

易知$f''(x)$中必含一次因式$x-3$．另由$f'(1)=f'\left(\frac{9}{5}\right)=f'(3)=0$，知必存在$x_1\in\left(1,\frac{9}{5}\right)$，$x_2\in\left(\frac{9}{5},3\right)$，使得$f''(x_1)=f''(x_2)=0$，故可令

$$f''(x)=k(x-x_1)(x-x_2)(x-3),$$

其中k是不为 0 的常数．由于$f''(x)$在$x=x_1$，$x=x_2$，$x=3$两侧都异号，因此该曲线共有 3 个拐点．

(2) 曲线$y=(x-1)^2(x-3)^2$的极值点个数与拐点个数分别为（　　）．

(A) 3，2　　(B) 2，3　　(C) 3，4　　(D) 4，3

解　应选 (A).

由“五、③”可知，$k_1=0, k_2=2, k_3=0$，于是极值点个数为$0+2\times2+0-1=3$，拐点个数为$0+2\times2+3\times0-2=2$．可直接得出答案．

六、渐近线

1. 铅直渐近线

若$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则$x=x_0$为一条铅直渐近线．

【注】此处的x_0或是函数的无定义点，或是函数定义区间的端点，或是分段函数的分段点．

2. 水平渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=y_1$，则$y=y_1$为一条水平渐近线；若$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_2$，则$y=y_2$为一条水平渐近线；

若$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=y_0$，则$y=y_0$为一条水平渐近线．

3. 斜渐近线

若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a_1(a_1\neq0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-a_1x\right]=b_1$，则$y=a_1x+b_1$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线；

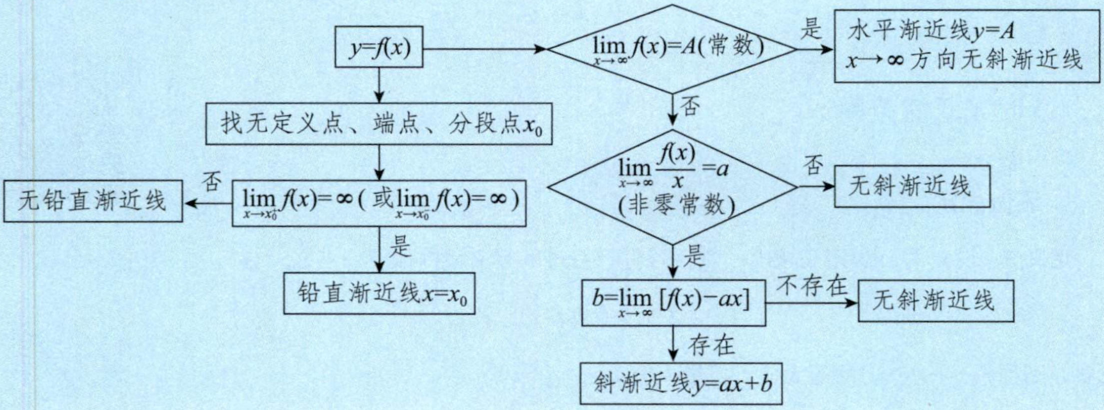
若$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a_2(a_2\neq0)$，$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-a_2x\right]=b_2$，则$y=a_2x+b_2$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线；

若$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a(a\neq0)$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-ax\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$，则$y=ax+b$是曲线$y=f(x)$的一条斜渐近线．

【注】寻找渐近线的顺序：铅直渐近线、水平渐近线、斜渐近线．

若求曲线$y=f(x)$的渐近线，要先找函数的无定义点，定义区间的端点或分段函数的分段点，具

体说来，若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$（或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$），则 $x=x_0$ 为一条铅直渐近线；然后判别 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 是否为常数，若是常数，则存在水平渐近线；若是 ∞，则最后判别 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ 是否为非零常数 a，若是，则求出常数 a，再求 $b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]$，当 a,b 都存在时，则存在斜渐近线，否则就没有斜渐近线 . 可总结成如下程序 .



例 5.9 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线 .

解 因为

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=\infty,$$

所以直线 $x=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的一条铅直渐近线 .

因为

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)\right]=0,$$

所以直线 $y=0$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 在 $x\to-\infty$ 时的一条水平渐近线 .

因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{x+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})}{x}\right]=1,$$

且

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\right]=0,$$

$$\begin{aligned}&\ln(1+\mathrm{e}^x)-x\\&=\ln(1+\mathrm{e}^x)-\ln\mathrm{e}^x\\&=\ln\frac{1+\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\\&=\ln(1+\mathrm{e}^{-x})\end{aligned}$$

所以直线 $y=x$ 是曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 在 $x\to+\infty$ 时的一条斜渐近线，其大致图形如图 5-6 所示 .

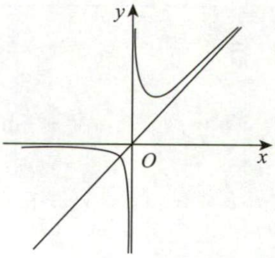


图 5-6

七、最值或取值范围

1. 最值的定义

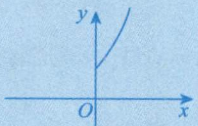
定义 3 设x_0为$f(x)$定义域内一点，若对于$f(x)$的定义域内任意一点x，均有

$$f(x)\leqslant f(x_0)\ （或f(x)\geqslant f(x_0)）$$

成立，则称$f(x_0)$为$f(x)$的**最大值**（或**最小值**）.

【注】极值和最值是什么关系？我们通过两个例子来看.

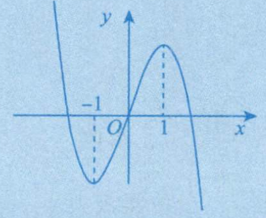
①设$f(x)=\mathrm{e}^x$，$x\in[0,+\infty)$，则$f(0)=\mathrm{e}^0=1$为$f(x)$在$[0,+\infty)$内的最小值，即$f(x)\geqslant f(0)$. 但$f(x)$在$[0,+\infty)$内没有极值. 细致说来，首先，$x=0$是区间左端点，不存在双侧邻域$U(0)$，使$x\in U(0)$时，$f(x)\geqslant f(0)$，故不存在极值. 其次，对于$(0,+\infty)$内的任意x_0，不论$U(x_0)$取得多么小，对于$x\in U(x_0)$，并不总有$f(x)\geqslant f(x_0)$，所以$f(x)$在$[0,+\infty)$内无极小值，易见也无极大值. 所以$f(x)$在$[0,+\infty)$内无极值.



②设$f(x)=3x-x^3$，有

$$f'(x)=3(1-x^2),\ f''(x)=-6x,\ f'(\pm1)=0,\ f''(\pm1)=\mp6,$$

所以$f(1)=2$为极大值，$f(-1)=-2$为极小值. 但$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$内无最大值，也无最小值.



由此可见，极值点并不一定是最值点，最值点也不一定是极值点.

但是，下面这个结论是正确的：

如果$f(x)$在区间I上有最值点x_0，并且此最值点x_0不是区间I的端点而是I内部的点，那么此x_0必是$f(x)$的一个极值点.

事实上，设$f(x_0)$为$f(x)$在I上的最大值，则对一切$x\in I$，有$f(x)\leqslant f(x_0)$，又因为x_0为I内部的点，故存在一个邻域$U(x_0)\subset I$，当$x\in U(x_0)$时，$f(x)\leqslant f(x_0)$. 由极大值的定义知，$f(x_0)$为$f(x)$的一个极大值.

2. 求区间$[a, b]$上连续函数$f(x)$的最大值M和最小值m

①求出$f(x)$在(a, b)内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

②求出端点的函数值$f(a)$和$f(b)$；

③比较以上所求得的所有函数值，其中最大者为$f(x)$在$[a, b]$上的最大值M，最小者为$f(x)$在$[a, b]$上的最小值m .

【注】有时这类问题也可命制为“求连续函数$f(x)$在区间$[a, b]$上的值域$[m, M]$”.

3. 求区间(a, b)内连续函数$f(x)$的最值或取值范围

①求出$f(x)$在(a, b)内的可疑点——驻点与不可导点，并求出这些可疑点处的函数值；

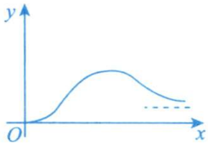
②求(a, b)两端的单侧极限：若a, b为有限常数，则求$\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$与$\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$；若$a$为$-\infty$，则求$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$；若$b$为$+\infty$，则求$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. 记以上所求左端极限为A，右端极限为B；

③比较①，②所得结果，确定最值或取值范围 .

【注1】这类问题有时没有最大值、最小值 .

【注2】求区间$(a, b]$或$[a, b)$内连续函数$f(x)$的最值或取值范围，只需在区间(a, b)内得到的结果基础上加上$f(b)$或$f(a)$的值即可 .

例 5.10 求数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的最大项 .



解 设$f(x)=x^{\frac{1}{x}}(x>0)$，则

$$f'(x)=x^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1-\ln x}{x^2},$$

令$f'(x)=0$，得唯一驻点$x=\mathrm{e}$. 当$x\in(0, \mathrm{e})$时，$f'(x)>0$，当$x\in(\mathrm{e}, +\infty)$时，$f'(x)<0$，所以$f(x)$在$x=\mathrm{e}$处取得极大值，即最大值为$f(\mathrm{e})=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$，又因为$\sqrt{2}<\sqrt[3]{3}$(利用$(\sqrt{2})^6<(\sqrt[3]{3})^6$得出)，故$\sqrt[3]{3}$是数列$\left\{\sqrt[n]{n}\right\}$的最大项 .

【注】如果遇到最小值和最大值的实际问题，首先建立目标函数（即欲求其最值的那个函数），然后确定其定义区间，将它转化为函数的最值问题 . 特别地，如果所考虑的实际问题存在最小值或最大值，并且所建立的目标函数$f(x)$有唯一的极值点x_0，则$f(x_0)$即为所求的最小值或最大值 .

八、作函数图像

(1) 给出函数$f(x)$，作图的一般步骤：

见附录1

①确定定义域，考查函数是否有奇偶性，周期性，并用好图像变换；

②用导数工具（一阶导数确定函数的单调区间、极值点；二阶导数确定曲线的凹凸区间、拐点）；

③考查渐近线；

④作出函数图像．

这是基本功，一定要重视．

【注】常用曲线的图形见附录2，考生需熟练画出这些图形．

例 5.11 画出$y^2=(1-x^2)^3$的图像．

解 首先，代入点(x, y)，$(-x, y)$知$y^2=(1-x^2)^3$关于y轴对称；代入点(x, y)，$(x, -y)$知$y^2=(1-x^2)^3$关于x轴对称，于是只需研究$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时的情形．由于$y^2\geqslant 0$，知$0\leqslant x\leqslant 1$，故$0\leqslant y\leqslant 1$．

其次，用导数工具，$y=(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$，$y'=\dfrac{3}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\overset{令}{=\!=}0$，当$x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$时，$x=0$，$x=1$（驻点）；

又$y''=3\cdot\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{1-x^2}}$，令$y''=0$，解得$x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$（拐点横坐标）．

列表如下．

x	0	$\left(0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}, 1\right)$	1
y'	0	$-$		$-$	0
y''	-3	$-$	0	$+$	
y	1	$\searrow$	拐点	$\searrow$	0

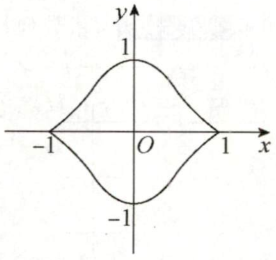


图 5-7

最后，画出图像，如图 5-7 所示．

例 5.12 画出$y=x^x\ (x>0)$的图像．

解 当$x\to 0^+$时，

$$\lim_{x\to 0^+}x^x=\lim_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}x\ln x}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0^+}(-x)}=\mathrm{e}^0=1\ .$$

令$y=f(x)$，则

$$f'(x)=(x^x)'=(\mathrm{e}^{x\ln x})'=x^x(1+\ln x),$$

$$f''(x)=[f'(x)]'=[(1+\ln x)f(x)]'$$

$$=(1+\ln x)f'(x)+\frac{1}{x}f(x)$$

$$=x^x\left[(1+\ln x)^2+\frac{1}{x}\right].$$

由 $x>0$，得 $x^x>0$，故 $f(x)>0$，$f''(x)>0$.

令 $f'(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$. 因此 $f(x)$ 在 $x=\frac{1}{\mathrm{e}}$ 处取得极小值，故函数图像如图 5-8 所示 .

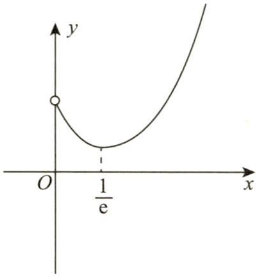


图 5-8

例 5.13 画出 $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$ 的图像 .

解 对于 $y=\frac{\mathrm{e}^x}{x}$，$y'=\frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}\overset{令}{=\!=}0$，得驻点 $x=1$，且当 $x=0$ 时 y' 不存在 . 又 $y''=\frac{\mathrm{e}^x(x^2-2x+2)}{x^3}$，故列表如下 .

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	−		−		+
y''	−		+		+
y	↘		↘	e	↗

由于 $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to0^-}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=-\infty$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$，因此图形有一条水平渐近线 $y=0$，一条铅直渐近线 $x=0$.

作图，如图 5-9 所示 .

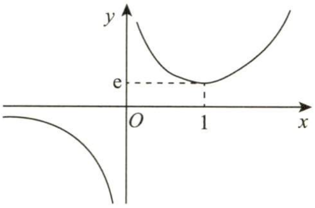


图 5-9

例 5.14 画出 $r=\sin^2\theta\ (0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ 在直角坐标系和极坐标系下的图像 .

解 $r=\sin^2\theta=\frac{1-\cos2\theta}{2}(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$.

在直角坐标系的观点下，视θ为x，r为y，即可画出图像如图 5-10 所示 .

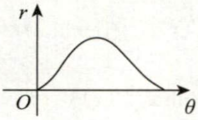


图 5-10

用描点法，可画出其在极坐标下的图像如图 5-11 所示 .

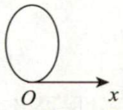


图 5-11

(2) 给出参数方程 .

a. 描点法 .

b. 化为$\begin{cases}\text{直角坐标方程,}\\ \text{极坐标方程.}\end{cases}$

如$\begin{cases}x=\sin t,\\ y=\cos^3 t\end{cases}$ $(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$化为直角坐标方程为$y^2=(1-x^2)^3$.

九、曲率及曲率半径（仅数学一、数学二）

设$y(x)$二阶可导，则曲线$y=y(x)$在点$(x,\ y(x))$处的曲率公式为

$$k=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} .$$

曲率半径的计算公式

$$R=\frac{1}{k}=\frac{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}}{|y''|}(y''\neq 0) .$$

例 5.15 曲线$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t\end{cases}$在$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为______.

解 应填$\frac{2}{3}$.

用参数求导法，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'}=\frac{3\sin^2 t\cos t}{-3\cos^2 t\sin t}=-\tan t,\ \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=-1,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=(-\tan t)'\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=-\frac{1}{\cos^2 t}\cdot\frac{1}{-3\cos^2 t\sin t}=\frac{1}{3\cos^4 t\sin t}, \left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{3}\sqrt{2}.$$

按曲率公式，$t=\frac{\pi}{4}$对应点处的曲率为

$$k=\left.\frac{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|}{\left[1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{3/2}}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{4}{3}\sqrt{2}}{2^{3/2}}=\frac{2}{3}.$$

基础习题精练

习 题

5.1 若$f(x)$在点x_0处二阶可导，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1$，则函数$f(x)$在$x=x_0$处（　　）.

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 无极值　　(D) 不一定有极值

5.2 设函数$y=y(x)$由方程$y\ln y-x+y=0$确定，则曲线$y=y(x)$在点$(1, 1)$附近的凹凸性为(　　).

(A) 先凹后凸　　(B) 先凸后凹　　(C) 凹的　　(D) 凸的

5.3 设常数$a>0$，$f(x)=\frac{1}{3}ax^3-x$，$x\in\left[0, \frac{1}{a}\right]$，则（　　）.

(A) 当$0<a<1$时，$f(x)$的最大值是$f\left(\frac{1}{a}\right)$

(B) 当$0<a<1$时，$f(x)$的最小值是$f(0)$

(C) 当$a\geqslant 1$时，$f(x)$的最小值是$f\left(\frac{1}{a}\right)$

(D) 当$a\geqslant 1$时，$f(x)$的最小值是$f(0)$

5.4 函数$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x$的极小值为______.

5.5 曲线$y=(x-5)x^{\frac{2}{3}}$的拐点坐标为______.

5.6 求函数$f(x)=x-\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$的单调区间和极值.

5.7 求曲线$y=f(x)=x\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}}$的渐近线．

5.8 设$f(x)=3x^2+Ax^{-3}$，问正数A至少为何值时，可使对任意的$x\in(0,+\infty)$，都有$f(x)\geqslant 20$成立．

5.9 设$a>1$，$f(t)=a^t-at$在$(-\infty,+\infty)$内的驻点为$t(a)$，问a为何值时，$t(a)$最小，并求出最小值．

解答

5.1 (A) **解** 由于$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}=-1<0$，则存在$\delta>0$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，$\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2}<0$，由于$(x-x_0)^2>0$，因此$f(x)-f(x_0)<0$，所以$f(x_0)>f(x)$，$x_0$为$f(x)$的极大值点．故选 (A).

5.2 (D) **解** 将方程$y\ln y-x+y=0$两端对x求导，有

$$y'\ln y+2y'-1=0\ . \tag{*}$$

将$x=1$，$y=1$代入，得$y'(1)=\dfrac{1}{2}$．

将(*)两端再次对x求导，可得

$$y''\ln y+\frac{1}{y}\cdot(y')^2+2y''=0,$$

将$y(1)=1$，$y'(1)=\dfrac{1}{2}$代入上式，得$y''(1)=-\dfrac{1}{8}<0$且$y''(x)$在$x=1$附近是连续的，可知曲线$y=y(x)$在点$(1,1)$附近是凸的．故选 (D).

5.3 (C) **解** $f'(x)=ax^2-1$，$f''(x)=2ax$．当$0<a<1$时，$x=\sqrt{\dfrac{1}{a}}$为区间$\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$内部的唯一驻点，又因$f''(x)>0$，故$f\left(\sqrt{\dfrac{1}{a}}\right)=-\dfrac{2}{3\sqrt{a}}$为极小值，也是最小值，在两端点处，$f(0)=0$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{3a}-1\right)$．现在要比较$\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{3a}-1\right)$与 0 的大小．显然，当$0<a\leqslant\dfrac{1}{3}$时，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{1}{a}\left(\dfrac{1}{3a}-1\right)\geqslant 0$，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$为最大值．当$\dfrac{1}{3}<a<1$时，$f\left(\dfrac{1}{a}\right)<0$，$f(0)=0$为最大值，所以 (A)，(B) 都不正确．当$a\geqslant 1$时，驻点不在区间$\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$的内部，故在$\left[0,\dfrac{1}{a}\right]$内$f'(x)<0$，$f(x)$是严格单调减少的，所以$f\left(\dfrac{1}{a}\right)$为最小值．选 (C).

5.4 4 **解** 由$f(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x$，得

$$f'(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}-2\sin x,\ f''(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}-2\cos x,$$

$$f'''(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+2\sin x,\ f^{(4)}(x)=\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}+2\cos x,$$

令$f'(x)=0$，解得$x=0$，故$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0$，$f^{(4)}(0)=4>0$，因此函数$f(x)$在$x=0$处有极小值，极小值为 4.

5.5 $(-1,\ -6)$ **解** $y=x^{\frac{5}{3}}-5x^{\frac{2}{3}}$，$y'=\frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}}$，$y''=\frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}}+\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}}=\frac{10(x+1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$.

令$y''=0$，得$x=-1$，又$x\to 0$时，$y''\to+\infty$. 由于在$x=-1$的左、右邻域内y''变号，在$x=0$的左、右邻域内y''不变号，故拐点为$(-1,\ -6)$.

5.6 **解** 定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，且

$$f'(x)=1-x^{-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x}} .$$

令$f'(x)=0$，得驻点$x_1=1$，$f'(x)$不存在的点为$x_2=0$，列表如下 .

x	$(-\infty,\ 0)$	0	$(0,\ 1)$	1	$(1,\ +\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值	↘	极小值	↗

由此可知函数$f(x)$在$(-\infty,\ 0)$, $(1,\ +\infty)$内单调增加，在$(0,\ 1)$内单调减少；在$x=0$处取得极大值$f(0)=0$，在$x=1$处取得极小值$f(1)=-\frac{1}{2}$.

5.7 **解** 因为$\lim\limits_{x\to 0}xe^{\frac{1}{x^2}}\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to\infty}\frac{e^{t^2}}{t}=\lim\limits_{t\to\infty}2te^{t^2}=\infty$，所以曲线$y=f(x)$有铅直渐近线$x=0$.

因为$\lim\limits_{x\to\infty}xe^{\frac{1}{x^2}}=\infty$，所以曲线$y=f(x)$无水平渐近线 .

又$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{xe^{\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x^2}}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(xe^{\frac{1}{x^2}}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{x^2}}-1}{\frac{1}{x}}\xlongequal{令x=\frac{1}{t}}\lim\limits_{t\to 0}\frac{e^{t^2}-1}{t}=\lim\limits_{t\to 0}2te^{t^2}=0$，所以曲线$y=f(x)$有斜渐近线$y=x$.

5.8 **解** $f'(x)=6x-3Ax^{-4}$，令$f'(x)=0$，解得$x=\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$.

显然，当$0<x<\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$时，$f'(x)<0$，$f(x)$单调减少；当$x>\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$时，$f'(x)>0$，$f(x)$单调增加 .

故$x=\sqrt[5]{\frac{A}{2}}$为$f(x)$在区间$(0,\ +\infty)$内的最小值点，所以当

$$f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right)=5\left(\frac{A}{2}\right)^{\frac{2}{5}}\geqslant 20,$$

即当$A \geqslant 64$时，有

$$f(x) \geqslant f\left(\sqrt[5]{\frac{A}{2}}\right) \geqslant 20,\ x \in (0, +\infty)$$

成立，因此A至少为64.

【注】此题的初等解法：当$A>0$时，由$3x^2+Ax^{-3}=x^2+x^2+x^2+\frac{A}{2}x^{-3}+\frac{A}{2}x^{-3} \geqslant 5\sqrt[5]{\frac{A^2}{4}} \geqslant 20$，解得$A \geqslant 64$.

5.9 解 本题是求驻点函数$t(a)$的最小值点和最小值，所以首先由原函数$f(t)=a^t-at$求出驻点函数$t(a)$，然后对$t(a)$进行运算 .

$$f'(t)=a^t\ln a-a,$$

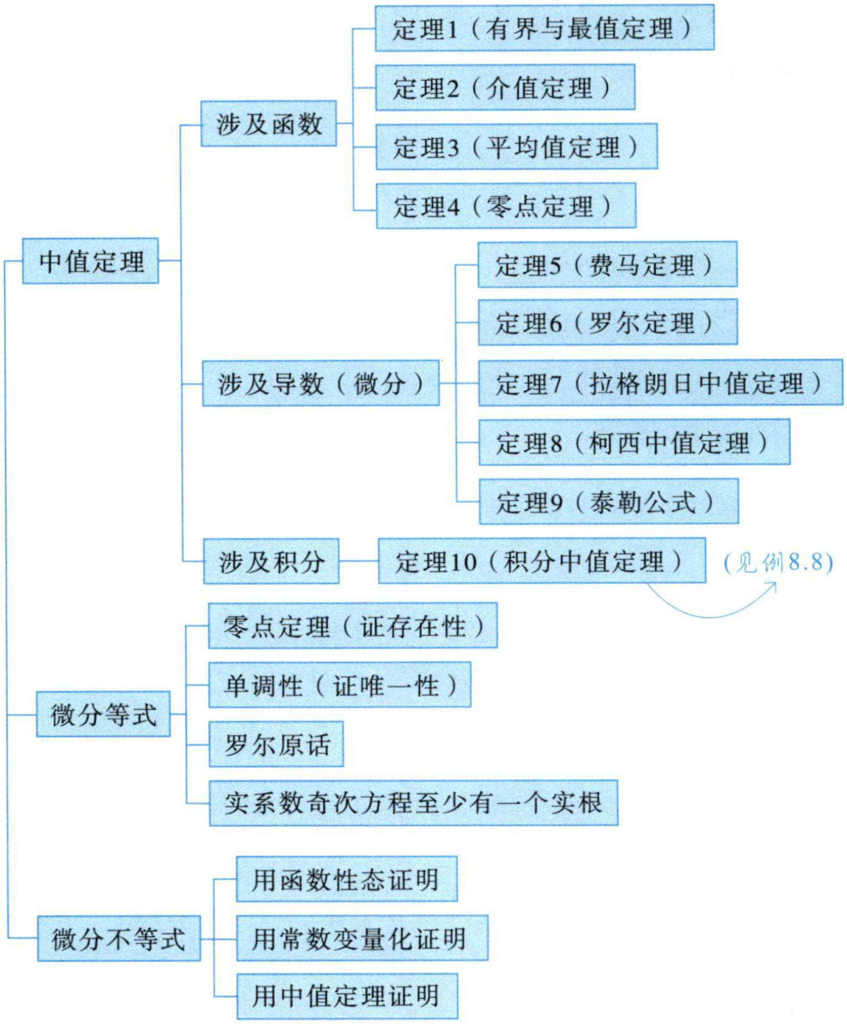
令$f'(t)=a^t\ln a-a=0$，得唯一驻点函数$t(a)=1-\frac{\ln(\ln a)}{\ln a}$，$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}$.

令$t'(a)=-\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\ln(\ln a)}{(\ln a)^2}=0$，得函数$t(a)$的唯一驻点$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$.

当$1<a<\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t'(a)<0$；当$a>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t'(a)>0$，所以当$a=\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时，$t(\mathrm{e}^{\mathrm{e}})=1-\frac{1}{\mathrm{e}}$为极小值，也是最小值 .

第6讲 一元函数微分学的应用（二）——中值定理、微分等式与微分不等式

基础知识结构



基础内容精讲

一、中值定理

(离散的)平均值定理：$f(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(x_i)$.

(连续的)平均值定理：$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

1. 涉及函数的中值定理

设$f(x)$在$[a,b]$上连续，则

定理 1(有界与最值定理) $m\leqslant f(x)\leqslant M$，其中$m$, M分别为$f(x)$在$[a,b]$上的最小值与最大值.

定理 2(介值定理) 当$m\leqslant \mu\leqslant M$时，存在$\xi\in[a,b]$，使得$f(\xi)=\mu$.

定理 3(平均值定理) 当$a<x_1<x_2<\cdots<x_n<b$时，在$[x_1,x_n]$内至少存在一点ξ，使得

$$f(\xi)=\frac{f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

定理 4(零点定理) 当$f(a)\cdot f(b)<0$时，存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=0$.

【注】 推广的零点定理：若$f(x)$在(a,b)内连续，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\alpha$, $\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=\beta$，且$\alpha\cdot\beta<0$，则$f(x)=0$在$(a,b)$内至少有一个根，这里$a$, b, α, β可以是有限数，也可以是无穷大.

例 6.1 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(1)=0$, $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，证明：存在$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$f(\eta)=\eta$.

证明 令$F(x)=f(x)-x$，则函数$F(x)=f(x)-x$在$\left[\frac{1}{2},1\right]$上连续，且有

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0,\ F(1)=f(1)-1=-1<0,$$

由于$F\left(\frac{1}{2}\right)\cdot F(1)<0$，根据零点定理可知，存在$\eta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$，使得$F(\eta)=0$，即$f(\eta)=\eta$.

例 6.2 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上连续，且$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$. 证明：方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根.

证明 由$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$与极限的保号性可知，存在$a\in(0,1)$，使得$\frac{f(a)}{a}<0$，即$f(a)<0$.

又$f(1)>0$，所以存在$b\in(a,1)\subset(0,1)$，使得$f(b)=0$，即方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根.

$$\begin{tikzcd}
\int_a^b f(x)\mathrm{d}x & f(x) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[r, bend left, "\text{拉格朗日中值定理}"] \arrow[l, bend left, "\text{定积分/积分中值定理}"] \arrow[rr, bend right, "\text{泰勒公式}"'] & f'(x) \arrow[r] & f^{(n)}(x)(n\geqslant 2)
\end{tikzcd}$$

费马

（1601—1665）

2. 涉及导数（微分）的中值定理

定理 5（费马定理） 设$f(x)$在点x_0处满足$\begin{cases}①\text{可导},\\②\text{取极值},\end{cases}$则$f'(x_0)=0$.

【注】(1) 证明费马定理 .

不妨假设$f(x)$在点x_0处取得极大值，则存在x_0的邻域$U(x_0)$，对任意的$x\in U(x_0)$，都有$\Delta f=f(x)-f(x_0)\leqslant 0$，于是根据导数的定义与极限的保号性，有

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geqslant 0,$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leqslant 0 .$$

又$f(x)$在点x_0处可导，于是$f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$，故$f'(x_0)=0$.

(2) 当一个人跑到最远处时，他的速度为零；当一个人跑得最快时，他的加速度为零 . 这些都是费马定理在生活中的通俗应用 .

例 6.3 **（导数零点定理）**设$f(x)$在$[a, b]$上可导，证明当$f'_+(a)\cdot f'_-(b)<0$时，存在$\xi\in(a, b)$，使得

$$f'(\xi)=0 .$$

证明 不妨设$f'_+(a)>0, f'_-(b)<0$，于是

由$f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}>0$，可得存在$\xi_1>0$，在$(a, a+\xi_1)$内，$f(x)>f(a)$；

由$f'_-(b)=\lim\limits_{x\to b^-}\dfrac{f(x)-f(b)}{x-b}<0$，可得存在$\xi_2>0$，在$(b-\xi_2, b)$内，$f(x)>f(b)$.

故$f(a)$与$f(b)$均不是$f(x)$在$[a, b]$上的最大值，则$f(x)$在(a, b)内取得最大值，根据费马定理可知，存在$\xi\in(a, b)$，使得$f'(\xi)=0$.

定理 6（罗尔定理）

设$f(x)$满足$\begin{cases}①\text{在}[a, b]\text{上连续},\\②\text{在}(a, b)\text{内可导},\\③f(a)=f(b),\end{cases}$则存在$\xi\in(a, b)$，使得$f'(\xi)=0$.

罗尔

（1652—1719）

【注 1】推广的罗尔定理．

设$f(x)$在(a,b)内可导，$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=A$，则在$(a,b)$内至少存在一点$\xi$，使$f'(\xi)=0$，其中区间$(a,b)$可以是有限区间也可以是无穷区间，$A$可以是有限数也可以是无穷大．

【注 2】罗尔定理的使用往往需要构造辅助函数，其方法总结如下．

(1) 简单情形：题设$f(x)$即为辅助函数（研究对象）．

(2) 复杂情形． $\longrightarrow$一般不用f，而用一个神秘的“F”——辅助函数．

①乘积求导公式$(uv)'=u'v+uv'$的逆用．

a. $[f(x)f(x)]'=[f^2(x)]'=2f(x)\cdot f'(x)$．

见到$f(x)f'(x)$，令$F(x)=f^2(x)$．

b. $[f(x)\cdot f'(x)]'=[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$．

见到$[f'(x)]^2+f(x)f''(x)$，令$F(x)=f(x)f'(x)$．

c. $[f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}]'=f'(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}+f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)=[f'(x)+f(x)\varphi'(x)]\mathrm{e}^{\varphi(x)}$．

见到$f'(x)+f(x)\varphi'(x)$，令$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\varphi(x)}$．

常考以下情形．

$\varphi(x)=x\Rightarrow$见到$f'(x)+f(x)$，令$F(x)=f(x)\mathrm{e}^x$． $\xrightarrow{\text{广义化}}$ $\boxed{\text{狗}}'+\boxed{\text{狗}}$，令$F(x)=\boxed{\text{狗}}\,\mathrm{e}^x$，如$\boxed{f''-f'}'+\boxed{f''-f'}=f'''-f'$，令$F(x)=[f''(x)-f'(x)]\mathrm{e}^x$.

$\varphi(x)=-x\Rightarrow$见到$f'(x)-f(x)$，令$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{-x}$． $\xrightarrow{\text{广义化}}$ $\boxed{\text{狗}}'-\boxed{\text{狗}}$，令$F(x)=\boxed{\text{狗}}\,\mathrm{e}^{-x}$，如$\boxed{f'+f}'-\boxed{f'+f}=f''-f$，令$F(x)=[f'(x)+f(x)]\mathrm{e}^{-x}$.

$\varphi(x)=kx\Rightarrow$见到$f'(x)+kf(x)$，令$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{kx}$．

$(uv)''=u''v+2u'v'+uv''$亦有可能考到．

不过，这种广义化考得很少，因为辅助函数太难构造的话，题目就失去使用中值定理的考查功能了．

②商的求导公式$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$的逆用．

a. $\left[\dfrac{f(x)}{x}\right]'=\dfrac{f'(x)x-f(x)}{x^2}$．

见到$f'(x)x-f(x)$，$x\neq0$，令$F(x)=\dfrac{f(x)}{x}$．

b. $\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$．

见到$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$，$f(x)\neq0$，令$F(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$．

c. $[\ln f(x)]'=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$，故$[\ln f(x)]''=\left[\dfrac{f'(x)}{f(x)}\right]'=\dfrac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}$．

见到$f''(x)f(x)-[f'(x)]^2$，$f(x)>0$，亦可考虑令$F(x)=\ln f(x)$．

事实上，这些辅助函数的构造不仅仅限于罗尔定理的使用．

例 6.4 设$f(x)$在$[0,3]$上连续，在$(0,3)$内可导，且$f(0)+f(1)+f(2)=3$，$f(3)=1$．证明：必存在$\xi\in(0,3)$，使得$f'(\xi)=0$．

证明 因为$f(x)$在$[0,3]$上连续，所以$f(x)$在$[0,2]$上连续，且在$[0,2]$上必有最大值M和最小值m，于是

$$m\leqslant f(0)\leqslant M,\ m\leqslant f(1)\leqslant M,\ m\leqslant f(2)\leqslant M,$$

故

$$m\leqslant\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1\leqslant M.$$

由介值定理可知，至少存在一点$c\in[0,2]$，使得$f(c)=\dfrac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$．

所以函数$f(x)$在$[c,3]$上满足罗尔定理的条件，于是存在$\xi\in(c,3)\subset(0,3)$，使得$f'(\xi)=0$．

例 6.5 设$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，$f(a)=0$，$a>0$，证明：存在$\xi\in(a,b)$，使得$f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$．

分析 先将结论改写为$f'(\xi)-\dfrac{a}{b-\xi}f(\xi)=0$（对照$f'(x)+f(x)\varphi'(x)$），所以构造辅助函数$F(x)=f(x)\mathrm{e}^{\int\left(-\frac{a}{b-x}\right)\mathrm{d}x}=f(x)(b-x)^a$，再利用罗尔定理即可．

证明 令$F(x)=f(x)(b-x)^a$，显然$F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理知，存在$\xi\in(a,b)$，使得$F'(\xi)=0$，即$f'(\xi)(b-\xi)^a-af(\xi)(b-\xi)^{a-1}=0$，已知$a>0$，故$f(\xi)=\dfrac{b-\xi}{a}f'(\xi)$．

【注】上面是证明一阶导数为0，也就是使用一次罗尔定理的问题，但有些题目涉及二阶导数为0，即要多次使用罗尔定理，这种问题的难点是**要找到函数值相等的三个不同点**，即$f(a)=f(b)=f(c)$（不妨设$a<b<c$），分别在$[a,b]$，$[b,c]$上使用罗尔定理，有$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$，$\xi_1\in(a,b)$，$\xi_2\in(b,c)$，进而在$[\xi_1,\xi_2]$上再对$f'(x)$使用罗尔定理，得$f''(\xi)=0$，其中$\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(a,c)$．如下例．

例 6.6 设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内二阶可导，过点$A(0,f(0))$与点$B(1,f(1))$的直线与曲线$y=f(x)$相交于点$C(c,f(c))$，其中$0<c<1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)=0$．

证明 根据题意，过点A与点B的直线方程为$y_1=[f(1)-f(0)]x+f(0)$．

因为$F(x)$有三个零点

令$F(x)=f(x)-y_1=f(x)-[f(1)-f(0)]x-f(0)$，则$F(x)$在$[0, c]$与$[c, 1]$上均满足罗尔定理的条件，于是可得$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$, $\xi_1\in(0, c)$, $\xi_2\in(c, 1)$.

再由罗尔定理可得$F''(\xi)=f''(\xi)=0$, $\xi\in(\xi_1, \xi_2)\subset(0, 1)$，命题得证 .

例 6.7 设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有二阶导数，且$f(1)>0$, $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0$. 证明：方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0, 1)$内至少存在两个不同实根 .

证明 由题设知$f(x)$连续且$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}$存在，所以$f(0)=0$. 又由例 6.2 知$f(b)=0$，$b\in(0, 1)$，由罗尔定理知，存在$c\in(0, b)\subset(0, 1)$，使得

$$f'(c)=0 .$$

令$F(x)=f(x)f'(x)$，由题设知$F(x)$在区间$[0, b]$上可导，且

$$F(0)=0, F(c)=0, F(b)=0 .$$

根据罗尔定理，存在$\xi\in(0, c), \eta\in(c, b)$，使得$F'(\xi)=F'(\eta)=0$，即$\xi, \eta$是方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0, 1)$内的两个不同实根 .

定理 7(拉格朗日中值定理)

设$f(x)$满足$\begin{cases}①\text{在}[a, b]\text{上连续,}\\②\text{在}(a, b)\text{内可导,}\end{cases}$ 则存在$\xi\in(a, b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a),$$

或者写成

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} .$$

拉格朗日

(1736—1813)

【注】见到$f(a)-f(b)$或f与f'的关系，一般想到用拉格朗日中值定理 .

例 6.8 若$f(x)$在(a, b)内可导且$f'(x)$有界，证明：$f(x)$在(a, b)内有界 .

证明 因为$f(x)$在(a, b)内可导，所以$f(x)$在(a, b)内连续，因此对任意$x_0\in(a, b)$，$f(x_0)$存在，对任意$x\in(a, b)$，不妨设$x<x_0$，对$f(x)$在$[x, x_0]$上应用拉格朗日中值定理，有

$$f(x)-f(x_0)=f'(\xi)(x-x_0), \xi\in(x, x_0),$$

则$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+|f'(\xi)||x-x_0|$，由于$f'(x)$有界，故存在$k>0$，使得对任意$x\in(a, b)$，有$|f'(x)|\leqslant k$，则$|f'(\xi)|\leqslant k$，故

$$|f(x)|\leqslant|f(x_0)|+k|x-x_0|<|f(x_0)|+k(b-a)\overset{\text{记}}{=\!=}M,$$

即$f(x)$在(a, b)内有界．

例 6.9 设$f(x)$在$[0, 1]$上连续，在$(0, 1)$内可导，$f(0)=0$，且$f(x)$在$[0, 1]$上不恒等于零．证明：存在$\xi\in(0, 1)$，使得$f(\xi)f'(\xi)>0$．

证明 令$F(x)=\frac{1}{2}f^2(x)$，则$F(0)=\frac{1}{2}f^2(0)=0$，因为$f(x)$不恒为0，于是必存在某点$a\in(0, 1]$，使得$f(a)\neq 0$，则$F(a)=\frac{1}{2}f^2(a)>0$，由拉格朗日中值定理可知，存在$\xi\in(0, a)\subset(0, 1)$，使得$F'(\xi)=\frac{F(a)-F(0)}{a-0}>0$，即$f(\xi)f'(\xi)>0$．

例 6.10 设函数$f(x)$满足$f(0)=0$，且当$x>0$时，$f(x)<0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，则当$0<a<x<b$时，有（　　）．

(A) $xf(x)>af(a)$　　(B) $bf(b)>xf(x)$　　(C) $xf(a)>af(x)$　　(D) $xf(b)>bf(x)$

解 应选(D).

令$g(x)=xf(x)$, $x>0$，则$g'(x)=f(x)+xf'(x)<0$, $g(x)$单调减少，故当$0<a<x<b$时，$g(b)<g(x)<g(a)$，即$bf(b)<xf(x)<af(a)$，选项(A)，(B)错误．

再令$h(x)=\frac{f(x)}{x}$，$x>0$，则

$$
\begin{aligned}
h'(x)&=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}\\
&=\frac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}\overset{\text{拉格朗日中值定理}}{=}\frac{xf'(x)-f'(\xi)\cdot x}{x^2}\\
&=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{x},
\end{aligned}
$$

其中$0<\xi<x$．由$f''(x)>0$，知$f'(x)$单调增加，$f'(x)>f'(\xi)$，则$h'(x)>0$, $h(x)$单调增加，故当$0<a<x<b$时，$h(a)<h(x)<h(b)$，即$\frac{f(a)}{a}<\frac{f(x)}{x}<\frac{f(b)}{b}$，也即$af(x)>xf(a)$, $xf(b)>bf(x)$，选项(C)错误，选(D).

定理 8(柯西中值定理)

柯西

(1789—1857)

$$
设f(x), g(x)满足\begin{cases}①在[a, b]上连续,\\ ②在(a, b)内可导，则存在\xi\in(a, b)，使得\\ ③g'(x)\neq 0,\end{cases}
$$

往往考查一个具体函数，一个抽象函数

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

例 6.11 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，在(a, b)内可导，$0<a<b$，证明：至少存在一点$\xi\in(a, b)$，

使得$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi)$．

证明 因为$f(x)$与$g(x)=\ln x$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$g'(x)=\frac{1}{x}\neq 0(0<a<x<b)$，即$f(x)$与$g(x)=\ln x$在$[a,b]$上满足柯西中值定理的条件，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{\ln b-\ln a}=\frac{f'(\xi)}{\frac{1}{\xi}},$$

即

$$f(b)-f(a)=\xi\ln\frac{b}{a}f'(\xi).$$

定理 9(泰勒公式)

(1) 带拉格朗日余项的n阶泰勒公式．

此公式适用于区间$[a,b]$，常在证明题中使用，如证不等式、中值等式等．

设$f(x)$在点x_0的某个邻域内$n+1$阶导数存在，则对该邻域内的任意点x，有

区间上

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

其中ξ介于x，x_0之间．

此公式仅适用于点$x=x_0$及其邻域，常用于研究点$x=x_0$处的某些结论，如求极限、判定无穷小的阶数、判定极值等．

(2) 带佩亚诺余项的n阶泰勒公式．

设$f(x)$在点x_0处n阶可导，则存在x_0的一个邻域，对于该邻域内的任意点x，有

局部上

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n+o((x-x_0)^n).$$

【**注 1**】当$x_0=0$时的泰勒公式称为**麦克劳林公式**．

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$，其中$\xi$介于0和$x$之间．

$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$．

【**注 2**】几个重要函数的麦克劳林展开式．

(1) $\mathrm{e}^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$．

(2) $\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o(x^{2n+1})$．

(3) $\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$．

(4) $\dfrac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$.

(5) $\dfrac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n)$.

(6) $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+o(x^n)$.

(7) $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$.

例 6.12 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=0$，则（ ）.

(A) 当$f'(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(B) 当$f''(x)<0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(C) 当$f'(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

(D) 当$f''(x)>0$时，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0$

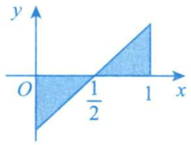
解 应选 (D).

已知$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，则由带拉格朗日余项的泰勒公式有

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

可从几何上直接得出

$\int_0^{2x_0}(x-x_0)\mathrm{d}x=0$



其中ξ介于x与$\dfrac{1}{2}$之间．对上式在$[0,1]$上取积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f\left(\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x+\underline{\int_0^1 f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x}+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\Bigg|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x=0,$$

移项整理得$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x$.

$f''(\xi)$不能提至积分号外，因为此处的ξ与x有关，是$\xi=\xi(x)$，不是常数.

故当$f''(x)>0$时，有$f''(\xi)>0$，则$\underline{f\left(\dfrac{1}{2}\right)<0}$. 因此选 (D).

由积分保号性，$\int_0^1 f''(\xi)\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}x>0$

例 6.13 设函数$f(x)$在区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$，证明：在区间$(-1,1)$内至少存在一点ξ，使$f'''(\xi)=3$.

证明 将$f(x)$在$x=0$处展开成带拉格朗日余项的二阶泰勒公式，得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

其中η介于0与x之间，$x\in[-1,1]$.

分别令 $x=-1$ 和 $x=1$，并结合已知条件，得

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\eta_1),\ -1<\eta_1<0,$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\eta_2),\ 0<\eta_2<1,$$

两式相减，可得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由 $f'''(x)$ 的连续性知，$f'''(x)$ 在区间 $[\eta_1,\eta_2]$ 上有最大值和最小值，设它们分别为 M 和 m，则有

$$m\leqslant\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]\leqslant M,$$

再由连续函数的介值定理知，至少存在一点 $\xi\in[\eta_1,\eta_2]\subset(-1,1)$，使

$$f'''(\xi)=\frac{1}{2}[f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)]=3\ .$$

【注】 泰勒公式

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)(x-x_0)^3\ (\ \eta\text{ 介于 }x,\ x_0\text{ 之间}),$$

关键是把握好展开点 x_0（取已知导数值的点或待证导数值的点）和被展开点 x（取已知函数值的点或特殊点，如端点、中间点等），同时要注意想办法消去未知的函数项或导数项，向结论靠拢 .

二、微分等式

方程 $f(x)=0$ 的根就是函数 $f(x)$ 的零点 . 从几何上讲，方程的根作为两条曲线的交点，代数语言“$f(x)=g(x)$ 的根”与几何语言“曲线 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的交点”，两者概念不同，但描述的是同一件事 . 基于此，为讨论方程的根，有时可改为讨论曲线的交点 . 讨论方程根的问题（也称为函数的零点问题）通常可以考虑下面这些方法 .

1. 零点定理（证明根的存在性）

若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根 .

2. 单调性（证明根的唯一性）

若 $f(x)$ 在 (a,b) 内单调，则 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至多有一个根，这里区间 (a,b) 可以是有限区间也可以是无穷区间 .

3. 罗尔定理及其推论

当不易使用零点定理时，可考虑罗尔定理及其推论 .（罗尔定理见“一、2. 定理 6”）

【注】 若 $f(x)$ 在区间 I 上 n 阶可导，且 $f^{(n)}(x)\neq 0$，即 $f^{(n)}(x)=0$ 无实根（至多有 0 个根），于是 $f(x)=0$ 至多有 n 个根.

证明　（反证法）假设 $f(x)=0$ 在 I 上有 $n+1$ 个实根，即 $f(x_1)=f(x_2)=\cdots=f(x_{n+1})=0$.

不妨设 $x_1<x_2<\cdots<x_{n+1}$，由罗尔定理，则 $f'(x)=0$ 至少有 n 个实根（每一个小区间用罗尔定理）. 依次逐阶递推，则 $f''(x)=0$ 至少有 $n-1$ 个实根，…，$f^{(n)}(x)=0$ 必至少有一个实根，设为 ξ，即 $f^{(n)}(\xi)=0$，与题干矛盾，故假设不成立，原命题得证.

事实上有更一般的结论，即罗尔原话（罗尔定理的推论）：若 $f^{(n)}(x)=0$ 至多有 k 个根，则 $f(x)=0$ 至多有 $k+n$ 个根.

4. 实系数奇次方程至少有一个实根

【注】 证明任何实系数奇次方程

$$x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1}=0$$

至少有一个实根.

证明　设

$$f(x)=x^{2n+1}+a_1x^{2n}+\cdots+a_{2n}x+a_{2n+1},$$

则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，由 $f(x)$ 的连续性及推广的零点定理，知存在 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使 $f(\xi)=0$，即 $f(x)=0$ 至少有一个实根.

例 6.14　在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内，方程 $|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$（　　）.

(A) 无实根　　(B) 有且仅有一个实根

(C) 有且仅有两个实根　　(D) 有无穷多个实根

解　应选 (C).

记 $f(x)=|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x$，易知 $f(x)$ 为偶函数，又因为当 $x>1$ 时，$f(x)>0$，故只需判断 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内有无实根即可. 因为 $f(0)=-1<0$，$f(1)=2-\cos 1>0$，且当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\sin x>0$，所以 $f(x)=0$ 在 $(0,+\infty)$ 内有且仅有一个实根. 故在 $(-\infty,+\infty)$ 内 $f(x)=0$ 有且仅有两个实根. 故答案选 (C).

【注】 此题若换元，令 $|x|^{\frac{1}{4}}=t$，方程变为 $t+t^2-\cos t^4=0$，计算时看起来更“舒服”.

例 6.15 若$3a^2-5b<0$，则方程$x^5+2ax^3+3bx+4c=0$（　　）.

(A) 无实根　　(B) 有唯一实根

(C) 有三个不同实根　　(D) 有五个不同实根

解 应选 (B).

由于$f(x)=x^5+2ax^3+3bx+4c$是奇次多项式，故方程$f(x)=0$至少有一个实根，又$f'(x)=0$，即双二次方程$5x^4+6ax^2+3b=0$对应于x^2的判别式$\varDelta=12(3a^2-5b)<0$，则方程$f'(x)=0$无实根，$f(x)$单调，所以方程$f(x)=0$有唯一实根．故答案选 (B).

例 6.16 证明$2^x-x^2-1=0$有且仅有三个根．

证明 ①存在性．

令$f(x)=2^x-x^2-1=0$，显然$x_1=0, x_2=1$为根，又$f(2)=-1<0, f(5)=2^5-25-1=6>0$，则$f(x)=0$在$(2, 5)$内至少有一个根，即$f(x)=0$至少有三个根．

②唯一性．

由$f'(x)=2^x\cdot\ln 2-2x, f''(x)=2^x\cdot\ln^2 2-2, f'''(x)=2^x\cdot\ln^3 2\neq 0$，知$f(x)=0$至多有三个根，即$f(x)=0$有且仅有三个根．

例 6.17 已知方程$\mathrm{e}^x=kx$有且仅有一个实根，则k的取值范围是______.

解 应填$k=\mathrm{e}$或$k<0$．

方法一 直接法．令$F(x)=\mathrm{e}^x-kx$，则$F'(x)=\mathrm{e}^x-k$，当$k<0$时，$F'(x)>0, F(x)$单调增加，又$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty$，则$F(x)=0$有且仅有一个实根；

当$k=0$时，$F(x)=\mathrm{e}^x, F(x)$恒大于 0，显然不满足；

当$k>0$时，令$F'(x)=0$，有$x=\ln k$，则当$x\in(-\infty, \ln k)$时，$F(x)$单调减少，当$x\in(\ln k, +\infty)$时，$F(x)$单调增加，又$\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=+\infty, \lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=+\infty$，则当且仅当$F(\ln k)=0$时，$F(x)=0$有且仅有一个实根，解得$k=\mathrm{e}$．

综上，当$k=\mathrm{e}$或$k<0$时，方程$\mathrm{e}^x=kx$有且仅有一个实根．

方法二 分离法．联立方程组$\begin{cases}y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x},\\ y=k,\end{cases}$且由例 5.13，可得图 6-1.

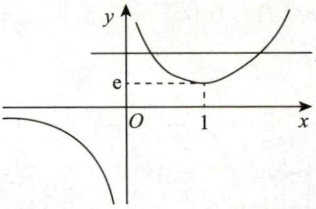


图 6-1

故当 $k=\mathrm{e}$ 或 $k<0$ 时，$y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 与 $y=k$ 有且仅有一个交点，即方程 $\mathrm{e}^x=kx$ 有且仅有一个实根．

例 6.18 若方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数．证明此方程存在唯一正实根 x_n．

证明 记 $f_n(x)=x^n+nx-1$．当 $x>0$ 时，$f_n'(x)=nx^{n-1}+n>0$，故 $f_n(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调增加．由于 $f_n(0)=-1<0$，$f_n(1)=n\geqslant1$，根据连续函数的零点定理知方程

$$x^n+nx-1=0$$

存在唯一正实根 x_n，且 $0<x_n<1$．

三、微分不等式

1. 用函数性态（包括单调性、凹凸性和最值等）证明不等式

一般地，使用如下依据．

(1) 若有 $f'(x)\geqslant0$，$a<x<b$，则有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$．

(2) 若有 $f''(x)\geqslant0$，$a<x<b$，则有 $f'(a)\leqslant f'(x)\leqslant f'(b)$．

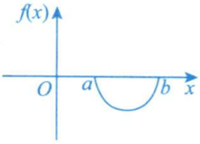
①当 $f'(a)>0$ 时，$f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ 单调增加；

②当 $f'(b)<0$ 时，$f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ 单调减少．

(3) 设 $f(x)$ 在 I 内连续，且有唯一的极值点 x_0，则 $\begin{cases}\text{当 } x_0 \text{ 为极大值点时，即为 } I \text{ 内的最大值点，有 } f(x_0)\geqslant f(x),\\ \text{当 } x_0 \text{ 为极小值点时，即为 } I \text{ 内的最小值点，有 } f(x_0)\leqslant f(x),\end{cases}$

其中 $x\in I$．

(4) 若有 $f''(x)>0$，$a<x<b$，$f(a)=f(b)=0$，则有 $f(x)<0$．



例 6.19 证明当 $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ 时，有 $\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$．

证明 方法一 若证 $\sin x>\dfrac{2x}{\pi}$，即需证 $\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}$，令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，则

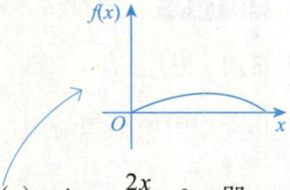
$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}.$$

令 $g(x)=x\cos x-\sin x$，$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，得 $g'(x)=-x\sin x<0$，则 $g(x)$ 单调递减，$g(x)<g(0)=0$，所以在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 上 $f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，$f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{2}{\pi}$，即

$$\sin x > \frac{2x}{\pi},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

方法二 设$f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi},\ f''(x)=-\sin x<0,$$



所以曲线$f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$内是凸的，又$f(0)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，所以$f(x)=\sin x-\frac{2x}{\pi}>0$，即

$$\sin x > \frac{2x}{\pi},\ x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

例 6.20 证明：$\left(\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right)^2<\frac{1}{x(1+x)^2}(x>0)$.

证明 只要证明当$x>0$时，$\left|\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)}<0$即可.

令
$$f(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}=\ln(1+x)-\ln x-\frac{1}{1+x},$$

则
$$f'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}$$

$$=\frac{(1+x)x-(1+x)^2+x}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{-1}{x(1+x)^2}<0,$$

又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，所以$f(x)>0$.

令
$$g(x)=\ln\frac{1+x}{x}-\frac{1}{1+x}-\frac{1}{\sqrt{x}(1+x)},$$

则
$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(1+x)^2}+\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+x)+\sqrt{x}}{x(1+x)^2}$$

$$=\frac{-2\sqrt{x}+1+x+2x}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}=\frac{1+3x-2\sqrt{x}}{2x^{\frac{3}{2}}(1+x)^2}.$$

再令$h(x)=1+3x-2\sqrt{x}$，则$h'(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}}\overset{令}{=\!=}0$，得$x=\frac{1}{9}$，为唯一极小值点，也即最小值点，且$h_{\min}=\frac{2}{3}>0$，故$h(x)>0$，于是$g'(x)>0$，即$g(x)$在$(0,+\infty)$上单调增加，且$\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=0$，所以$g(x)<0$，证毕.

2. 用常数变量化证明不等式

如果欲证的不等式中都是常数，则可以将其中一个或者几个常数变量化，再利用上面所述的导数工具去证明 .

3. 用中值定理证明不等式

主要用拉格朗日中值定理或者泰勒公式 .

例 6.21 设 $0<a<b$，证明不等式

$$\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}} .$$

证明 先证右边的不等式 .

设
$$\varphi(x)=\ln x-\ln a-\frac{x-a}{\sqrt{ax}}(x>a>0),$$

因为
$$\varphi'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{a}}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{a}{2x\sqrt{x}}\right)=\frac{2\sqrt{ax}-x-a}{2x\sqrt{ax}}=-\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})^2}{2x\sqrt{ax}}<0,$$

故当 $x>a$ 时，$\varphi(x)$ 单调减少，又 $\varphi(a)=0$，所以当 $x>a$ 时，$\varphi(x)<\varphi(a)=0$，即

$$\ln x-\ln a<\frac{x-a}{\sqrt{ax}},$$

特别地，当 $x=b>a$ 时，便有
$$\ln b-\ln a<\frac{b-a}{\sqrt{ab}},$$

即
$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}} .$$

再证左边的不等式 .

设
$$f(x)=\ln x(x>a>0),$$

由拉格朗日中值定理知，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=(\ln x)'\big|_{x=\xi}=\frac{1}{\xi} .$$

由于 $0<a<\xi<b$，且 $a^2+b^2>2ab$，所以 $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{b}>\frac{2a}{a^2+b^2}$，从而有

$$\frac{\ln b-\ln a}{b-a}=\frac{1}{\xi}>\frac{2a}{a^2+b^2} .$$

综上，不等式 $\frac{2a}{a^2+b^2}<\frac{\ln b-\ln a}{b-a}<\frac{1}{\sqrt{ab}}$ 成立 .

基础习题精练

习题

6.1 设常数$k>0$，函数$f(x)=\ln x-\dfrac{x}{\mathrm{e}}+k$在$(0,+\infty)$内的零点个数为（　　）.

(A)3　　(B)2　　(C)1　　(D)0

6.2 设实数$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$满足$a_0+\dfrac{a_1}{2}+\dfrac{a_2}{3}+\cdots+\dfrac{a_n}{n+1}=0$．证明：方程

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$$

在$(0,1)$内至少有一个根.

6.3 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内可导，且$f(a)=f(b)=0$，证明：

(1) 存在$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$；

(2) 存在$\eta\in(a,b)$，使$\eta f(\eta)+f'(\eta)=0$．

6.4 设$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)$．

6.5 已知$f(x)$在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0$, $f(1)=1$．证明：

(1) 存在$\xi\in(0,1)$，使得$f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在$\eta, \tau\in(0,1)$, $\eta\neq\tau$，使得$f'(\eta)f'(\tau)=1$．

6.6 设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续$(0<a<b)$，在(a,b)内可导，且$f(a)\neq f(b)$．证明：存在$\xi, \eta\in(a,b)$，使得$\dfrac{f'(\xi)}{2\xi}=\dfrac{f'(\eta)}{b+a}$．

6.7 设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$, $\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$，证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\geqslant 8$．

6.8 设当$x>0$时，方程$kx+\dfrac{1}{x^2}=1$有且仅有一个根，求k的取值范围．

6.9 证明$0<x<\dfrac{\pi}{4}$时，有$\tan x<\dfrac{4}{\pi}x$．

6.10 证明对任意$x\in(-\infty,+\infty)$，都有$x-x^2<\dfrac{1}{\mathrm{e}}$．

解答

6.1　(B)　**解**　易知 $f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{\mathrm{e}}$．当 $x>\mathrm{e}$ 时，$f'(x)<0$；当 $0<x<\mathrm{e}$ 时，$f'(x)>0$，故在 $(0,\mathrm{e})$ 和 $(\mathrm{e},+\infty)$ 内 $f(x)$ 分别至多有一个零点，又 $f(\mathrm{e})=k>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有两个零点．故答案选 (B).

6.2　**证明**　令 $F(x)=a_0x+\frac{a_1}{2}x^2+\frac{a_2}{3}x^3+\cdots+\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$，$0\leqslant x\leqslant1$，显然 $F(0)=0$，且

$$F(1)=a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0,$$

故由罗尔定理知，存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $a_0+a_1\xi+a_2\xi^2+\cdots+a_n\xi^n=0$，故方程在 $(0,1)$ 内至少有一个根．

6.3　**证明**　(1) 设 $\varphi(x)=xf(x)$，则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，由罗尔定理得，存在 $\xi\in(a,b)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$ ．

(2) 设 $F(x)=\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}f(x)$，则 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $F(a)=F(b)=0$，由罗尔定理得，存在 $\eta\in(a,b)$，使 $F'(\eta)=\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}f'(\eta)+\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}\cdot\eta\cdot f(\eta)=0$，由于 $\mathrm{e}^{\frac{\eta^2}{2}}\neq0$，则有 $\eta f(\eta)+f'(\eta)=0$ ．

6.4　**证明**　注意到 $3x^2f(x)+x^3f'(x)$ 是 $x^3f(x)$ 的导函数，故令 $F(x)=x^3f(x)$，易知 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，即 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，于是得

$$F(1)-F(0)=F'(\xi),\ \xi\in(0,1),$$

即

$$f(1)=3\xi^2f(\xi)+\xi^3f'(\xi)\ .$$

6.5　**证明**　(1) 令 $F(x)=f(x)-1+x$，可得 $\begin{cases}F(0)=f(0)-1+0=-1<0,\\F(1)=f(1)-1+1=1>0,\end{cases}$ 由零点定理可知，存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$ ．

(2) 用 ξ 将 $[0,1]$ 划分为 $[0,\xi]$，$[\xi,1]$，再用拉格朗日中值定理有

$$f(\xi)-f(0)=f'(\eta)(\xi-0),\ \eta\in(0,\xi),$$

$$f(1)-f(\xi)=f'(\tau)(1-\xi),\ \tau\in(\xi,1),$$

则

$$f'(\eta)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{1-\xi}{\xi},\ f'(\tau)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{\xi}{1-\xi}\ .$$

故 $f'(\eta)f'(\tau)=1$ ．

6.6 证明 对$f(x)$在$[a, b]$上应用拉格朗日中值定理，则

$$f(b)-f(a)=f'(\eta)(b-a), \eta \in (a, b),$$

对$f(x)$, x^2在$[a, b]$上应用柯西中值定理，则

$$\frac{f(b)-f(a)}{b^2-a^2}=\frac{f'(\xi)}{2\xi}, \xi \in (a, b),$$

所以$f(b)-f(a)=\frac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2-a^2)$，则

$$f'(\eta)(b-a)=\frac{f'(\xi)}{2\xi}(b^2-a^2),$$

即$\frac{f'(\xi)}{2\xi}=\frac{f'(\eta)}{b+a}$.

6.7 分析 由于题目是证明存在$\xi \in (0, 1)$，使得$f''(\xi) \geqslant 8$，因此可以考虑利用一阶泰勒公式 .

证明 由于$f(x)$在$[0, 1]$上连续，因此存在$x_0 \in [0, 1]$，使得$f(x_0)=\min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}=-1$.

由于$f(0)=f(1)=0>f(x_0)$，因此$x_0 \in (0, 1)$，从而有$f'(x_0)=0$.

由于$f(x)$在$[0, 1]$上二阶可导，因此由一阶泰勒公式知，对任意$x \in [0, 1]$，有

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(\eta)(x-x_0)^2 \\ &= -1+\frac{1}{2}f''(\eta)(x-x_0)^2 \text{（}\eta\text{是介于}x_0\text{与}x\text{之间的实数）}. \end{aligned}$$

于是当$x=0$时，$f(0)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_1)x_0^2$，即

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{x_0^2} \text{（}\xi_1\text{是对应}x=0\text{时的}\eta\text{）};$$

当$x=1$时，$f(1)=-1+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(1-x_0)^2$，即

$$f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-x_0)^2} \text{（}\xi_2\text{是对应}x=1\text{时的}\eta\text{）}.$$

记$f''(\xi)=\max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\}$，则$\xi=\xi_1$或$\xi_2$. 于是存在$\xi \in (0, 1)$，使得

$$f''(\xi)=2\max\left\{\frac{1}{x_0^2}, \frac{1}{(1-x_0)^2}\right\} \geqslant 2\times\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8 \text{（见图 6-2）}.$$

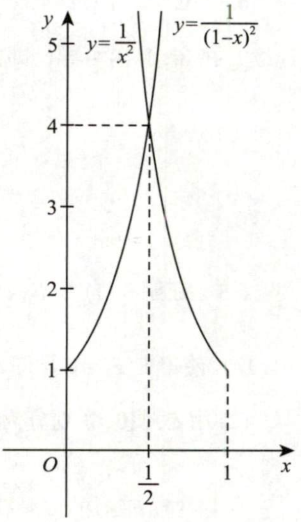


图 6-2

> **【注】**当要证明存在$\xi \in (a,b)$，使得$f''(\xi)$大于或小于某个非零常数时，往往利用泰勒公式．这是因为泰勒公式是拉格朗日中值定理的推广，它较拉格朗日中值定理更能揭示所给函数在中值ξ处的性质．

6.8　解　设$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1(x>0)$，则$f'(x)=k-\frac{2}{x^3}$，$f''(x)=\frac{6}{x^4}>0$．

当$k\leqslant 0$时，$f'(x)<0$，$f(x)$为单调递减函数．又

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=+\infty,\ \lim_{x\to +\infty}f(x)=\begin{cases}-\infty, & k<0,\\ -1, & k=0,\end{cases}$$

所以当$k\leqslant 0$时，$f(x)=kx+\frac{1}{x^2}-1=0$在$(0,+\infty)$内仅有一个根．

当$k>0$时，令$f'(x)=0$，得唯一驻点$x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$．又$f''(x)>0$，所以$x=\sqrt[3]{\frac{2}{k}}$为极小值点，且$y=f(x)$的图形在$(0,+\infty)$内是凹的，所以当极小值为零，即

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)=k\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{k}}+\frac{1}{\left(\sqrt[3]{\frac{2}{k}}\right)^2}-1=0$$

时，原方程有且仅有一个根．由上式解得$k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$．

综上，当$k\leqslant 0$或$k=\frac{2}{9}\sqrt{3}$时，方程有且仅有一个根．

6.9　证明　设$f(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}x$，$x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$，则

$$f'(x)=\sec^2 x-\frac{4}{\pi},\ f''(x)=2\sec^2 x\tan x>0,$$

所以曲线$f(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}x$在$\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$内是凹的．又$f(0)=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=0$，所以$f(x)=\tan x-\frac{4}{\pi}x<0$，即

$$\tan x<\frac{4}{\pi}x,\ x\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right).$$

6.10　证明　令$F(x)=\frac{1}{\mathrm{e}}-x+x^2$，由$F'(x)=-1+2x=0$，得唯一驻点$x=\frac{1}{2}$，且$F''(x)=2>0$，所以$F\left(\frac{1}{2}\right)$为函数$F(x)$的最小值，又$F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{\mathrm{e}}-\frac{1}{4}>0$，故对任意的$x\in(-\infty,+\infty)$，都有

$$F(x)\geqslant F\left(\frac{1}{2}\right)>0.$$

故$\frac{1}{\mathrm{e}}-x+x^2>0$，即$x-x^2<\frac{1}{\mathrm{e}}$．

第7讲 一元函数微分学的应用（三）——物理应用与经济应用

基础知识结构

- 物理应用与相关变化率（仅数学一、数学二）
  - 物理应用
  - 相关变化率
- 复利与连续复利（仅数学三）
- 导数的经济应用（仅数学三）
  - 经济学中常见的函数
  - 边际函数与边际分析
  - 弹性函数与弹性分析

基础内容精讲

一、物理应用与相关变化率（仅数学一、数学二）

1. 物理应用

已知质点运动的位移 s 关于时间 t 的函数为 $s=s(t)$，称它为质点的运动方程（位移方程），则其速度为

$$v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t), \xrightarrow{} v(t)=\frac{ds}{dt}$$

其加速度为

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=\frac{dv}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}\left(或=\frac{d\left(\frac{ds}{dt}\right)}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2}\right) \leftarrow a(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'(t)=s''(t).$$

这就是导数的物理意义.

2. 相关变化率

$f'(x)$已知，若告之$\frac{dx}{dt}$，则$\frac{dy}{dt}$便可求.

若函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ 确定且可导，则 $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=f'(x)\frac{dx}{dt}$，上式中，$\frac{dy}{dt}$ 与 $\frac{dx}{dt}$ 由

$f'(x)$联系在一起，称这种相互关联的变化率为**相关变化率**．

例 7.1 已知动点P在曲线$y=x^3$上运动，记坐标原点与点P间的距离为l．若点P的横坐标对时间的变化率为常数v_0，则当点P运动到点$(1,1)$时，l对时间的变化率是______．

解 应填$2\sqrt{2}v_0$．

由题设知$l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，则

$$\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\cdot v_0,$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}t}\right|_{x=1}=\frac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0 .$$

二、复利与连续复利（仅数学三）

复利计算公式为

$$A_m=A(1+r)^m,$$

其中A表示一开始的本金，r表示每一期的利率，m表示复利的总期数，A_m表示m期后的余额．

①如果年利率为r的利息一年支付1次，那么当初始存款为A元时，t年后余额A_t则为

$$A_t=A(1+r)^t .$$

②如果年利率为r的利息一年支付n次，那么当初始存款为A元时，t年后余额A_t则为

$$A_t=A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt} .$$

记 $A\mathrm{e}^{rt}=R\Rightarrow \underset{\text{现值}}{A=R\mathrm{e}^{-rt}}$

③对于②，当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}A_t=\lim\limits_{n\to\infty}A\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=A\mathrm{e}^{rt}$，这称为**连续复利**．

【注】考试时要弄清楚①，②，③三种情况，题目会明确告知．

例 7.2 设某酒厂有一批新酿的好酒，如果现在（假定$t=0$）就售出，总收入为R_0元；如果窖藏起来，待来日按陈酒价格出售，t年末总收入为$R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$．假定银行的年利率$r$为6%，并以连续复利计息，若$t_0$年售出可使总收入的现值最大，则窖藏的时间$t_0$ =______.

解 应填 11.

根据连续复利公式，这批酒在窖藏t年末售出时总收入R的现值为$A(t)=R\mathrm{e}^{-rt}$，而$R=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}}$，故$A(t)=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}$．令$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=R_0\mathrm{e}^{\frac{2}{5}\sqrt{t}-rt}\left(\frac{1}{5\sqrt{t}}-r\right)=0$，得驻点$t_0=\frac{1}{25r^2}$．当$0<t_0<\frac{1}{25r^2}$时，$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}>0$；当

$t_0 > \dfrac{1}{25r^2}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} < 0$.

于是，$t_0 = \dfrac{1}{25r^2}$ 是极大值点亦是最大值点，故窖藏 $t_0 = \dfrac{1}{25r^2}$ 年售出可使总收入的现值最大 . 当 $r = 6\%$ 时，$t_0 = \dfrac{100}{9} \approx 11$（年）.

三、导数的经济应用（仅数学三）

1. 经济学中常见的函数

在无特殊说明下，均为价格 p 的函数

(1) 需求函数 .

设某产品的需求量为 Q，价格为 p，则 $Q = Q(p)$ 称为**需求函数**，且 Q 一般为单调减少函数 .

(2) 供给函数 .

设某产品的供给量为 q，价格为 p，则 $q = q(p)$ 称为**供给函数**，且 q 一般为单调增加函数 .

在无特殊说明下，均为产量(销量) Q 的函数(产销平衡)

(3) 成本函数 .

设生产产品的总投入为 C，它由固定成本 C_1（常量）和可变成本 $C_2(Q)$ 两部分组成，其中 Q 表示产量 . 成本函数为 $C = C(Q) = C_1 + C_2(Q)$，称 $\dfrac{C}{Q}$ 为**平均成本**，记为 $\overline{C}$ 或 AC，即

$$AC = \overline{C} = \frac{C}{Q} = \frac{C_1}{Q} + \frac{C_2(Q)}{Q} .$$

(4) 收益（入）函数 .

设产品售出后所得的收益为 R，则

$$R = R(Q) = pQ ,$$

其中 p 是价格，Q 是销售量 .

(5) 利润函数 .

设收益扣除成本后的利润为 L，则

$$L = L(Q) = R(Q) - C(Q) ,$$

其中 Q 为销售量 .

2. 边际函数与边际分析

在经济学中，若函数 $f(x)$ 可导，则称 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数** . $f'(x_0)$ 称为 $f(x)$ 在 x_0 点的**边际值** . 用边际函数来分析经济量的变化叫**边际分析** .

由 $\Delta y \approx \mathrm{d}y$，即 $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$，取 $\Delta x = 1$，得 $f(x_0 + 1) - f(x_0) \approx f'(x_0)$.

于是，边际值 $f'(x_0)$ 被解释为：在 x_0 点，当 x 改变一个单位时，函数 $f(x)$ 近似（在实际问题中，经

常略去“近似”二字）改变$|f'(x_0)|$个单位．$f'(x_0)$的符号反映自变量的改变与因变量的改变是同向还是反向．

(1) 边际成本．

设总成本函数为$C=C(Q)$（Q为产量），则**边际成本函数**（记为MC）为$MC=C'(Q)$.

(2) 边际收益．

设总收益函数为$R=R(Q)$（Q为销售量），则**边际收益函数**（记为MR）为$MR=R'(Q)$.

(3) 边际利润．

设利润函数为$L=L(Q)$（Q为销售量），则**边际利润函数**（记为ML）为$ML=L'(Q)$.

3. 弹性函数与弹性分析

在经济学中，把因变量对自变量变化的反应的灵敏度，称为**弹性**或**弹性系数**．设函数$y=f(x)$可导，称

$$\eta=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{y}\bigg/\frac{\Delta x}{x}=\frac{x}{y}y'=\frac{x}{f(x)}f'(x)$$

为函数$y=f(x)$的**弹性函数**，称

$$\eta\bigg|_{x=x_0}=\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)$$

为函数$f(x)$在x_0处的**（点）弹性**．

$\eta\Big|_{x=x_0}$表示在x_0处，当自变量x改变1%时，因变量y将改变$\left|\eta\Big|_{x=x_0}\right|\%=\left|\frac{x_0}{f(x_0)}f'(x_0)\right|\%$，其符号反映自变量$x$与因变量$y$的改变是同向还是反向．

用弹性函数来分析经济量的变化叫**弹性分析**．

(1) 需求的价格弹性．

$$\eta_d=\frac{EQ}{Ep}=\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{Q(p)}Q'(p)\ .$$

一般地，需求函数单调减少，故$Q'(p)<0$，从而$\eta_d<0$．

其经济意义：当价格为p时，若提价（降价）1%，则需求量将减少（增加）$|\eta_d|\%$．

【注】若题设要求$\eta_d>0$，则取$\eta_d=-\frac{p}{Q(p)}Q'(p)$．

(2) 供给的价格弹性．

$$\eta_s=\frac{Eq}{Ep}=\frac{p}{q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{q(p)}q'(p)\ .$$

一般地，供给函数单调增加，故$q'(p)>0$，从而$\eta_s>0$．

其经济意义：当价格为p时，若提价（降价）1%，则供给量将增加（减少）$\eta_s\%$．

(3) 收益的价格弹性 .

$$\eta_r=\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{R(p)}R'(p) .$$

一般地，收益函数单调增加，故$R'(p)>0$，从而$\eta_r>0$.

其经济意义：当价格为p时，若提价（降价）1%，则收益将增加（减少）η_r% .

例 7.3 设生产某商品的固定成本为60 000元，可变成本为20元/件，价格函数为$p=60-\frac{Q}{1\,000}$（p是单价，单位：元；Q是销量，单位：件）. 已知产销平衡，求：

(1) 该商品的边际利润函数；

(2) 当$p=50$元时的边际利润，并解释其经济意义；

(3) 使得利润最大的单价p .

解 (1) 成本函数$C(Q)=60\,000+20Q$，收益函数$R(Q)=pQ=60Q-\frac{Q^2}{1\,000}$，利润函数

$$L(Q)=R(Q)-C(Q)=-\frac{Q^2}{1\,000}+40Q-60\,000 ,$$

故该商品的边际利润函数$L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40$.

(2) 当$p=50$元时，销量$Q=10\,000$件，$L'(10\,000)=20$元 .

其经济意义：销售第10 001件商品所得利润为20元 .

(3) 令$L'(Q)=-\frac{Q}{500}+40=0$，得$Q=20\,000$件，且$L''(20\,000)<0$，故当$Q=20\,000$件时利润最大，此时$p=40$元 .

例 7.4 设某商品需求量Q是价格p的单调减少函数：$Q=Q(p)$，其中需求弹性$\eta=\frac{2p^2}{192-p^2}>0$.

(1) 设$R=R(p)$为总收益函数，证明$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q(1-\eta)$；

(2) 当$p=6$时，求总收益对价格的弹性，并说明其经济意义 .

(1) **证明** 由题设得$R(p)=pQ(p)$，两边对p求导，得

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=Q+p\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}=Q\left(1+\frac{p}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}p}\right)=Q(1-\eta) .$$

(2) **解** $\frac{ER}{Ep}=\frac{p}{R}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}p}=\frac{p}{pQ}Q(1-\eta)=1-\eta=1-\frac{2p^2}{192-p^2}=\frac{192-3p^2}{192-p^2}$.

$$\left.\frac{ER}{Ep}\right|_{p=6}=\frac{192-3\times6^2}{192-6^2}=\frac{7}{13}\approx0.54 .$$

其经济意义：当$p=6$时，若价格上涨1%，则总收益将增加0.54%．

例 7.5 设某商品需求量Q对价格P的弹性为$\eta(\eta>0)$，R为收益，则（ ）．

(A) 当$\eta<1$，$\Delta P>0$时，$\Delta R>0$

(B) 当$\eta<1$，$\Delta P<0$时，$\Delta R>0$

(C) 当$\eta>1$，$\Delta P>0$时，$\Delta R>0$

(D) 当$\eta>1$，$\Delta P<0$时，$\Delta R<0$

解 应选 (A).

$$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}P}=Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q+Q\cdot\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=Q(1-\eta)\ .$$

当$\eta<1$时，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}>0$，即$\Delta P\underset{(<0)}{>}0$时，$\Delta R\underset{(<0)}{>}0$．

当$\eta>1$时，$\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}<0$，即$\Delta P\underset{(<0)}{>}0$时，$\Delta R\underset{(>0)}{<}0$．故选 (A).

基础习题精练

习题

7.1 （仅数学一、数学二）质点P沿抛物线$x=y^2(y>0)$移动，P的横坐标x对时间的变化率为5 cm/s．当$x=9$时，点P到原点O的距离对时间的变化率为______．

7.2 （仅数学三）设某产品的需求函数为$Q=Q(P)$，需求的价格弹性为ε，$0<\varepsilon<1$．已知产品收益R对价格的边际为s，且产销平衡，则产品的产量应是______（用ε，s的函数表示）.

7.3 （仅数学一、数学二）甲车以24 km/h的速度向北行驶，同时正东10 km处乙车以20 km/h的速度向东行驶．从这一时刻起经过1小时后，求两车间的距离对时间的变化率．

7.4 （仅数学三）已知某企业的总收入函数为$R=26x-2x^2-4x^3$，总成本函数为$C=8x+x^2$，其中x表示产品的产量，求利润函数、边际收入函数、边际成本函数以及企业获得最大利润时的产量和最大利润．

解答

7.1 $\frac{95}{6\sqrt{10}}$ cm/s　**解**　点P到原点O的距离$s=\sqrt{x^2+y^2}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x^2+x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{5(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}},$$

当$x=9$时，$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sqrt{x^2+y^2}\right|_{x=9}=\left.\frac{5(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}\right|_{x=9}=\frac{95}{6\sqrt{10}}(\mathrm{cm/s})$.

7.2 $\frac{s}{1-\varepsilon}$　**解**　需求的价格弹性为$-\frac{Q'}{Q}P$，其中Q为需求量，即产量，P为价格．依题意，$-\frac{Q'}{Q}P=\varepsilon$，即

$$PQ'=-\varepsilon Q .$$

收益函数$R=PQ$，它对价格的边际为$\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$，由题意，

$$s=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=Q+PQ'=(1-\varepsilon)Q,$$

所以$Q=\frac{s}{1-\varepsilon}$.

7.3　**解**　设甲车最初在原点O处，乙车在C处，$OC=10\,\mathrm{km}$，在t小时后，甲在A点，乙在B点，如图 7-1 所示．设$AB=s$, $OA=x$, $CB=y$，则$s=\sqrt{x^2+(y+10)^2}$，其中$s=s(t)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$都是关于t的函数．写成

$$s^2=x^2+(y+10)^2,$$

两边对t求导，得$2s\cdot\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+2(y+10)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$，即

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+(y+10)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\sqrt{x^2+(y+10)^2}} .$$

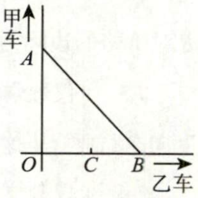


图 7-1

上式表达了三个变化率$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$之间的关系．已知$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=24$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=20$．当$t=1$时，$x=24$, $y=20$，代入上式，得$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=\frac{196}{\sqrt{41}}\approx 30.6(\mathrm{km/h})$.

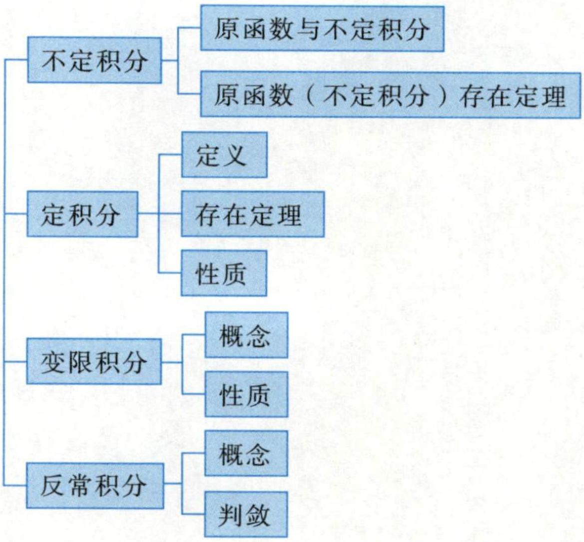
7.4　**解**　利润函数$L=R-C=18x-3x^2-4x^3$，边际收入函数$MR=\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}=26-4x-12x^2$，边际成本

函数$MC=\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=8+2x$.

令$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x}=18-6x-12x^2=0$得$x=1$, $x=-\frac{3}{2}$（舍去）. 又$\left.\frac{\mathrm{d}^2L}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=1}=\left.(-6-24x)\right|_{x=1}=-30<0$，可知当$x=1$时，$L$取得极大值，为$\left.L\right|_{x=1}=\left.(18x-3x^2-4x^3)\right|_{x=1}=11$. 因为$x>0$时，$L(x)$只有一个极大值，故此极大值就是最大值 . 所以当产量为 1 时利润最大，最大利润为 11.

第8讲 一元函数积分学的概念与性质

基础知识结构



基础内容精讲

一、不定积分

1. 原函数与不定积分

全体原函数

设函数$f(x)$定义在某区间I上，若存在可导函数$F(x)$，对于该区间上任意一点都有$F'(x)=f(x)$成立，则称$F(x)$是$f(x)$在区间I上的一个**原函数**．称$\int f(x)\mathrm{d}x=F(x)+C$为$f(x)$在区间$I$上的**不定积分**．

> **【注】**谈到函数$f(x)$的原函数与不定积分，必须指明$f(x)$所定义的区间．

例 8.1 设$0<x<1$，且$\int(1-x^2)f(x^2)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则$f(x)=$（　　）．

(A) $(1-x)^{\frac{3}{2}}$　(B) $(1-x)^{-\frac{3}{2}}$　(C) $(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$　(D) $(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

解　应选 (B).

根据原函数 $F(x)$ 的定义 $F'(x)=f(x)$ 求解 .

将所给表达式的等式两端分别关于 x 求导，得

$$\left[\int(1-x^2)f(x^2)\mathrm{d}x\right]'=(\arcsin x+C)',$$

即
$$(1-x^2)f(x^2)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

故
$$f(x^2)=(1-x^2)^{-\frac{3}{2}},$$

$$f(x)=(1-x)^{-\frac{3}{2}}.$$

故选 (B).

例 8.2　函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为（　　）.

(A) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$　(B) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\cos x-\sin x, & x>0\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right), & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$　(D) $F(x)=\begin{cases}\ln\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)+1, & x\leqslant 0,\\ (x+1)\sin x+\cos x, & x>0\end{cases}$

解　应选 (D).

由 $F'(x)=f(x)$ 知，$F(x)$ 必连续，故可排除 (A)，(C).

又当 $x>0$ 时，$[(x+1)\cos x-\sin x]'=-(x+1)\sin x\neq(x+1)\cos x$，故可排除 (B). 因此选 (D).

2. 原函数（不定积分）存在定理

(1) 连续函数 $f(x)$ 必有原函数 $F(x)$.

【注】 证明：如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $[a,b]$ 上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

证明　若 $x\in(a,b)$，取 Δx 使 $x+\Delta x\in(a,b)$，则

$$\Delta F=F(x+\Delta x)-F(x)=\int_a^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t,$$

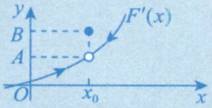
使用积分中值定理，有 $\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t=f(\xi)\Delta x$，其中 ξ 介于 x 与 $x+\Delta x$ 之间，当 $\Delta x\to 0$ 时，$\xi\to x$，于是

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x)\ .$$

若 $x=a$，取 $\Delta x>0$，则同理可证 $F'_{+}(a)=f(a)$；若 $x=b$，取 $\Delta x<0$，则同理可证 $F'_{-}(b)=f(b)$.

(2) 含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内必没有原函数 $F(x)$.

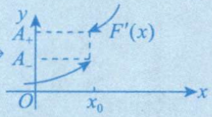
【注 1】证明 设 $F(x)$ 为 $f(x)$ 在 I 内的一个原函数，则 $F(x)$ 在 I 内可导，且 $F'(x)=f(x)$，并设 $x=x_0\in I$ 为 $F'(x)$ 的间断点，我们讨论如下三种情况：



(1) $x=x_0$ 为可去间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0}F'(x)$ 存在且为 A，但 $A\neq F'(x_0)$，而

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}F'(x)=A,$$

矛盾；



(2) $x=x_0$ 为跳跃间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F'(x)$ 存在且为 A_+，$\lim\limits_{x\to x_0^-}F'(x)$ 存在且为 A_-，但 $A_+\neq A_-$，而

$$F'_{+}(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0^+}F'(x)=A_+,$$

F(x)在I上处处可导.

$$F'_{-}(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0^-}F'(x)=A_-,$$

又 $F'(x_0)$ 是存在的，则 $F'_{+}(x_0)=F'_{-}(x_0)$，即 $A_+=A_-$，矛盾；

(3) $x=x_0$ 为无穷间断点，即 $\lim\limits_{x\to x_0}F'(x)=\infty$，而

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to x_0}F'(x)=\infty,$$

又 $F'(x_0)$ 是存在的，矛盾 .

综上所述，(1)，(2) 和 (3) 的情形均不存在原函数，即导函数 $F'(x)$ 在 I 内必定没有第一类间断点和无穷间断点，也即含有第一类间断点和无穷间断点的函数 $f(x)$ 在包含该间断点的区间内没有原函数 $F(x)$.

【注 2】含有振荡间断点的函数是否有原函数呢？这是不确定的 . 举例来说，对于

$$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 上不连续，它有一个振荡间断点 $x=0$，但是它在 $(-\infty,+\infty)$ 上存在原函数

$$F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

即对于 $(-\infty,+\infty)$ 上任一点都有 $F'(x)=f(x)$ 成立.

当然，对于

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其在 $(-\infty,+\infty)$ 上也有一个振荡间断点 $x=0$，但其在 $(-\infty,+\infty)$ 上没有原函数.

【注 3】 综合以上几点，可以得出重要结论：可导函数 $F(x)$ 求导后的函数 $F'(x)=f(x)$ 不一定是连续函数，也可能有振荡间断点.

$$若\ F(x)\ 处处可导 \Rightarrow F'(x)\begin{cases}连续函数\\ 含振荡间断点的函数\end{cases}$$

二、定积分

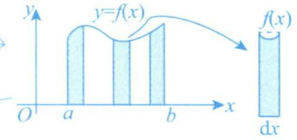
1. 定义

①分割；②近似；③求和；④取极限.

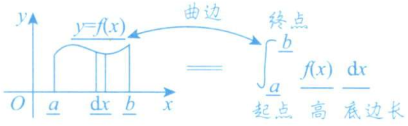
(1) 定积分的概念.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，在 (a,b) 上任取 $n-1$ 个分点 $x_i(i=1,2,3,\cdots,n-1)$，定义 $x_0=a$ 和 $x_n=b$，且 $a=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$，记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$k=1,2,3,\cdots,n$．并任取一点 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k]$，记 $\lambda=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$，若当 $\lambda\to0$ 时，极限 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k$ 存在且与分点 x_i 及点 ξ_k 的取法无关，则称函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to0}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta x_k.$$



如果你问我，积分号“$\int$”是怎么来的，我情愿你这样看：



但事实上，积分号“$\int$”是莱布尼茨给出的，在德国小城汉诺威（莱布尼茨在这里度过了人生的最后时光）的莱布尼茨纪念馆的一份他的手稿中，明确写到：$\int$ 来自“*summa*”的首字母 s 拉长，写成了“$\int$”.

【注】 定积分的定义是由德国数学家波恩哈德 · 黎曼 (Bernhard Riemann) 给出的，故这种积分又被称为**黎曼积分**.

黎曼

(1826—1866)

(2) 几何意义.

在 $[a, b]$ 上，① 若 $f(x) \geqslant 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、直线 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形的面积；②若 $f(x) \leqslant 0$，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示由曲线 $y=f(x)$、直线 $x=a$、直线 $x=b$ 与 x 轴所围成的曲边梯形面积的负值；③若 $f(x)$ 既有正值又有负值（见图 8-1），定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 表示 x 轴上方图形的面积减去 x 轴下方图形的面积.

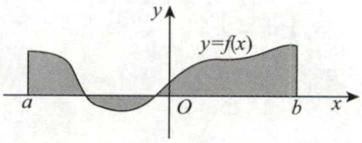


图 8-1

(3) 定积分的精确定义.

当定积分存在时，存在两个“任取”：分点 x_i 任取，一点 $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ 任取. 故可作两个“特取”：将 $[a, b]$ n 等分且取每个小区间的右端点为 ξ_i（见图 8-2)，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n} .$$

① n 等分并取右端点高；
② 近似；
③ 求和；
④ 取极限.

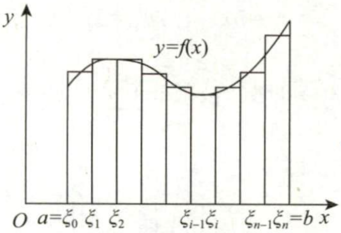


图 8-2

取左端点高：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

若将式子中的 a, b 特殊化为 0, 1 这两个数，得出的形式更为简单：

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\frac{1}{n} .$$

(4) 定积分的值与字母无关.

当定积分存在时，有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u ,$$

这就是说，定积分的值只与被积函数及积分区间有关，而与积分变量的记法无关.

2. 存在定理

定积分的存在性，也称**一元函数的（常义）可积性**. 这里的“常义”是指“区间有限，函数有界”，也有人称为“黎曼”可积性，与后面要谈到的“区间无穷，函数无界”的“反常”积分有所区别. 在本讲中所谈到的可积性都是指常义可积性.

按照《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》，定积分存在定理包括下面两个方面．

(1) 定积分存在的充分条件．

①若$f(x)$在$[a,b]$上连续，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在．

②若$f(x)$在$[a,b]$上单调，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在．

③若$f(x)$在$[a,b]$上有界，且只有有限个间断点，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在．

(2) 定积分存在的必要条件．

可积函数必有界，即若定积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$存在，则$f(x)$在$[a,b]$上必有界．

【注 1】关于定积分存在的必要条件，不妨这样理解：当我们任意分割图形底边为若干小段时，若$f(x)$在区间$[a,b]$上无界，则至少存在一个小段Δx，在Δx上，$f(x)$可以任意大，于是一个“小竖条”的面积$f(x)\Delta x$便可以无穷大，这样整个曲边梯形的面积就是无穷大，于是极限就不存在了，所以可积函数必有界．

【注 2】函数不定积分存在定理与定积分存在定理的区别与联系见例 8.3.

3. 性质（假设以下积分均存在）

两个规定：

(1) 当$b=a$时，$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x=0$；

(2) 当$a>b$时，$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=-\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$．

性质 1（求区间长度） 假设$a<b$，则$\int_a^b \mathrm{d}x=b-a=L$，其中$L$为区间$[a,b]$的长度．

性质 2（积分的线性性质） 设k_1，k_2为常数，则$\int_a^b [k_1 f(x)\pm k_2 g(x)]\mathrm{d}x=k_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\pm k_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$．

性质 3（积分的可加（拆）性） 无论a，b，c的大小如何，总有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$．

性质 4（积分的保号性） 若在区间$[a,b]$上$f(x)\leqslant g(x)$，则有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$．

特殊地，有
$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x .$$

【注】事实上，设$f(x)$是$[a,b]$上非负的连续函数，只要$f(x)$不恒等于零，则必有
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0 .$$

在有些积分不等式的证明与定积分值的估计中，要求获得严格的不等式结果，便需要用到这个结论，其证明见例 8.7.

性质 5(估值定理) 设 M，m 分别是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，L 为区间 $[a, b]$ 的长度，则有

$$mL \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant ML .$$

性质 6(中值定理) 设 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，则在 $[a, b]$ 上至少存在一点 ξ，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) .$$

【注】 $\xi \in (a, b)$ 亦成立 .

例 8.3 在区间 $[-1, 2]$ 上，以下四个结论：

①$f(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ -1, & x<0\end{cases}$ 有原函数，但其定积分不存在；

②$f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数，其定积分也存在；

③$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 没有原函数，其定积分也不存在；

④$f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ 有原函数，其定积分也存在 .

正确结论的个数为（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

解 应选 (B).

本题通过具体的例子考查考生是否能够明确区分不定积分与定积分的存在性 . 逐个分析即可 .

对于 $f(x)=\begin{cases}2, & x>0,\\ 1, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 由于 $x=0$ 是其跳跃间断点，根据不定积分存在定理，在任意一个包含 $x=0$ 的区间 $[a, b]$ 上，$f(x)$ 一定不存在原函数，但由于 $f(x)$ 满足定积分存在定理，故定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，所以①错误 .

对于 $f(x)=\begin{cases}2x\sin\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2}{x}\cos\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ $x=0$ 是其振荡间断点，但是容易验证：

若 $F(x)=\begin{cases}x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 则 $F'(x)=f(x)(-\infty<x<+\infty)$，所以 $f(x)$ 存在原函数，但在任意一个包

含 $x=0$ 的区间 $[a,b]$ 上，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 不存在，因为在 $x=0$ 的邻域内 $f(x)$ 无界，所以②错误．

$\infty \cdot \cos\infty$ 是无界振荡.

对于 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 由于 $x=0$ 是其无穷间断点，所以 $f(x)$ 在包含 $x=0$ 的区间 $[a,b]$ 上不存在原函数，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也不存在，所以③正确．

对于 $f(x)=\begin{cases}2x\cos\dfrac{1}{x}+\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 它在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在原函数 $F(x)=\begin{cases}x^2\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 并且在任意一个包含 $x=0$ 的区间 $[a,b]$ 上，定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也存在，因为 $f(x)$ 有界且只有一个振荡间断点，所以④正确．

综上所述，答案选择 (B).

例 8.4　设可导函数 $y=f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上的值域是 $[0,+\infty)$，$f(0)=0$，$f'(x)>0$，$x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数．记 $I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi(y)\mathrm{d}y$，常数 $a,b>0$，当 $a<\varphi(b)$ 时，则（　　）．

(A) $I>ab$　　　　(B) $I<ab$

(C) $I=ab$　　　　(D) I 与 ab 的大小关系不确定

解　应选 (A).

由题设易知，$f(x)$ 是过原点，且在 $[0,+\infty)$ 上单调递增的函数．已知 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，则 $x=\varphi(y)$ 与 $y=f(x)$ 在同一坐标系下共线，如图 8-3 所示．

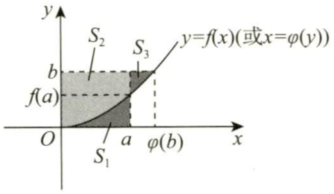


图 8-3

由图 8-3 可知，

$$I=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x+\int_0^b \varphi(y)\mathrm{d}y$$
$$=S_1+S_2+S_3>S_1+S_2=ab,$$

故 $I>ab$．因此选 (A).

例 8.5　$y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$ 在 $[0,+\infty)$ 上与 x 轴所围平面区域的面积写成如下表达式：

$$①\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x;\ ②\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|;\ ③\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|.$$

其中正确表达式的个数是（　　）．

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

解 应选 (C).

由“二、1.(2)”定积分的几何意义，因$y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$在$[0,+\infty)$上既有正值，也有负值，故$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x$表示其在$x$轴上方所围图形的面积减去其在$x$轴下方所围图形的面积，如图 8-4 所示．$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|$表示面积差的绝对值，不符合题意，排除②．

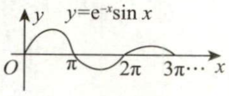


图 8-4

而$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x}\sin x\right|\mathrm{d}x$，表示$\mathrm{e}^{-x}\sin x$在$[0,+\infty)$上与$x$轴所围图形的面积，如图 8-5 所示，符合题意，故①正确．

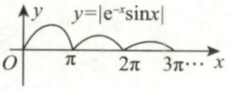


图 8-5

对于③，$\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|$表示在$[k\pi,(k+1)\pi]$上$\mathrm{e}^{-x}\sin x$与$x$轴所围图形的面积，故$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\left|\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|$亦符合题意，故③正确．所以正确的表达式有 2 个．

例 8.6 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+4}+\dfrac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n^2}\right)=$（　　）．

(A) $\int_0^1\dfrac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(B) $\int_0^1\dfrac{1}{1+x}\mathrm{d}x$　　(C) $\int_0^1\dfrac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$　　(D) $\int_0^1\dfrac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 应选 (A).

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+4}+\frac{n+3}{n^2+9}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n+i}{n^2+i^2}$$

对于n项和的极限，先提$\frac{1}{n}$；

若能凑成$f\left(\frac{i}{n}\right)$，则用定积分定义；

若不能，则考虑夹逼准则．

$$\overset{①}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2+ni}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{②}{=\!=}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1+\dfrac{i}{n}}{1+\left(\dfrac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\overset{③}{=\!=}\int_0^1\frac{1+x}{1+x^2}\mathrm{d}x\ .$$

【注】“凑定积分定义”的步骤如下：

①先提出$\dfrac{1}{n}$；②再凑出$\dfrac{i}{n}$；③由于$\dfrac{i}{n}=0+\dfrac{1-0}{n}i$，故$\dfrac{i}{n}$可以读作“0 到 1 上的$x$”，且$\dfrac{1}{n}=\dfrac{1-0}{n}$，读作“0 到 1 上的 dx”，于是，“凑定义”完毕．

例 8.7 设$f(x)$是$[a,b]$上非负的连续函数，且$f(x)$不恒等于零，证明必有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>0$．

证明 因函数$f(x)$在$[a,b]$上不恒等于零，且非负，故至少存在一点$x_0\in(a,b)$，使得$f(x_0)\neq0$，即$f(x_0)>0$．

由连续函数的局部保号性知，存在$\delta>0$与$\eta>0$，使得当$x\in[x_0-\delta,x_0+\delta]\subset[a,b]$时，恒有$f(x)\geqslant\eta>0$．

根据定积分的不等式性质，有$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}f(x)\mathrm{d}x\geqslant\eta\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x=2\eta\delta>0$．

【注】 该命题的推论：若连续函数$f(x)$，$g(x)$满足$f(x)\geqslant g(x)$，且$f(x)$不恒等于$g(x)$，又$a<b$，则必有严格不等式$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x>\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

例 8.8 设$f(x)$在$[a, b]$上连续，证明存在$\xi\in[a, b]$，使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a) .$$

证明 因为$f(x)$在$[a, b]$上连续，所以$f(x)$在$[a, b]$上存在最大值M与最小值m，使得

$$m(b-a)\leqslant\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M(b-a),$$

故

$$m\leqslant\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\leqslant M .$$

由介值定理可知，存在$\xi\in[a, b]$，使得$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，得证 .

【注】 如何证明$\xi\in(a, b)$时，结论仍成立？

设$f(x)$在$[a, b]$上连续，证明存在$\xi\in(a, b)$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)$.

证明 令$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，在$[a, b]$上用拉格朗日中值定理，则$F(b)-F(a)=F'(\xi)(b-a)$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-0=f(\xi)(b-a), \xi\in(a, b),$$

得证 .

见到$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ $\begin{cases}①用积分中值定理：\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(\xi)(b-a)；\\ ②改成\int_a^x f(t)\mathrm{d}t：辅助法.\end{cases}$

考研真题中已经考过，可直接在大题中使用，不必证明 .

例 8.9 设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $I_1>I_2>1$　　(B) $1>I_1>I_2$　　(C) $I_2>I_1>1$　　(D) $1>I_2>I_1$

解 应选 (B).

当$x\in\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$时，$0<\sin x<x<\tan x$，故$\frac{\tan x}{x}>\frac{x}{\tan x}$，则

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x=I_2 .$$

这便排除了选项 (C) 和 (D).

由第 2 讲 “6. 注 (2) ⑦” 重要不等式可知，当$0<x<\frac{\pi}{4}$时，$\frac{\tan x}{x}<\frac{4}{\pi}$，则有$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x<\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}x=1$.

故 (B) 正确 .

例 8.10 设 $M=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x$，$N=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\mathrm{d}x$，则有（　　）.

(A) $M<1<N$　　(B) $M<N<1$　　(C) $N<M<1$　　(D) $1<M<N$

解 应选 (A).

$\sin(\sin x)$, $\cos(\cos x)$ 均在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上连续，由 $\sin x\leqslant x$ 知 $\sin(\sin x)\leqslant\sin x$，且 $\sin(\sin x)\not\equiv\sin x$ $\left(x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right)$，故

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin(\sin x)\mathrm{d}x<\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\mathrm{d}x=1\text{，即}M<1\text{ .}$$

又 $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\cos x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令}x=\frac{\pi}{2}-t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(\sin t)\mathrm{d}t>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t=1\text{，即}N>1\text{，}$$

因此选 (A).

三、变限积分

本质是一个函数.

1. 概念

当 x 在 $[a,b]$ 上变动时，对应于每一个 x 值，积分 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 都有一个确定的值，因此 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是一个关于 x 的函数，记作

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\leqslant x\leqslant b)\text{，}$$

称函数 $F(x)$ 为**变上限的定积分** . 同理可以定义变下限的定积分和上、下限都变化的定积分，这些都称为**变限积分** . 事实上，变限积分就是定积分的推广 .

2. 性质

(1) 函数 $f(x)$ 在 I 上可积，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 I 上连续 . $f(x)$ 可导 ⇒ 连续 ⇒ 可积 ⇒ 有界

(2) 函数 $f(x)$ 在 I 上连续，则函数 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 I 上可导且 $F'(x)=f(x)$.

(3) 若 $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的跳跃间断点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 x_0 处不可导，且 $\begin{cases}F'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x),\\F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x).\end{cases}$

若 $x=x_0\in I$ 是 $f(x)$ 唯一的可去间断点，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 x_0 处可导，且 $F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$.

【**注**】(1) 第一个性质的证明如下 .

证明 对任意 x, $x+\Delta x\in I$，有

$$F(x+\Delta x)-F(x)=\int_{x}^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t .$$

由可积的必要条件可知，存在$M>0$，使得在I上有$|f(x)|\leqslant M$，所以有

$$0\leqslant|F(x+\Delta x)-F(x)|\leqslant M|\Delta x|,$$

则$\lim\limits_{\Delta x\to0}|F(x+\Delta x)-F(x)|=0$，即$\lim\limits_{\Delta x\to0}[F(x+\Delta x)-F(x)]=0$或$\lim\limits_{\Delta x\to0}F(x+\Delta x)=F(x)$，得证 .

由此可见，对于变限积分$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，只要它存在，就必然是连续的 .

(2) 第二个性质的证明如下 .

证明 对任意的$x, x+\Delta x\in I$，由于函数$f(x)$连续，因此

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to0}f(\xi)=f(x),$$

其中ξ介于x与$x+\Delta x$之间 .

由此可见，如果函数$f(x)$在区间I上连续，则$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$是$f(x)$在区间$I$上的一个原函数 .

(3) 第三个性质的证明如下 .

证明 因为$x=x_0\in I$是$f(x)$唯一的间断点，故$x\neq x_0$时，$f(x)$连续，此时$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$可导，且$F'(x)=f(x)$，而$F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}$.

若$x_0\in I$是$f(x)$的跳跃间断点，则$F'_-(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$, $F'_+(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，因为$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$，故此时$F'_-(x_0)\neq F'_+(x_0)$，即$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在$x_0$处不可导 .

若$x_0\in I$是$f(x)$的可去间断点，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，于是$F'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在 .

例 8.11 设函数$y=f(x)$在区间$[-1, 3]$上的图形如图 8-6 所示，则函数$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$的图形为 (　　).

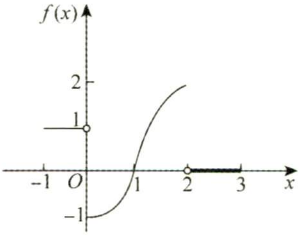
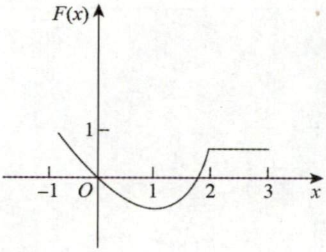
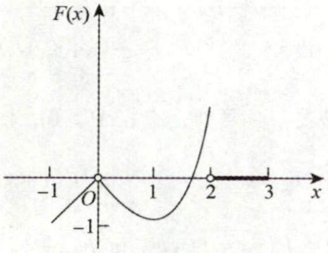


图 8-6

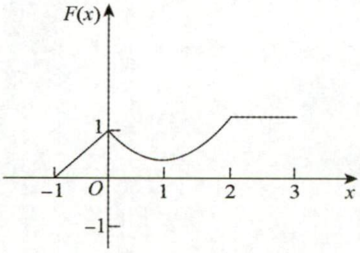
(A)



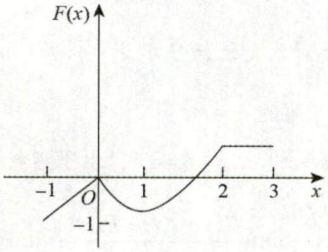
(B)



(C)



(D)



解 应选 (D).

本题有三个要点：第一，变限积分只要存在就必连续，故排除 (B)；第二，由 $f(x)$ 有两个跳跃间断点可知，$F(x)$ 应有两个不可导点，排除 (A)；第三，$F(0)=\int_0^0 f(t)\mathrm{d}t=0$，所以 $F(x)$ 的图像过原点，排除 (C). 故答案选择 (D).

【注】本题是考研真题，如果考生能够熟练掌握一元函数积分学的有关概念和性质，便可轻松解决这个问题，而无须进行烦琐的计算，从这个角度说，本题是概念题 .

例 8.12 设函数 $f(x)=\begin{cases}\cos x, & 0\leqslant x<\pi,\\ 1, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi,\end{cases}$ $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

(A) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的跳跃间断点

(B) $x=\pi$ 是函数 $F(x)$ 的可去间断点

(C) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导

(D) $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处可导

解 应选 (C).

方法一 由于 $x=\pi$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点，因此 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 在 $x=\pi$ 处连续但不可导，故选 (C).

方法二
$$F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}\int_0^x \cos t\mathrm{d}t, & 0\leqslant x<\pi,\\ \int_0^\pi \cos t\mathrm{d}t+\int_\pi^x 1\mathrm{d}t, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi\end{cases}=\begin{cases}\sin x, & 0\leqslant x<\pi,\\ x-\pi, & \pi\leqslant x\leqslant 2\pi.\end{cases}$$

因为 $\lim\limits_{x\to\pi^+}F(x)=\lim\limits_{x\to\pi^-}F(x)=F(\pi)=0$，所以 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处连续 . 而

$$F'_-(\pi)=\lim_{x\to\pi^-}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\sin x-0}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^-}\frac{\cos x}{1}=-1,$$

$$F'_+(\pi)=\lim_{x\to\pi^+}\frac{F(x)-F(\pi)}{x-\pi}=\lim_{x\to\pi^+}\frac{x-\pi-0}{x-\pi}=1,$$

因此 $F'_-(\pi)\neq F'_+(\pi)$，即 $F(x)$ 在 $x=\pi$ 处不可导 .

例 8.13　设 $f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{x^2}+x^2, & x\neq 0, \\ a, & x=0, \end{cases}$ 其中 a 为常数，令 $F(x)=\int_{-1}^{x} f(t)\mathrm{d}t$，则以下命题：

①当 $a=1$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

②当 $a\neq 1$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处可导；

③当 $a=1$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导；

④当 $a\neq 1$ 时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处不可导．

所有真命题的序号为（　　）．

(A) ①④　　(B) ①②　　(C) ③④　　(D) ②③

解　应选 (B).

若 $a=1$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，此时 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导，且 $F'(0)=f(0)=1$．

若 $a\neq 1$，则 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点，此时

$$F'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-1}^{x}(\mathrm{e}^{t^2}+t^2)\mathrm{d}t-\int_{-1}^{0}(\mathrm{e}^{t^2}+t^2)\mathrm{d}t}{x-0}\xlongequal{\text{洛必达法则}}\lim_{x\to 0}(\mathrm{e}^{x^2}+x^2)=1,$$

于是 $F'(0)$ 存在，即 $F(x)$ 在 $x=0$ 处仍可导，故选 (B).

或用"三、2.(3)"的结论，直接有 $F(x)$ 在 $x=0$ 处可导．

【注】只是当 $a\neq 1$ 时，$F'(0)=1\neq a=f(0)$，在包含 $x=0$ 的区间上，$F(x)$ 不是 $f(x)$ 的原函数．

例 8.14　设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续有界，C 为任意常数，证明：$y=\mathrm{e}^{-ax}\left[\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t+C\right]$ 有界．

证明　由 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有界，设 $|f(x)|\leqslant M$，则当 $x\geqslant 0$ 时，有

$$\begin{aligned} |y(x)| &= \left|\mathrm{e}^{-ax}\left[C+\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t\right]\right|\leqslant\left|C\mathrm{e}^{-ax}\right|+\mathrm{e}^{-ax}\left|\int_{0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant |C|+\mathrm{e}^{-ax}\int_{0}^{x}\left|f(t)\mathrm{e}^{at}\right|\mathrm{d}t\leqslant |C|+M\mathrm{e}^{-ax}\int_{0}^{x}\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t \\ &= |C|+\frac{M}{a}(1-\mathrm{e}^{-ax})\leqslant |C|+\frac{M}{a}, \end{aligned}$$

得证．

四、反常积分

1. 概念

前面已经指出，定积分存在有两个必要条件：一是积分区间有限，二是被积函数有界．如果破坏了积分区间的有限性，就引出无穷区间上的反常积分；如果破坏了被积函数的有界性，就引出无界函数的反常积分．

(1) 无穷区间上反常积分的概念与敛散性 .

定义 1 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数 .

① $$\int_{a}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to+\infty} F(x)-F(a),$$

若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散 .

② $$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim_{x\to-\infty} F(x),$$

若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散 .

③ $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x_0} f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x,$$

若右端两个积分都收敛，则称反常积分收敛，否则称发散 .

(2) 无界函数的反常积分的概念与敛散性 .

定义 2 设 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在相应区间上的一个原函数，x_0 为 $f(x)$ 的瑕点 .

使 $f(x)$ 在 x_0 的邻域内无界的点即为瑕点，如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$x=0$ 为瑕点；再如 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}=$ 无界振荡，$x=0$ 为瑕点.

①若 $x=a$ 是唯一瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(b)-\lim_{x\to a^{+}} F(x),$$

若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散 .

②若 $x=b$ 是唯一瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{x\to b^{-}} F(x)-F(a),$$

若上述极限存在，则称反常积分收敛，否则称发散 .

③若 $x=c\in(a,b)$ 是唯一瑕点，则

$$\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\int_{a}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_{c}^{b} f(x)\mathrm{d}x,$$

若右端两个积分都收敛，则称反常积分收敛，否则称发散 .

只要等号右边有一个发散，左边即发散.不存在“发散＋发散＝收敛”的情形.如 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}x^3\mathrm{d}x+\int_{0}^{+\infty}x^3\mathrm{d}x$，由于 $\int_{-\infty}^{0}x^3\mathrm{d}x=-\infty$，发散，故 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\mathrm{d}x$ 发散.而不是 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\mathrm{d}x=0$.这里，$\int_{-\infty}^{+\infty}x^3\mathrm{d}x\neq\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}x^3\mathrm{d}x$.只有当反常积分收敛时，$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{R\to+\infty}\int_{-R}^{R}f(x)\mathrm{d}x$ 才成立.

【注 1】 在反常积分中，一般把“ ∞”和瑕点统称为奇点 .

在判别积分敛散性时，一个积分中只能有一个奇点，若出现两个及以上奇点，需拆分 .

【注 2】 请看 (2) 的①，当 $x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点时，$f(x)$ 便是一个无界函数了，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 也可能存在 . 细心的考生可能会联想到，前面我们不是说“$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在的必要条件是 $f(x)$ 有界”吗？这不是矛盾了吗？事实上，前面所说的 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是**定积分（黎曼积分）**，而这里的 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是**反常积分**，它们并不是一个概念，所以没有任何矛盾 . 只是当考生读完这一段后，最好今后在提到积分存在时，特别强调一下，是定积分存在（黎曼可积，常义可积），还是反常积分存在（广义可积）.

2. 敛散性的判别法

(1) 无穷区间.

比较判别法 设函数$f(x)$, $g(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续，并且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a\leqslant x<+\infty)$，则

①当$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

②当$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散.

比较判别法的极限形式 设函数$f(x)$, $g(x)$在区间$[a, +\infty)$上连续，且$f(x)\geqslant 0$, $g(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$（有限或$\infty$），则

①当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq\infty$时，$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$有相同的敛散性；

②当$\lambda=0$时，若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

③当$\lambda=\infty$时，若$\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$也发散.

(2) 无界函数.

比较判别法 设$f(x)$, $g(x)$在$(a, b]$上连续，瑕点同为$x=a$，并且$0\leqslant f(x)\leqslant g(x)(a<x\leqslant b)$，则

①当$\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$收敛时，$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$收敛；

②当$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$发散时，$\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$发散.

比较判别法的极限形式 设$f(x)$, $g(x)$在$(a, b]$上连续，瑕点同为$x=a$，并且$f(x)\geqslant 0$, $g(x)>0(a<x\leqslant b)$, $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lambda$（有限或$\infty$），则

①当$\lambda\neq 0$且$\lambda\neq\infty$时，$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$和$\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$有相同的敛散性；

②当$\lambda=0$时，若$\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$也收敛；

③当$\lambda=\infty$时，若$\int_a^{b} g(x)\mathrm{d}x$发散，则$\int_a^{b} f(x)\mathrm{d}x$也发散.

【注】两个重要结论.

①$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛，} & 0<p<1,\\ \text{发散，} & p\geqslant 1.\end{cases}$

②$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{收敛，} & p>1,\\ \text{发散，} & p\leqslant 1.\end{cases}$

对于①，盯着$x\to 0^+$看，x^p的次数p：当$p\geqslant 1$时，x^p趋于0的“速度”够快，其倒数$\dfrac{1}{x^p}$趋于$+\infty$的“速度”亦够快，积分发散；当$0<p<1$时，x^p趋于0的“速度”不够快，其倒数$\dfrac{1}{x^p}$趋于$+\infty$的“速度”亦不够快，积分收敛.

懂得了以上道理后，便可有所发挥，如当$x\to 0^+$时，$\sin x\sim x$，这意味着$\sin x$与x趋于0的“速度”一样. 故$\int_0^1\dfrac{1}{\sin^p x}\mathrm{d}x$（有时命制成$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{1}{\sin^p x}\mathrm{d}x$）依然满足

$$\begin{cases}\text{收敛}, & 0<p<1, \\ \text{发散}, & p\geqslant 1 .\end{cases}$$

事实上，凡是与x趋于0的“速度”一样的函数$f(x)$均可如上讨论.

对于②，盯着$x\to+\infty$看，x^p的次数p：当$p>1$时，x^p趋于$+\infty$的“速度”够快，其倒数$\dfrac{1}{x^p}$趋于0的“速度”亦够快，积分收敛；当$p\leqslant 1$时，x^p趋于$+\infty$的“速度”不够快，其倒数$\dfrac{1}{x^p}$趋于0的“速度”亦不够快，积分发散.

这里的发挥简单些，如当$x\to+\infty$且$a>0$时，$ax+b$亦趋于$+\infty$，与x趋于$+\infty$的“速度”一样.

当$ax+b\geqslant k>0$时，$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{(ax+b)^p}\mathrm{d}x$依然满足$\begin{cases}\text{收敛}, & p>1, \\ \text{发散}, & p\leqslant 1 .\end{cases}$

例 8.15 设$a>b>0$，反常积分$\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^a+x^b}\mathrm{d}x$收敛，则（　　）.

(A) $a>1$且$b>1$　　(B) $a>1$且$b<1$　　(C) $a<1$且$a+b>1$　　(D) $a<1$且$b<1$

解 应选 (B).

理论依据在“四、2”的注中讲过了，来看此题：

$$I=\int_0^1\frac{1}{x^a+x^b}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^a+x^b}\mathrm{d}x=I_1+I_2 .$$

对于I_1，盯着$x\to 0^+$看，由于$a>b>0$，因此x^b趋于0的“速度”慢于x^a趋于0的“速度”，$x^a+x^b\sim x^b$，于是I_1与$\int_0^1\dfrac{1}{x^b}\mathrm{d}x$同敛散，则$b<1$.

对于I_2，盯着$x\to+\infty$看，由于$a>b>0$，因此x^a趋于$+\infty$的“速度”快于x^b趋于$+\infty$的“速度”，x^a+x^b与x^a为等价无穷大量，于是I_2与$\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^a}\mathrm{d}x$同敛散，则$a>1$.

综上，$a>1$且$b<1$，故选 (B).

例 8.16 若反常积分$\int_1^{+\infty}\left(e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}\right)x^k\mathrm{d}x$收敛，则$k$的取值范围是______.

解 应填$k<1$.

盯着$x\to+\infty$看，由$e^{-\cos\frac{1}{x}}-e^{-1}=e^{-1}\left(e^{-\cos\frac{1}{x}+1}-1\right)$，又当$x\to+\infty$时，

$$e^{-\cos\frac{1}{x}+1}-1\sim 1-\cos\frac{1}{x}\sim\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2},$$

故原反常积分与$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{2-k}}\mathrm{d}x$同敛散，故当$2-k>1$，即$k<1$时，原反常积分收敛 .

例 8.17 以下反常积分发散的是（ ）.

(A) $\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

(C) $\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$

(D) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$

解 应选 (C).

对于 (A)，对$x\in[1,+\infty)$，有

$$0\leqslant\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\leqslant\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}\leqslant\frac{1}{x^2}\ .$$

由$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$收敛，可知$\int_1^{+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}\right]\mathrm{d}x$收敛 .

对于 (B)，

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x\ .$$

因为

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\ln x}=1,$$

且瑕积分$\int_0^1\ln x\mathrm{d}x$收敛，所以瑕积分$\int_0^1\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛 .

又因为

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{1+x^2}}{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}}=0,$$

且反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$收敛，所以反常积分$\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛 .

综上可知，反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛 .

对于 (C)，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=1$，因此 $\int_0^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 发散 . 而 $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^0\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$，可知 $\int_{-1}^1\frac{1}{\sin x}\mathrm{d}x$ 发散 .

对于 (D)，$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^0\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$，且有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{1+x^2}\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2},$$

由对称区间反常积分结论（见下面的注），可知 $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛 .

【注】 当 $f(x)$ 为偶函数且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\ .$$

当 $f(x)$ 为奇函数且 $\int_0^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛时，

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0\ .$$

例 8.18 已知 $\alpha>0$，则对于反常积分 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的敛散性的判别，正确的是（　　）.

(A) 当 $\alpha\geqslant1$ 时，积分收敛　　(B) 当 $\alpha<1$ 时，积分收敛

(C) 敛散性与 α 的取值无关，必收敛　　(D) 敛散性与 α 的取值无关，必发散

解 应选 (B).

当 $\alpha<1$ 时，取充分小的正数 ε，使得 $\alpha+\varepsilon<1$，由于

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}}$ 是比较判别法的极限形式

$$\lim_{x\to0^+}x^{\alpha+\varepsilon}\frac{\ln x}{x^\alpha}=\lim_{x\to0^+}x^\varepsilon\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{x^{-\varepsilon}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\varepsilon x^{-\varepsilon-1}}=\lim_{x\to0^+}\left(-\frac{1}{\varepsilon}x^\varepsilon\right)=0,$$

故当 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 高阶的无穷大量，因为当 $\alpha+\varepsilon<1$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x^{\alpha+\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 收敛，于是 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛，选项 (B) 正确；

当 $\alpha\geqslant1$ 时，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}x^\alpha\frac{\ln x}{x^\alpha}=\infty$，故当 $x\to0^+$ 时，$\frac{1}{x^\alpha}$ 是比 $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ 低阶的无穷大量，因为当 $\alpha\geqslant1$ 时，$\int_0^1\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散，于是 $\int_0^1\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散 .

$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^\alpha}}$ 是比较判别法的极限形式

例 8.19 已知 $\alpha>0$，则对于反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 的敛散性的判别，正确的是（　　）.

(A) 当 $0<\alpha\leqslant1$ 时，积分收敛　　(B) 当 $\alpha>1$ 时，积分收敛

(C) 敛散性与 α 无关，必收敛　　(D) 敛散性与 α 无关，必发散

解 应选 (B).

当 $0<\alpha\leqslant1$ 且 x 充分大时，$\frac{\ln x}{x^\alpha}>\frac{1}{x^\alpha}$，由于 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散，因此 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 发散；

当 $\alpha>1$ 时，取充分小的正数 ε，使 $\alpha-\varepsilon>1$，由 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{\ln x}{x^\alpha}}{\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}}\overset{\text{“}\frac{0}{0}\text{”}}{=\!=\!=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\varepsilon}=0$，且 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^{\alpha-\varepsilon}}\mathrm{d}x$ 收敛，故 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}\mathrm{d}x$ 收敛 .

故选 (B).

基础习题精练

习 题

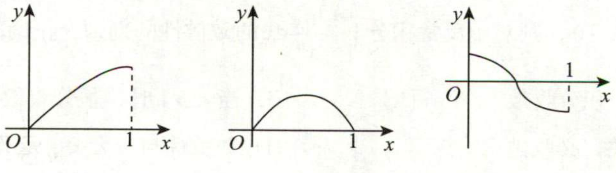
8.1 设 $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x$，则（　　）.

(A) $I_1>I_2>1$　　(B) $1>I_1>I_2$　　(C) $I_2>I_1>1$　　(D) $1>I_2>I_1$

8.2 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n^2}}\right)=$______.

8.3 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=$______.

8.4 设函数 $f(x)$ 可导，$y=f(x)$，$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$y=f'(x)$ 的图形如图 8-7 所示，则与 $y=f(x)$，$y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$y=f'(x)$ 对应的图形分别是______.



(a) (b) (c)

图 8-7

8.5 设 $F(x)=\int_0^x (t-[t])\mathrm{d}t$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $F'_-(1)+F'_+(1)=$______.

8.6 讨论 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x$ 的敛散性，其中 p 为任意实数 .

解 答

8.1 (C) **解** 当 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ 时，$\sin x<x$，故 $\frac{x}{\sin x}>1>\frac{\sin x}{x}$，则

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\sin x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=I_1,$$

排除选项 (A) 和 (B).

由第 2 讲“6. 注 (2) ⑧”可知，当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\sin x}{x}>\frac{2}{\pi}$，则有

$$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x>\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2}{\pi}\mathrm{d}x=1 .$$

故 (C) 正确 .

8.2 $2\sqrt{2}-2$ **解** 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+ni}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{i}{n}}}\cdot\frac{1}{n}$

$$=\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x=2\sqrt{1+x}\Big|_0^1=2\sqrt{2}-2 .$$

【注】 能凑成 $\frac{i}{n}$，则用定积分定义；凑不成的，先用放缩法，放缩后再用定积分定义 .

常见的几种凑定积分定义的式子有

(1)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}$$
$$=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln(1+x)\Big|_0^1=\ln 2 .$$

这里分母上有 $n+i$，提出 n 后，会化成 $1+\frac{i}{n}$.

(2)
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i^2}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{n^2}{n^2+i^2}\cdot\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}$$

$$=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\arctan x\Big|_0^1=\frac{\pi}{4} .$$

这里分母上有 n^2+i^2，提出 n^2 后，会化成 $1+\left(\frac{i}{n}\right)^2$.

(3) 对于本题，分母上有 n^2+ni，提出 n^2 后，会化成 $1+\frac{i}{n}$.

8.3 $\frac{2}{\pi}$ **解** 当各项分母相同且均为 n 时，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x,$$

于是，先对 $\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}$ 进行放缩，有

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n},$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sin\frac{i}{n}\pi=1\cdot\int_0^1\sin\pi x\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi},$$

因此，由夹逼准则得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n+\frac{1}{i}}=\frac{2}{\pi} .$$

8.4 (b)，(a)，(c) **解** $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是过点 (0，0) 的曲线，所以对应图形为图 8-7(a) 或者图 8-7(b).

若 $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是图 8-7(a)，单调递增，则 $y=f(x)$ 应当非负，只能是图 8-7(b)，又因为图 8-7(b) 是先增后减的，所以 $y=f'(x)$ 应当先正后负，刚好和图 8-7(c) 对应 .

若 $y=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 是图 8-7(b)，先增后减，则 $y=f(x)$ 应当先正后负，只能是图 8-7(c)，又因为图 8-7(c) 是单调递减的，所以图 8-7(a) 就不可能是 $y=f'(x)$.

综上，应填 (b)，(a)，(c).

8.5 1 **解** 设 $f(x)=x-[x]$，其图形如图 8-8 所示 .

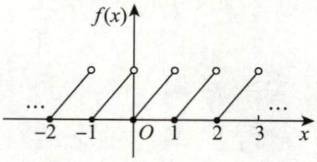


图 8-8

方法一 因为 $x=1$ 是 $y=f(x)$ 的跳跃间断点，所以

$$F'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f(x)=1,\ F'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=0,$$

故 $F'_-(1)+F'_+(1)=1$.

方法二
$$F'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{\int_0^x t\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{1}=1,$$

$$F'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\int_0^1 t\mathrm{d}t+\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t-\frac{1}{2}}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{\int_1^x (t-1)\mathrm{d}t}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{1}=0,$$

故 $F'_-(1)+F'_+(1)=1$.

8.6 **分析** 本题考查反常积分敛散性的判别法（通过计算结果来判别是否收敛），同样是历届考生复习比较薄弱的知识点 .

解 ①当 $p=1$ 时，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln|\ln x|\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散；

②当 $p\neq 1$ 时，

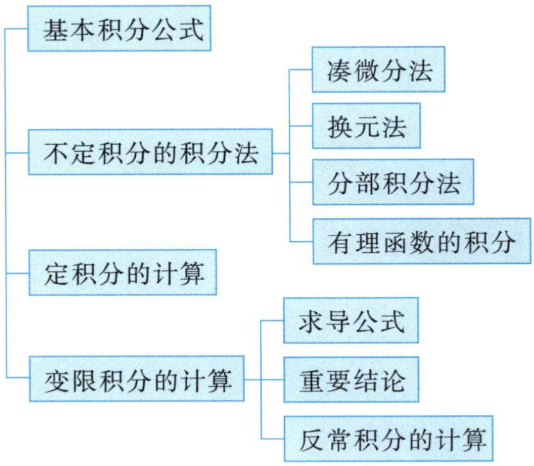
$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^p x}=\frac{1}{1-p}(\ln x)^{1-p}\Big|_2^{+\infty},$$

当 $p>1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-p}=0$，故收敛；当 $p<1$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x)^{1-p}=+\infty$，故发散 .

综上，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^p x}\mathrm{d}x\begin{cases}收敛，p>1,\\ 发散，p\leqslant 1.\end{cases}$

第9讲　一元函数积分学的计算

基础知识结构



基础内容精讲

一、基本积分公式

以下 10 组公式，要牢记．

① $\int x^k \mathrm{d}x = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + C$，$k \neq -1$； $\begin{cases} \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + C, \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x = 2\sqrt{x} + C. \end{cases}$

② $\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln|x| + C$ ．

③ $\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x + C$； $\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C$，$a > 0$ 且 $a \neq 1$ ．

④ $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$； $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$；

$\int \tan x\mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$；$\int \cot x\mathrm{d}x = \ln|\sin x| + C$；

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \sec x\mathrm{d}x = \ln|\sec x + \tan x| + C$；

$\int \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x\mathrm{d}x = \ln|\csc x - \cot x| + C$；

$\int \sec^2 x\mathrm{d}x = \tan x + C$；$\int \csc^2 x\mathrm{d}x = -\cot x + C$；

$\int \sec x\tan x\mathrm{d}x = \sec x + C$；$\int \csc x\cot x\mathrm{d}x = -\csc x + C$.

⑤ $\begin{cases} \int \dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \arctan x + C, \\ \int \dfrac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{a}\arctan\dfrac{x}{a} + C(a>0). \end{cases}$

⑥ $\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin x + C, \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin\dfrac{x}{a} + C(a>0). \end{cases}$

⑦ $\begin{cases} \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\mathrm{d}x = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2}) + C(\text{常见 } a=1), \\ \int \dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + C(|x|>|a|). \end{cases}$

⑧ $\int \dfrac{1}{x^2-a^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C\left(\int \dfrac{1}{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x+a}{x-a}\right| + C\right)$.

⑨ $\int \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a} + \dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C(a>|x|\geqslant 0)$.

⑩ $\int \sin^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\sin 2x}{4} + C\left(\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)$；

$\int \cos^2 x\mathrm{d}x = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\sin 2x}{4} + C\left(\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}\right)$；

$\int \tan^2 x\mathrm{d}x = \tan x - x + C(\tan^2 x = \sec^2 x - 1)$；

$\int \cot^2 x\mathrm{d}x = -\cot x - x + C(\cot^2 x = \csc^2 x - 1)$.

二、不定积分的积分法

1. 凑微分法

$$\int f[g(x)]g'(x)\mathrm{d}x = \int f[g(x)]\mathrm{d}[g(x)] = \int f(u)\mathrm{d}u .$$

【注 1】 当被积函数比较复杂时，拿出一部分放到 d 后面去，若能凑成 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 的形式，则凑微分成功．比如，

$$\int \frac{\ln^5 x}{x}\mathrm{d}x=\int \ln^5 x\cdot\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\int \ln^5 x\mathrm{d}(\ln x)=\frac{\ln^6 x}{6}+C.$$

→ 即下面的⑤

【注 2】 常用的凑微分公式：

①由于 $x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{d}(x^2)$，故 $\int xf(x^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}\int f(u)\mathrm{d}u$.

②由于 $\sqrt{x}\,\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})$，故 $\int \sqrt{x}f(x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\int f(x^{\frac{3}{2}})\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})=\frac{2}{3}\int f(u)\mathrm{d}u$.

③由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}=2\mathrm{d}(\sqrt{x})$，故 $\int \frac{f(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int f(\sqrt{x})\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\int f(u)\mathrm{d}u$.

④由于 $\frac{\mathrm{d}x}{x^2}=\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)$，故 $\int \frac{f\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x=\int f\left(-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑤由于当 $x>0$ 时，$\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\ln x)$，故 $\int \frac{f(\ln x)}{x}\mathrm{d}x=\int f(\ln x)\mathrm{d}(\ln x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑥由于 $\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)$，故 $\int \mathrm{e}^x f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}x=\int f(\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑦由于 $a^x\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}(a^x),a>0,a\neq 1$，故 $\int a^x f(a^x)\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int f(a^x)\mathrm{d}(a^x)=\frac{1}{\ln a}\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑧由于 $\sin x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cos x)$，故 $\int \sin x\cdot f(-\cos x)\mathrm{d}x=\int f(-\cos x)\mathrm{d}(-\cos x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑨由于 $\cos x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin x)$，故 $\int \cos x\cdot f(\sin x)\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\mathrm{d}(\sin x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑩ 由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\sec^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\tan x)$，故 $\int \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\mathrm{d}(\tan x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑪由于 $\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\csc^2 x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(-\cot x)$，故 $\int \frac{f(-\cot x)}{\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int f(-\cot x)\mathrm{d}(-\cot x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑫由于 $\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arctan x)$，故 $\int \frac{f(\arctan x)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int f(\arctan x)\mathrm{d}(\arctan x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

⑬由于 $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\arcsin x)$，故 $\int \frac{f(\arcsin x)}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int f(\arcsin x)\mathrm{d}(\arcsin x)=\int f(u)\mathrm{d}u$.

例 9.1 求不定积分 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}}\mathrm{d}x$.

解

$$\int\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x^3}}\mathrm{d}x\overset{\text{注2的②}}{=}\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})}{\sqrt{4-(x^{\frac{3}{2}})^2}}=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}(x^{\frac{3}{2}})}{2\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}$$

$$=\frac{2}{3}\int\frac{\mathrm{d}\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)^2}}\overset{\text{注2的⑬}}{=}\frac{2}{3}\arcsin\left(\frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}\right)+C .$$

例 9.2 求不定积分 $\int \mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\cdot\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta$.

分析 若不是常用的凑微分公式，则可对被积函数的复杂部分 $g(x)$ 求导，若 $g'(x)=f(x)$，即 $\mathrm{d}[g(x)]=f(x)\mathrm{d}x$，则 $\int f(x)g(x)\mathrm{d}x=\int g(x)\mathrm{d}[g(x)]$，凑微分成功 .

解 对复杂部分求导：

$$\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)'=\frac{\cos\theta(\cos\theta+\sin\theta)-\sin\theta(-\sin\theta+\cos\theta)}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2},$$

故

$$\mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)=\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\mathrm{d}\theta,$$

于是

$$\text{原式}=\int\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)=\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}+C .$$

2. 换元法

(1) 基本思想 .

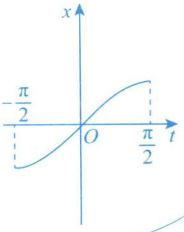
$$\int f(x)\mathrm{d}x\overset{x=g(u)}{=\!=\!=\!=}\int f[g(u)]\mathrm{d}[g(u)]=\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u .$$

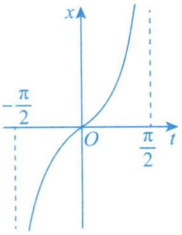
> **【注】**(1) 当被积函数不容易积分(比如含有根式或含有反三角函数)时，可以通过换元的方法从 d 后面拿出一部分放到前面来，就成为 $\int f[g(u)]g'(u)\mathrm{d}u$ 的形式，若 $f[g(u)]g'(u)$ 容易积分，则换元成功 .
>
> (2) $x=g(u)$ 须是单调可导函数，且不要忘记计算结束后用反函数 $u=g^{-1}(x)$ 回代 .

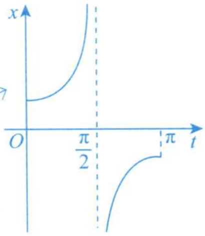
(2) 常用换元法 .

①三角函数代换——当被积函数含有如下根式时，可作三角函数代换，这里 $a>0$.

$$\begin{cases} \sqrt{a^2-x^2} \to 令x=a\sin t,\ |t|<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sqrt{a^2+x^2} \to 令x=a\tan t,\ |t|<\dfrac{\pi}{2}, \\ \sqrt{x^2-a^2} \to 令x=a\sec t,\ \begin{cases} 若x>0,则0<t<\dfrac{\pi}{2}, \\ 若x<0,则\dfrac{\pi}{2}<t<\pi. \end{cases} \end{cases}$$







②恒等变形后作三角函数代换——当被积函数含有根式$\sqrt{ax^2+bx+c}$时，可先化为以下三种形式$\sqrt{\varphi^2(x)+k^2}$，$\sqrt{\varphi^2(x)-k^2}$，$\sqrt{k^2-\varphi^2(x)}$，再作三角函数代换 .

"举重若轻"

解题利器："令复杂 = t"

③根式代换——当被积函数含有根式$\sqrt[n]{ax+b}$，$\sqrt{\dfrac{ax+b}{cx+d}}$，$\sqrt{ae^{bx}+c}$等时，一般令根式$\sqrt{*}=t$（因为事实上，很难通过根号内换元的办法凑成平方，所以根号无法去掉）. 对既含有$\sqrt[n]{ax+b}$，也含有$\sqrt[m]{ax+b}$的函数，一般取m，n的最小公倍数l，令$\sqrt[l]{ax+b}=t$.

④倒代换——当被积函数分母的幂次比分子高两次及两次以上时，作倒代换，令$x=\dfrac{1}{t}$.

⑤复杂函数的直接代换——当被积函数中含有a^x，e^x，$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$等时，可考虑直接令复杂函数等于t，值得指出的是，当$\ln x$，$\arcsin x$，$\arctan x$与$P_n(x)$或e^{ax}作乘法时（其中$P_n(x)$为x的n次多项式），优先考虑分部积分法 .

例 9.3 求不定积分$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x(a>0)$.

$-a\leqslant x\leqslant a,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$

解 设$x=a\sin t$，则$\mathrm{d}x=a\cos t\mathrm{d}t$，$t=\arcsin\dfrac{x}{a}$，所以

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\mathrm{d}t=a^2\int\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C$$

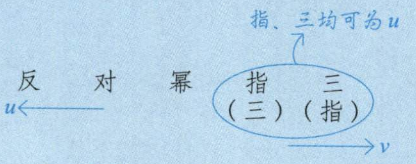
$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

3. 分部积分法

(1) $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$.

【注 1】这个方法主要适用于求$\int u\mathrm{d}v$比较困难，而$\int v\mathrm{d}u$比较容易的情形．

【注 2】积分后会“简单”些的函数宜取作v；微分后会“简单”些的函数宜取作u．故u,v的选取原则为



相对位置在左边的宜选作u，用来求导；相对位置在右边的宜选作v，用来积分，即

(1) 被积函数为$P_n(x)\mathrm{e}^{kx}$，$P_n(x)\sin ax$，$P_n(x)\cos ax$等形式时，一般来说选取$u=P_n(x)$；

(2) 被积函数为$\mathrm{e}^{ax}\sin bx$，$\mathrm{e}^{ax}\cos bx$等形式时，u可以取两因子中的任意一个；

(3) 被积函数为$P_n(x)\ln x$，$P_n(x)\arcsin x$，$P_n(x)\arctan x$等形式时，一般分别选取

$$u=\ln x,\ u=\arcsin x,\ u=\arctan x.$$

(2) 分部积分法的推广公式与$\int P_n(x)\mathrm{e}^{kx}\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\sin ax\mathrm{d}x$，$\int P_n(x)\cos bx\mathrm{d}x$．

设函数$u=u(x)$与$v=v(x)$具有直到第$(n+1)$阶的连续导数，并根据分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u,$$

则有

$$\int uv^{(n+1)}\mathrm{d}x=uv^{(n)}-u'v^{(n-1)}+u''v^{(n-2)}-\cdots+(-1)^n u^{(n)}v+(-1)^{n+1}\int u^{(n+1)}v\mathrm{d}x\ .$$

【注】证明$n=3$时，如下：

$$\int uv^{(4)}\mathrm{d}x=uv^{(3)}-u'v''+u''v'-u^{(3)}v+\int u^{(4)}v\mathrm{d}x\ .$$

证明

$$\int uv^{(4)}\mathrm{d}x=\int u\mathrm{d}[v^{(3)}]=uv^{(3)}-\int u'v^{(3)}\mathrm{d}x\ ,$$

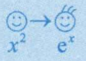
$$\int u'v^{(3)}\mathrm{d}x=\int u'\mathrm{d}(v'')=u'v''-\int u''v''\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int u''v''\mathrm{d}x=\int u''\mathrm{d}(v')=u''v'-\int u^{(3)}v'\mathrm{d}x\ ,$$

$$\int u^{(3)}v'\mathrm{d}x=\int u^{(3)}\mathrm{d}v=u^{(3)}v-\int u^{(4)}v\mathrm{d}x\ .$$

联立以上式子，得

$$\int uv^{(4)}\mathrm{d}x=uv^{(3)}-u'v''+u''v'-u^{(3)}v+\int u^{(4)}v\mathrm{d}x\ .$$



x^2	$2x$	2	0
e^x	e^x	e^x	e^x

$$\int x^2\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=x^2\mathrm{e}^x-2x\mathrm{e}^x+2\mathrm{e}^x+C$$

事实上，可写成如下表格

u的各阶导数	u	u'	u''	$u^{(3)}$	$u^{(4)}$
	⊕	⊖	⊕	⊖	⊕
$v^{(4)}$的各阶原函数	$v^{(4)}$	$v^{(3)}$	v''	v'	v

计算方法：以 u 作起点左上、右下错位相乘，各项符号“+”“−”相间，最后一项为 $\int u^{(4)}v\mathrm{d}x$.

比如，求不定积分 $\int(x^3+2x+6)\mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x$ ，则

x^3+2x+6	$3x^2+2$	$6x$	6	0
e^{2x}	$\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}$	$\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}$

利用上述表格，可得

$$\text{原式}=(x^3+2x+6)\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right)-(3x^2+2)\left(\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}\right)+6x\left(\frac{1}{8}\mathrm{e}^{2x}\right)-6\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right)+\int 0\cdot\left(\frac{1}{16}\mathrm{e}^{2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{7}{4}x+\frac{17}{8}\right)\mathrm{e}^{2x}+C\ .$$

例 9.4　求不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x$.

解　本题主要考查换元法、分部积分法 .

令 $u=\sqrt{\mathrm{e}^x-1}$ ，则 $x=\ln(1+u^2)$, $\mathrm{d}x=\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u$ ，从而

$$\int\frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{\mathrm{e}^x-1}}\mathrm{d}x=\int\frac{(1+u^2)\ln(1+u^2)}{u}\cdot\frac{2u}{1+u^2}\mathrm{d}u=2\int\ln(1+u^2)\mathrm{d}u$$

$$=2u\ln(1+u^2)-\int\frac{4u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=2u\ln(1+u^2)-4u+4\arctan u+C$$

$$=2x\sqrt{\mathrm{e}^x-1}-4\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+4\arctan\sqrt{\mathrm{e}^x-1}+C\ .$$

例 9.5　求不定积分 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$.

解　本题涉及换元法、凑微分法和分部积分法 .

设 $x=\tan t$ ，则

$$\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{e}^t\tan t}{(1+\tan^2 t)^{\frac{3}{2}}}\sec^2 t\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

又
$$\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t\overset{(*)}{=\!=\!=}-\int\mathrm{e}^t\mathrm{d}(\cos t)=-\left(\mathrm{e}^t\cos t-\int\mathrm{e}^t\cos t\mathrm{d}t\right)$$

$$=-\mathrm{e}^t\cos t+\mathrm{e}^t\sin t-\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t,$$

故原式 $=\int\mathrm{e}^t\sin t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^t(\sin t-\cos t)+C=\frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\sqrt{1+x^2}}+C$.

【注】(*) 处亦可直接套用如下公式：

① $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x=\dfrac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\sin bx)' \\ \mathrm{e}^{ax} & \sin bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C=\dfrac{a\mathrm{e}^{ax}\sin bx-b\mathrm{e}^{ax}\cos bx}{a^2+b^2}+C$；

② $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x=\dfrac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{ax})' & (\cos bx)' \\ \mathrm{e}^{ax} & \cos bx\end{vmatrix}}{a^2+b^2}+C=\dfrac{a\mathrm{e}^{ax}\cos bx+b\mathrm{e}^{ax}\sin bx}{a^2+b^2}+C$.

再如，$\int \mathrm{e}^{-x}\sin nx\mathrm{d}x=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\sin nx-n\mathrm{e}^{-x}\cos nx}{(-1)^2+n^2}+C$.

例 9.6　设 $f(\ln x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$，计算 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

分析　本题首先要求出 $f(x)$ 的表达式，一般方法是令 $t=\ln x$. 其次，计算具体积分时，或先凑微分再分部积分，或换元再分部积分 .

解　设 $\ln x=t$，则 $x=\mathrm{e}^t$，$f(t)=\dfrac{\ln(1+\mathrm{e}^t)}{\mathrm{e}^t}$，故

$$
\begin{aligned}
\int f(x)\mathrm{d}x&=\int\frac{\ln(1+\mathrm{e}^x)}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\ln(1+\mathrm{e}^x)\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})\\
&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}\right)\mathrm{d}x\\
&=-\mathrm{e}^{-x}\ln(1+\mathrm{e}^x)+x-\ln(1+\mathrm{e}^x)+C\\
&=x-(1+\mathrm{e}^{-x})\ln(1+\mathrm{e}^x)+C .
\end{aligned}
$$

例 9.7　计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x$.

解

$$
\begin{aligned}
\int \mathrm{e}^{2x}(\tan x+1)^2\mathrm{d}x&=\int \mathrm{e}^{2x}(\sec^2 x+2\tan x)\mathrm{d}x\\
&=\int \mathrm{e}^{2x}\sec^2 x\mathrm{d}x+2\int \mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}(\tan x)+2\int \mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{2x}\tan x-2\int \mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x+2\int \mathrm{e}^{2x}\tan x\mathrm{d}x\\
&=\mathrm{e}^{2x}\tan x+C .
\end{aligned}
$$

4. 有理函数的积分

(1) 定义 .

形如 $\int\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}\mathrm{d}x\,(n<m)$ 的积分称为**有理函数的积分**，其中 $P_n(x)$，$Q_m(x)$ 分别是 x 的 n 次多项式和 m 次

多项式 .

(2) 思想 .

若 $Q_m(x)$ 在实数域内可因式分解，则因式分解后再把 $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ 拆成若干项最简有理分式之和 .

(3) 方法 .

① $Q_m(x)$ 的一次单因式 $ax+b$ 产生一项 $\dfrac{A}{ax+b}$.

② $Q_m(x)$ 的 k 重一次因式 $(ax+b)^k$ 产生 k 项，分别为 $\dfrac{A_1}{ax+b}$，$\dfrac{A_2}{(ax+b)^2}$，…，$\dfrac{A_k}{(ax+b)^k}$.

③ $Q_m(x)$ 的二次单因式 px^2+qx+r 产生一项 $\dfrac{Ax+B}{px^2+qx+r}$.

④ $Q_m(x)$ 的 k 重二次因式 $(px^2+qx+r)^k$ 产生 k 项，分别为　$q^2-4pr<0$

$$\frac{A_1x+B_1}{px^2+qx+r},\ \frac{A_2x+B_2}{(px^2+qx+r)^2},\ \cdots,\ \frac{A_kx+B_k}{(px^2+qx+r)^k}\ .$$

例 9.8　求 $\displaystyle\int\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x$.

解　本题主要考查有理函数的积分 .

先将被积函数分解为最简有理分式之和 . 这时应有分解式

$$\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{2x-1}+\frac{C}{(2x-1)^2},$$

问题是如何定出 A，B，C 这三个数 . 右边通分后等号左、右两边的分子应恒等，即

$$4x^2-6x-1\equiv A(2x-1)^2+B(x+1)(2x-1)+C(x+1)\ . \tag{*}$$

由此恒等式不难定出 A，B，C 来，常用的方法有两种 .

一种方法是将等式右端展开，得到

$$4x^2-6x-1\equiv(4A+2B)x^2+(-4A+B+C)x+(A-B+C),$$

因为这是恒等式，等号左、右两边 x 的同次幂的系数应该相等，故应有

$$\begin{cases}4A+2B=4,\\-4A+B+C=-6,\\A-B+C=-1,\end{cases}$$

解得 $A=1$，$B=0$，$C=-2$.

这种方法比较死板，且解系数满足的方程组有时较烦琐 . 我们希望能求得 A，B，C 应满足的较简单的条件 .

另一种方法是根据在恒等式中以变量 x 的任意值代入等号两边应该得到相同的值，利用这一性质，赋予 x 适当的值，可以得到 A，B，C 应满足的简单条件 . 例如，在 (*) 式中

令 $x=-1$，有 $9=9A$，$A=1$；

令 $x=\frac{1}{2}$，有 $-3=\frac{3}{2}C$，$C=-2$；

令 $x=0$，有 $-1=A-B+C$，可求出 $B=0$.

两种方法求得的结果一致：

$$\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}=\frac{1}{x+1}-\frac{2}{(2x-1)^2} .$$

因此可求得

$$\begin{aligned}\int\frac{4x^2-6x-1}{(x+1)(2x-1)^2}\mathrm{d}x&=\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}-\int\frac{2}{(2x-1)^2}\mathrm{d}x\\&=\ln|x+1|+\frac{1}{2x-1}+C .\end{aligned}$$

例 9.9 求 $\int\frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x$.

解 本题主要考查有理函数的积分 .

因为 $x^3-x^2+x-1=(x-1)(x^2+1)$，设

$$\frac{x}{x^3-x^2+x-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1},$$

这时应有

$$x\equiv A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1), \tag{*}$$

在 (*) 式中，令 $x=1$，得 $1=2A$，$A=\frac{1}{2}$；令 $x=0$，得 $0=A-C$，$C=\frac{1}{2}$.

比较 (*) 式两端 x^2 的系数，有 $0=A+B$，

已求得 $A=\frac{1}{2}$，故有 $B=-\frac{1}{2}$. 于是可得

$$\begin{aligned}\int\frac{x}{x^3-x^2+x-1}\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x-1}-\frac{1}{2}\int\frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\arctan x+C\\&=\frac{1}{4}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+1}+\frac{1}{2}\arctan x+C .\end{aligned}$$

例 9.10 $\int\frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=$______.

解 应填 $\ln(x^2-x+1)+\frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

已是最简有理分式，请注意看接下来的积分方法

分子凑为"k(分母)$'$ +常数"，用 $\int \frac{u'}{u}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln u+C$.

$$\int\frac{2x+3}{x^2-x+1}\mathrm{d}x=\int\frac{2x-1+4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}(x^2-x+1)+\int\frac{4}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(x^2-x+1)+4\int\frac{1}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$$

$$=\ln(x^2-x+1)+4\int\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\mathrm{d}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

$$=\ln(x^2-x+1)+\frac{8\sqrt{3}}{3}\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C\ .$$

三、定积分的计算

牛顿

（1643—1727）

牛顿－莱布尼茨公式及其推广．

设函数 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)\ .$$

【注】 牛顿－莱布尼茨公式推广．

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有原函数 $F(x)$，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$．

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上分段有原函数，如 $[a,c)$ 上有原函数 $F_1(x)$，$(c,b]$ 上有原函数 $F_2(x)$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$=F_1(c-0)-F_1(a)+F_2(b)-F_2(c+0)\ .$$

若 $F_1(c-0)$，$F_2(c+0)$ 存在，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛．

若 $F_1(c-0)$，$F_2(c+0)$ 至少有一个不存在，则 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散，见习题 9.10.

莱布尼茨

（1646—1716）

例 9.11 设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=\frac{x+x^3}{1+x^4}$，则 $\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=$ ______.

解 应填 $\frac{1}{2}\ln 3$．

由例 1.1 知，$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2}$，则

$$\int_2^{2\sqrt{2}} f(x)\mathrm{d}x=\int_2^{2\sqrt{2}}\frac{x}{x^2-2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln(x^2-2)\Big|_2^{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\ln 3\ .$$

换元要三换

由牛顿 – 莱布尼茨公式结合不定积分的计算方法，有定积分的换元积分法和分部积分法，分别如下 .

(1) 定积分的换元积分法 .

设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足① $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$；② $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ (或 $[\beta,\alpha]$) 上有连续的导数，且其值域为 $R_\varphi=[a,b]$，则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t\ .$$

常考：令 $x=\dfrac{\pi}{2}\pm t$，则有 $\begin{cases}\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm t\right)=\cos t;\\ \cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm t\right)=\mp\sin t;\end{cases}$

令 $x=\pi\pm t$，则有 $\begin{cases}\sin(\pi\pm t)=\mp\sin t;\\ \cos(\pi\pm t)=-\cos t.\end{cases}$

【注】当 $\varphi(t)$ 的值域 R_φ 超出 $[a,b]$，但 $\varphi(t)$ 满足其余条件时，只要 $f(x)$ 在 R_φ 上连续，则上述结论仍成立 .

(2) 定积分的分部积分法 .

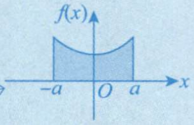
$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\mathrm{d}x,$$

这里要求 $u'(x)$, $v'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续 .

【注】在计算定积分时，下面这些结论是很有用的 .

(1) 设 $f(x)$ 为连续的偶函数，则

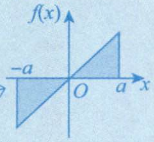
$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=2\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\ .$$



偶倍

(2) 设 $f(x)$ 为连续的奇函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)\mathrm{d}x=0\ .$$



奇零

(3) 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的连续函数，则对任意的实数 a，都有

$$\int_a^{a+T} f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x,$$

即在长度为一个周期的区间上的定积分，与该区间的起点位置无关，其证明见例 9.16.

(4) 设 $f(x)$ 为连续函数，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

这叫“区间再现公式”，其证明见例 9.17.

(5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ \dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

(6) $$\int_0^{\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1, & n\text{ 为大于 1 的奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数},\end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 2\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

(7) $$\int_0^{2\pi}\cos^n x\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}\sin^n x\mathrm{d}x=\begin{cases}0, & n\text{ 为正奇数},\\ 4\cdot\dfrac{n-1}{n}\cdot\dfrac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为正偶数}.\end{cases}$$

(5)，(6)，(7) 叫华里士公式，利用华里士公式可快速计算某些特殊的定积分，如

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^8 x\mathrm{d}x=\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{35\pi}{256},$$

$$\int_0^{\pi}\sin^9 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^9 x\mathrm{d}x=2\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{256}{315}.$$

“点火公式”

例 9.12　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}[\ln(3n-2i)-\ln(n+2i)]=$______.

解　应填 0.

$$\text{原式}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{3n-2i}{n+2i}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{3-2\frac{i}{n}}{1+2\frac{i}{n}}$$

$$=\int_0^1\ln\frac{3-2x}{1+2x}\mathrm{d}x=\int_0^1\ln\frac{\frac{3}{2}-x}{\frac{1}{2}+x}\mathrm{d}x\xlongequal{\text{令 }x-\frac{1}{2}=t}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\ln\frac{1-t}{1+t}\mathrm{d}t,$$

由于 $\ln\dfrac{1-t}{1+t}=\ln(1-t)-\ln(1+t)$ 为奇函数，故原式 $=0$.

例 9.13　求 $\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$.

解　因被积函数为偶函数，故

$$\int_{-1}^{1}x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ .$$

再作三角变换，令 $x=\sin t$，当 $x=0$ 时，可取 $t=0$；当 $x=1$ 时，可取 $t=\dfrac{\pi}{2}$，且当 $t\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 时，

$x=\sin t$不超出原上、下限的区间$[0,1]$，在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上，$x'=x'(t)=\cos t$连续．于是

$$\begin{aligned}
\text{原式}&=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\
&=2\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\,\mathrm{d}t-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,\mathrm{d}t\right)\\
&=2\left(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}\ .
\end{aligned}$$

【注】从原则上讲，作变换$x=\sin t$后，当$x=0$时，可取$t=0,\pm\pi,\pm 2\pi,\cdots$；当$x=1$时，可取$t=\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\pm 2\pi,\cdots$，上、下限有多种组合可满足定理条件．但被积函数中$\sqrt{1-x^2}=\sqrt{1-\sin^2 t}=|\cos t|$，在不同组合中，此绝对值的处理有简有繁，应引起注意，不要自找麻烦．

例 9.14 $\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x=$______.

解 应填 1.

方法一 分部积分法．

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x&=x\arcsin\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1-\int_0^1 x\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{1-x^2})\\
&=-\int_0^1 x\mathrm{d}(\arcsin\sqrt{1-x^2})=\int_0^1 x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\\
&=-\sqrt{1-x^2}\Big|_0^1=1\ .
\end{aligned}$$

方法二 换元法．

$$\int_0^1 \arcsin\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x\xlongequal{x=\cos t}\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \arcsin(-\sin t)\cdot(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^0 t\sin t\,\mathrm{d}t=-t\cos t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0+\sin t\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^0=1\ .$$

例 9.15 $\int_0^1 x\arcsin\sqrt{4x-4x^2}\,\mathrm{d}x=$______.

解 应填$\frac{1}{2}$．

$$\int_0^1 x\arcsin\sqrt{4x-4x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x\arcsin\sqrt{1-(1-2x)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal[x=\frac{1}{2}(1-t)]{\text{令}1-2x=t}\frac{1}{2}\int_1^{-1}(1-t)\arcsin\sqrt{1-t^2}\left(-\frac{1}{2}\mathrm{d}t\right)=\frac{1}{4}\int_{-1}^1(1-t)\arcsin\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}\arcsin\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t-\frac{1}{4}\int_{-1}^{1}t\arcsin\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\arcsin\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t,$$

由例 9.14 知，$\int_0^1\arcsin\sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t=1$，故原式 $=\frac{1}{2}$.

例 9.16　证明：若函数$f(x)$是以T为周期的连续函数，则对任意的实数a，都有

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x .$$

证明　$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x$.

设$t=x-T$，则

$$\int_T^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\mathrm{d}t=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_a^{a+T}f(x)\mathrm{d}x=\int_a^0 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^T f(x)\mathrm{d}x+\int_0^a f(x)\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\mathrm{d}x .$$

例 9.17　设$f(x)$为连续函数，证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x$.

证明　作变量代换，令$x=a+b-t$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_b^a f(a+b-t)(-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_a^b f(a+b-t)\mathrm{d}t=\int_a^b f(a+b-x)\mathrm{d}x,$$

证毕 .

【注】此结论的证明过程比较简单，但其用处很大 .

例 9.18　设$f(x)$在$[0,1]$上连续，证明$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x$，并计算$\int_0^\pi x\sin^9 x\mathrm{d}x$.

解　令$x=\pi-t$，作区间再现换元，有

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\int_\pi^0(\pi-t)f[\sin(\pi-t)](-\mathrm{d}t)$$

$$=\int_0^\pi(\pi-t)f(\sin t)\mathrm{d}t=\int_0^\pi(\pi-x)f(\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\pi\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x-\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x,$$

故

$$\int_0^\pi xf(\sin x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)\mathrm{d}x .$$

$$\int_0^\pi x\sin^9 x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^\pi\sin^9 x\mathrm{d}x=\pi\times\frac{8}{9}\times\frac{6}{7}\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{128\pi}{315} .$$

例 9.19 设$f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$，则$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=$（　　）.

(A) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}+1)$

(B) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1)$

(C) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}+1)$

(D) $\frac{1}{4}(\mathrm{e}-1)$

解 应选 (B).

由于$f(x)=\int_1^{x^2}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$不能积出来，故由分部积分公式有$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot f'(x)\mathrm{d}x$，可见，如果能得出$f(1)$，$f'(x)$，即可求解本题.

令$x=1$，由$f(x)$表达式可得$f(1)=\int_1^1\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=0$，又$f'(x)=\mathrm{e}^{-x^4}(x^2)'=2x\mathrm{e}^{-x^4}$，因此

$$\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot 2x\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^3\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{e}^{-x^4}\mathrm{d}(-x^4)$$

$$=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-x^4}\Big|_0^1=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^{-1}-1).$$

故选 (B).

四、变限积分的计算

1. 求导公式

设$F(x)=\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t$，其中$f(x)$在$[a,b]$上连续，可导函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的值域在$[a,b]$上，则在函数$\varphi_1(x)$和$\varphi_2(x)$的公共定义域上，有

$$F'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(t)\mathrm{d}t\right]=f[\varphi_2(x)]\varphi_2'(x)-f[\varphi_1(x)]\varphi_1'(x).$$

【注】我们称上面公式中的x为“求导变量”，t为“积分变量”. 当被积函数中只含“积分变量”t时，才能用求导公式，若被积函数中有“求导变量”x，必须通过恒等变形（比如变量代换等）将其移出被积函数，才能使用变限积分求导公式.

例 9.20 曲线$y=\int_0^{\sin x}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$在点$(0,0)$处的法线方程为（　　）.

(A) $y=\frac{1}{2}x$

(B) $y=-\frac{1}{2}x$

(C) $y=x$

(D) $y=-x$

解 应选 (D).

欲求曲线在给定点处的法线方程，应先检查此点是否在曲线上，如果此点在曲线上，再求该点处

切线的斜率．

易知点$(0,0)$在曲线$y=\int_0^{\sin x}e^{t^2}dt$上．

由于$y'=e^{\sin^2 x}\cdot\cos x$，$y'|_{x=0}=1$，可知切线斜率$k=1$，法线斜率为$-\frac{1}{k}=-1$，因此所求法线方程为$y=-x$．故选(D).

例 9.21　$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\sin t|dt(x\geqslant 0)$在$x\to 0^+$处的二次泰勒多项式为$a+bx+cx^2$，则$abc=$______.

解　应填$-\frac{\pi}{2}$．

当$x\to 0^+$时，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x(\sin x-\sin t)dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}}(\sin t-\sin x)dt\\&=x\sin x+(\cos x-1)+\cos x-\sin x\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\\&=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x+2\cos x-1\ .\end{aligned}$$

方法一　直接展开．

$$\sin x=x+o(x^2),$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),$$

$$\begin{aligned}F(x)&=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)[x+o(x^2)]+2\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right]-1\\&=1-\frac{\pi}{2}x+x^2+o(x^2),\end{aligned}$$

因此$a=1$，$b=-\frac{\pi}{2}$，$c=1$，故$abc=-\frac{\pi}{2}$．

方法二　由

$$F'(x)=2\sin x+\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x-2\sin x=\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\cos x,$$

$$F''(x)=2\cos x-\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\sin x,$$

故

$$F(0)=1,\ F_+'(0)=-\frac{\pi}{2},\ F_+''(0)=2,$$

$$\begin{aligned}F(x)&=F(0)+F_+'(0)x+\frac{F_+''(0)}{2!}x^2+\cdots\\&=1-\frac{\pi}{2}x+x^2+\cdots,\end{aligned}$$

即$a=1$，$b=-\frac{\pi}{2}$，$c=1$，故$abc=-\frac{\pi}{2}$．

例 9.22 设函数$f(x)$可导，且$f(x)<-2xf'(x)$，则曲线$F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$（　　）.

(A) 在$x=0$处取极大值

(B) 在$x=0$处取极小值

(C) 拐点是$(0,0)$

(D) 在$(0,0)$处既非极值点也非拐点

解 应选(A).

令$x^2-t^2=u$，则

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u,$$

于是

$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot 2xf(x^2)=xf(x^2),$$

$$F''(x)=f(x^2)+2x^2f'(x^2).$$

因为$f(x)<-2xf'(x)$，所以$f(x^2)+2x^2f'(x^2)<0$，即$F''(x)<0$，另外，$F(0)=F'(0)=0$，故由判别极值的第二充分条件，$F(x)$在$(0,0)$处取得极大值，选(A).

2. 重要结论

(1) $f(x)$为可积的奇函数$\Rightarrow\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{为偶函数,}\\ \int_a^x f(t)\mathrm{d}t\text{为偶函数}(a\neq 0).\end{cases}$

【注】(1) 若$f(x)$为连续的奇函数，则$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+C$也是偶函数，故$f(x)$的全体原函数均为偶函数.

(2) 只需要被积函数可积，即可有变限积分的相关性质，只有被积函数连续时，才谈原函数的相关性质，以下同.

(2) $f(x)$为可积的偶函数$\Rightarrow\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{为奇函数,}\\ \int_a^x f(t)\mathrm{d}t(a\neq 0)\begin{cases}\text{若}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{，为奇函数,}\\ \text{若}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t\neq\int_0^x f(t)\mathrm{d}t\text{，为非奇非偶函数.}\end{cases}\end{cases}$

【注】若$f(x)$为连续的偶函数，则$f(x)$的全体原函数中，只有$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是奇函数.

(3) $f(x)$是可积的且以T为周期的周期函数，则$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$是以T为周期的周期函数$\Leftrightarrow\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$.

【注】$\int_a^x f(t)\mathrm{d}t=\int_a^0 f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$亦是以$T$为周期的周期函数$(a\neq 0)$.

例 9.23 证明连续的奇函数的一切原函数都是偶函数；连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数是奇函数.

证明　设$f(x)$是连续函数，则其一个原函数可以表示为$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

若$f(x)$是连续的奇函数，即有$f(x)=-f(-x)$，且$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=0$，则

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_{-a}^x f(-u)\mathrm{d}u=\int_{-a}^a f(u)\mathrm{d}u+\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=0+F(x)=F(x),$$

所以连续的奇函数的一切原函数都是偶函数 .

若$f(x)$是连续的偶函数，即有$f(-x)=f(x)$，且$\int_{-a}^a f(t)\mathrm{d}t=2\int_0^a f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F(-x)=\int_a^{-x} f(t)\mathrm{d}t \xlongequal{t=-u} -\int_{-a}^x f(-u)\mathrm{d}u=-\int_{-a}^a f(u)\mathrm{d}u-\int_a^x f(u)\mathrm{d}u=-2\int_0^a f(u)\mathrm{d}u-F(x),$$

只有当$\int_0^a f(u)\mathrm{d}u=0$时，$F(-x)=-F(x)$，即连续的偶函数的原函数中仅有一个原函数为奇函数 .

例 9.24　设奇函数$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有连续导数，则（　　）.

(A) $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$是奇函数　　(B) $\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$是偶函数

(C) $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$是奇函数　　(D) $\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]\mathrm{d}t$是偶函数

解　应选 (A).

由题设可知$\cos f(x)$和$f'(x)$均为偶函数，则由上述重要结论 (2) 知，$\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]\mathrm{d}t$为奇函数 .

例 9.25　设$f(x)$连续且以T为周期，$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.

证明：(1) 当且仅当$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$时，$F(x)$以$T$为周期；

(2) $F(x)-\dfrac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}x$以$T$为周期 .

证明　(1)
$$F(x+T)=\int_a^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t,$$

因为$f(x)$以T为周期，于是$\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，即$F(x+T)-F(x)=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$，所以当且仅当$\int_0^T f(t)\mathrm{d}t=0$，即$\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0$时，$F(x)$以$T$为周期 .

(2) 记
$$\varphi(x)=F(x)-\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}x=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}x,$$

于是
$$\varphi(x+T)-\varphi(x)=\int_a^{x+T} f(t)\mathrm{d}t-\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}(x+T)-\left[\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}x\right]$$

$$=\int_x^{x+T} f(t)\mathrm{d}t-\frac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}\cdot T=\int_0^T f(t)\mathrm{d}t-\int_0^T f(x)\mathrm{d}x=0,$$

故 $\varphi(x)=F(x)-\dfrac{\int_0^T f(x)\mathrm{d}x}{T}x$ 以 T 为周期.

3. 反常积分的计算

在计算反常积分时，注意识别奇点（端点、内部）.

例 9.26 计算反常积分 $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}$.

解 注意到被积函数含有绝对值符号且 $x=1$ 是其无穷间断点，故

$$\text{原式}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}+\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}} .$$

而

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x-x^2}}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}}=\arcsin(2x-1)\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}=\arcsin 1=\frac{\pi}{2},$$

$$\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-x}}=\int_{1}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}}=\ln\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}}\right]\Bigg|_{1}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\ln(2+\sqrt{3}),$$

因此

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{|x-x^2|}}=\frac{\pi}{2}+\ln(2+\sqrt{3}) .$$

例 9.27 求 $\int_3^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{x^2-2x}}$.

解 原式 $=\int_3^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^4\sqrt{(x-1)^2-1}}\xlongequal{x-1=\sec\theta}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\sec\theta\tan\theta}{\sec^4\theta\tan\theta}\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta=\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8} .$$

【注】在收敛的条件下，通过换元可能实现反常积分与定积分的相互转化.

例 9.28 计算 $I_n=\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$（$n$ 为非负整数）.

解 由分部积分法，得

$$I_n=-\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=(-x^n\mathrm{e}^{-x})\Big|_0^{+\infty}+n\int_0^{+\infty}x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=nI_{n-1},\ n=1,\ 2,\ \cdots,$$

其中 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}=0$. 又因为

$$I_0=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1,$$

所以

$$I_n=nI_{n-1}=n(n-1)I_{n-2}=\cdots=n(n-1)\cdots1\cdot I_0=n!.$$

【注】计算积分时，若能用上“Γ函数”的知识，会既快速又准确．

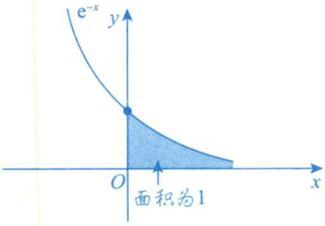
(1) 定义：$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x\xlongequal{x=t^2}2\int_0^{+\infty}t^{2\alpha-1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t(x,t>0)$．

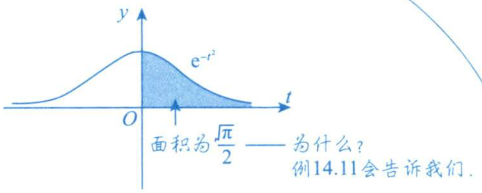
(2) 递推式：　$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^{\alpha}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-x^{\alpha}\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\alpha x^{\alpha-1}\mathrm{d}x=\alpha\Gamma(\alpha)$，

其中 $\Gamma(1)=1$，$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$，故 $\Gamma(n+1)=n!$，$\Gamma(2)=1$，$\Gamma\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}\sqrt{\pi}$．

$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$

$\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)=2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\sqrt{\pi}$





诺贝尔物理学奖得主费曼喜欢“在积分号下求导”这种被数学家认为不严谨甚至“荒唐”的方法．如已知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$，简单推广为 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{a},a>0$．下面有意思了：视 a 为变量，等式两边对 a 求导，注意左边是在积分号下对 a 求导，有 $\int_0^{+\infty}(\mathrm{e}^{-ax})'_a\mathrm{d}x=\left(\dfrac{1}{a}\right)'_a$，即 $-\int_0^{+\infty}x\cdot\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{a^2}$，重复上述工作，直到 $(-1)^n\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-ax}\mathrm{d}x=(-1)^n\dfrac{n!}{a^{n+1}}$，再令 $a=1$，得 $\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=n!$．费曼对自己的这个“戏法”非常得意，他说：“无论用什么方法，即使是戏法，只有答案对了，才是唯一重要的．”

例 9.29　设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{4x^2}{a^3\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{a^2}}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant0,\end{cases}$ a 为正常数，则 $\int_0^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=$______．

解　应填 $\dfrac{3}{2}a^2$．

$$\int_0^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot2\int_0^{+\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^{2\cdot\frac{5}{2}-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{a}\right)^2}\mathrm{d}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$=\frac{2a^2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{2}a^2.$$

基础习题精练

习题

9.1 若$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$，则$\int \frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x$ =______.

9.2 若$f(x)=\frac{1}{1+x^2}+x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$，则$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ =______.

9.3 极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_{\mathrm{e}}^{x}\left(1-\frac{1}{t}\right)^{t}\bullet \mathrm{e}^{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}$ =______.

9.4 设$f(x)$的一个原函数为$\ln^2 x$，则$\int xf'(x)\mathrm{d}x$ =______.

9.5 $\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ =______.

9.6 计算$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}x$（$a$是大于0的常数）.

9.7 求$\int\frac{\arctan \mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x$.

9.8 求$\int\max\{1,|x|\}\mathrm{d}x$.

9.9 求不定积分$\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x$.

9.10 求定积分$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

9.11 计算$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x$.

9.12 计算$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$.

9.13 计算$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$.

9.14 求$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x$.

9.15 设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sin x}, & x\geqslant 0,\\ \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^x}, & x<0,\end{cases}$ 求$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}} f(x)\mathrm{d}x$.

9.16 求连续函数$f(x)$，使它满足$\int_0^1 f(tx)\mathrm{d}t=f(x)+x\sin x$.

9.17 设$f(x)=\int_0^1 t|t-x|\mathrm{d}t$，求$f'(x)$.

解答

9.1 $-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C_1$ **解** 由$\int xf(x)\mathrm{d}x=\arcsin x+C$求导可得$xf(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$，则$\frac{1}{f(x)}=x\sqrt{1-x^2}$，故

$$\int\frac{1}{f(x)}\mathrm{d}x=\int x\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x=-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}+C_1 .$$

9.2 $\frac{\pi}{3}$ **解** 定积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$是一个常数，所以等式两端同时在$[0,1]$上对x进行积分得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1\left[x^3\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}x,$$

即

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\arctan x\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 x^3\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

解得$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{3}$.

9.3 $\frac{1}{\mathrm{e}^2}$ **解** 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}{\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

9.4 $2\ln x-\ln^2 x+C$ **解** 被积函数中有$f'(x)$，用分部积分法 .

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=\int x\mathrm{d}[f(x)]=xf(x)-\int f(x)\mathrm{d}x=xf(x)-\ln^2 x+C,$$

其中

$$f(x)=(\ln^2 x)'=\frac{2\ln x}{x},$$

于是

$$\int xf'(x)\mathrm{d}x=2\ln x-\ln^2 x+C .$$

9.5 $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$ **解** 去掉根号将会使计算变得简单．令 $\sqrt{x}=t$，$x=t^2$，则

$$\int\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int t\cdot\frac{\arcsin t}{t}\,\mathrm{d}t=2\int\arcsin t\mathrm{d}t=2(t\arcsin t+\sqrt{1-t^2})+C$$

$$=2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C\ .$$

9.6 **解** 令 $\arcsin\sqrt{\dfrac{x}{a+x}}=t$，$x=\dfrac{a\sin^2 t}{1-\sin^2 t}=a\tan^2 t$，于是

$$\int\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}\mathrm{d}x=\int t\mathrm{d}(a\tan^2 t)=at\tan^2 t-a\int\tan^2 t\mathrm{d}t$$

$$=at\tan^2 t+a\int(1-\sec^2 t)\,\mathrm{d}t=at\tan^2 t+at-a\tan t+C$$

$$=(a+x)\arcsin\sqrt{\frac{x}{a+x}}-\sqrt{ax}+C\ .$$

9.7 **解** 因为不满足凑微分法的条件，所以要用分部积分法．

方法一

$$\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=-\int\arctan\mathrm{e}^x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^{2x}}$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+\int\left(1-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{1+\mathrm{e}^{2x}}\right)\mathrm{d}x$$

$$=-\mathrm{e}^{-x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+C\ .$$

方法二 令 $\mathrm{e}^x=t$，则

$$\int\frac{\arctan\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x=\int\frac{\arctan t}{t^2}\mathrm{d}t=-\int\arctan t\mathrm{d}\left(\frac{1}{t}\right)=-\frac{1}{t}\arctan t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}$$

$$=-\frac{1}{t}\arctan t+\int\frac{\mathrm{d}t}{t}-\int\frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2}=-\frac{1}{t}\arctan t+\ln t-\frac{1}{2}\ln(1+t^2)+C$$

$$=-\frac{1}{\mathrm{e}^x}\arctan\mathrm{e}^x+x-\frac{1}{2}\ln(1+\mathrm{e}^{2x})+C\ .$$

9.8 **解** 设 $f(x)=\max\{1,|x|\}$，则

$$f(x)=\begin{cases}-x, & x<-1,\\ 1, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ x, & x>1.\end{cases}$$

由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，因此必存在原函数 $F(x)$，即

$$F(x)=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C_1, & x<-1,\\ x+C_2, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2}{2}+C_3, & x>1,\end{cases}$$

又 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处连续，可得 $\begin{cases}-\dfrac{1}{2}+C_1=-1+C_2,\\ 1+C_2=\dfrac{1}{2}+C_3,\end{cases}$ 令 $C_1=C$，则可得 $C_2=\dfrac{1}{2}+C$，$C_3=1+C$．故

$$\text{原式}=\begin{cases}-\dfrac{x^2}{2}+C, & x<-1,\\ x+\dfrac{1}{2}+C, & -1\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{x^2}{2}+1+C, & x>1.\end{cases}$$

【注】事实上，本题是一个分段函数的不定积分，这类问题的关键是分段求出每段上的原函数后，适当调整每一段上的常数使其原函数在分段函数的分段点处连续．

9.9　解　令 $t=\sqrt{2x-1}$，则 $x=\dfrac{t^2+1}{2}$，$\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，于是

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}\mathrm{d}x&=\int \mathrm{e}^t t\mathrm{d}t=\int t\mathrm{d}(\mathrm{e}^t)\\&=t\mathrm{e}^t-\int \mathrm{e}^t\mathrm{d}t=t\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^t+C\\&=(t-1)\mathrm{e}^t+C\\&=(\sqrt{2x-1}-1)\mathrm{e}^{\sqrt{2x-1}}+C.\end{aligned}$$

9.10　解
$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sec^2 x}{2+\tan^2 x}\mathrm{d}x=\int\frac{\sqrt{2}\mathrm{d}\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)}{2\left[1+\left(\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}\right)^2\right]}\\=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}+C,\end{aligned}$$

取 $C=0$ 即得 $\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ 的一个原函数

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}},$$

于是 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{\tan x}{\sqrt{2}}\bigg|_0^{\frac{3}{4}\pi}=\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{2}}$，根据积分的保号性，这显然是错误的结果，错误的根源在于误用牛顿－莱布尼茨公式，这里 $F(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\arctan\dfrac{\tan x}{\sqrt{2}}$ 并不是 $\dfrac{1}{1+\cos^2 x}$ 在 $\left[0,\dfrac{3}{4}\pi\right]$ 上的原函数（$F(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处无意义），应该分区间使用牛顿－莱布尼茨公式．于是

$$\int_0^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{1}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-}F(x)-F(0)+F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^+}F(x)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\pi}{2}-0+\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{-1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{1}{\sqrt{2}}\ .$$

9.11 **解** 令 $1-x=\sin t$，则

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\frac{(1-x)\arcsin(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{t\sin t}{\cos t}\cos t\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\sin t\mathrm{d}t=-\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}t\mathrm{d}(\cos t)$$

$$=-(t\cos t-\sin t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=1-\frac{\sqrt{3}\pi}{6}\ .$$

9.12 **解**

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\frac{\sin x}{\sqrt{\cos x}}\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}(\sqrt{\cos x})$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x+2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\sqrt[4]{8}\left(\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}}-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{8}}\right)\ .$$

积分过程中，$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}\sqrt{\cos x}\mathrm{d}x$ 被相互抵消，这是分部积分法的一种特殊类型，与循环积分类似 .

9.13 **解** 令 $x=\pi-t$，则

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{\pi}^{0}\frac{(\pi-t)\sin(\pi-t)}{1+\cos^2(\pi-t)}(-\mathrm{d}t)=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-t)\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}\frac{t\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t-I,$$

于是

$$I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}t=-\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1}{1+\cos^2 t}\mathrm{d}(\cos t)=-\frac{\pi}{2}\cdot\arctan(\cos t)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{4}\ .$$

9.14 **解** 如果作变换 $\sqrt[3]{x^2}=t$，则 $x=\pm\sqrt{t^3}$. 在 x 的区间 $[-1, 1]$ 上的积分，应分两段 $[-1, 0]$ 与 $[0, 1]$ 来处理（即相应地，在前一段上取 $x=-\sqrt{t^3}$；在后一段上取 $x=\sqrt{t^3}$). 如果作变换 $\sqrt[3]{x}=t$，则 $x=t^3$.

虽然不必将区间 $[-1,1]$ 分两段处理，但也不是最好的办法．经仔细审题发现

$$\int_{-1}^{1}\frac{x+1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{x}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x=0+2\int_{0}^{1}\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\mathrm{d}x,$$

其中前一项因为被积函数是奇函数，故在对称区间上的积分应为 0；后一项是因为被积函数在对称区间上是偶函数．

再作积分变量代换，令 $\sqrt[3]{x^2}=t$，有 $x=\sqrt{t^3}$，$\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\sqrt{t}\mathrm{d}t$．当 $x=0$ 时，$t=0$；当 $x=1$ 时，$t=1$．于是

$$原式=3\int_{0}^{1}\frac{\sqrt{t}}{1+t}\mathrm{d}t\xlongequal{\sqrt{t}=u}6\int_{0}^{1}\frac{u^2}{1+u^2}\mathrm{d}u=6-6\arctan 1=6-\frac{3}{2}\pi\ .$$

【注】 可见仔细审题，利用积分性质，会给解题带来方便．

9.15　解　$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}+\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$,

$$\int_{-1}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}\xlongequal{\mathrm{e}^x=t}\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\frac{1}{1+t}\cdot\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\ln\frac{t}{1+t}\Big|_{\mathrm{e}^{-1}}^{1}=-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e}),$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1-\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\sec^2 x\mathrm{d}x-\int_{0}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\tan x\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{\cos x}\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}}=1-(\sqrt{2}-1)=2-\sqrt{2},$$

从而

$$\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}}f(x)\mathrm{d}x=-\ln 2+\ln(1+\mathrm{e})+2-\sqrt{2}\ .$$

9.16　解　令 $tx=u$，则原式变为 $\frac{1}{x}\int_{0}^{x}f(u)\mathrm{d}u=f(x)+x\sin x$，即

$$\int_{0}^{x}f(u)\mathrm{d}u=xf(x)+x^2\sin x,$$

两边对 x 求导，得

$$f(x)=f(x)+xf'(x)+2x\sin x+x^2\cos x\ ,$$

即

$$f'(x)=-2\sin x-x\cos x\ .$$

积分，得

$$f(x)=2\cos x-\int x\mathrm{d}(\sin x)=2\cos x-x\sin x-\cos x+C$$

$$=\cos x-x\sin x+C\ .$$

【注】 不要把 $\int_{0}^{1}f(tx)\mathrm{d}t$ 误认为定积分．

9.17　解　当 $x\leqslant 0$ 时，

$$f(x)=\int_0^1 t(t-x)\mathrm{d}t=\frac{1}{3}-\frac{x}{2};$$

当$0<x\leqslant 1$时，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x t(x-t)\mathrm{d}t+\int_x^1 t(t-x)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3};\end{aligned}$$

当$x>1$时，

$$f(x)=\int_0^1 t(x-t)\mathrm{d}t=\frac{x}{2}-\frac{1}{3},$$

则

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & 0<x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x>1.\end{cases}$$

又

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}{x-0}=-\frac{1}{2},\ f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3}}{x-0}=-\frac{1}{2},$$

可知$f'_-(0)=f'_+(0)$，故$f'(0)=-\dfrac{1}{2}$.

又

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\frac{1}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{2},\ f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}{x-1}=\frac{1}{2},$$

可知$f'_-(1)=f'_+(1)$，故$f'(1)=\dfrac{1}{2}$.

综上，

$$f'(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}, & x<0,\\ x^2-\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ \dfrac{1}{2}, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

第10讲 一元函数积分学的应用（一）——几何应用

基础知识结构

- 平面图形的面积
- 旋转体的体积
- 函数的平均值
- 其他几何应用(仅数学一、数学二)
  - 形心坐标公式
  - 平面曲线的弧长
  - 旋转曲面的面积(侧面积)
  - 平行截面面积为已知的立体体积

基础内容精讲

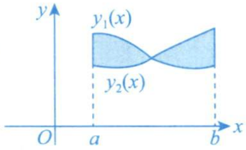
假设以下曲线都是连续的．

三大体系下的图形：
①直角坐标系下（直接算）
②参数方程下
  直接算（少）
  换元法
③极坐标系下（直接算）

1. 用定积分表达和计算平面图形的面积

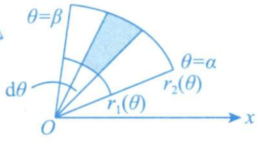
(1) 曲线$y=y_1(x)$与$y=y_2(x)$及$x=a$，$x=b(a<b)$所围成的平面图形的面积

$$S=\int_a^b\left|y_1(x)-y_2(x)\right|\mathrm{d}x .$$



(2) 曲线$r=r_1(\theta)$与$r=r_2(\theta)$与两射线$\theta=\alpha$与$\theta=\beta\left(0<\beta-\alpha\leqslant 2\pi\right)$所围成的曲边扇形的面积

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\left|r_1^2(\theta)-r_2^2(\theta)\right|\mathrm{d}\theta .$$



例 10.1 设A_n是曲线$y=x^n$与$y=x^{n+1}(n=1,2,\cdots)$所围区域的面积，则$\lim\limits_{n\to\infty}\left(2\sum\limits_{k=1}^{n}A_k\right)^n=$______.

解 应填e^{-2} .

$y=x^n$与$y=x^{n+1}$的交点为(0, 0), (1, 1)，故

$$A_n=\int_0^1(x^n-x^{n+1})\,\mathrm{d}x=\left(\frac{1}{n+1}x^{n+1}-\frac{1}{n+2}x^{n+2}\right)\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2},$$

则
$$\lim_{n\to\infty}\left(2\sum_{k=1}^{n}A_k\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+1}-\frac{2}{k+2}\right)\right]^n$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{2}{4}+\cdots+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n+2}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+2}\right)^n=\mathrm{e}^{-2}.$$

例 10.2 求由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0)$的一拱 (见图 10-1) 与$x$轴所围平面图形的面积 .

参数方程下的问题是重点.① $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}\Rightarrow y=f(x)$

② $S=\int_0^{2\pi a}f(x)\mathrm{d}x$ (直角坐标系)

$=\int_0^{2\pi}y(t)\mathrm{d}[x(t)]$

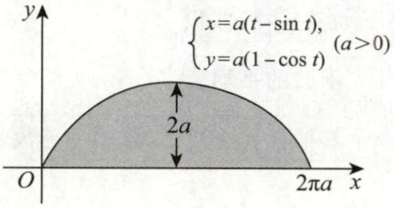


图 10-1

解 当$t=0$或$t=2\pi$时，$y=0$. 故当t由 0 变到2π时，曲线正好成一拱 . 所以

$$S=\int_0^{2\pi a}y(x)\mathrm{d}x=\int_0^{2\pi}a(1-\cos t)[a(t-\sin t)]'\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{2\pi}a^2(1-\cos t)^2\mathrm{d}t=a^2\int_0^{2\pi}(1-2\cos t+\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t-2a^2\int_0^{2\pi}\cos t\mathrm{d}t+a^2\int_0^{2\pi}\cos^2 t\mathrm{d}t$$

$$=2a^2\pi+4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\mathrm{d}t=3a^2\pi.$$

例 10.3 求伯努利双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$围成的图形面积 .

解 如图 10-2 所示，利用对称性，所求图形面积是阴影部分面积的 4 倍 .

阴影部分的图形由射线$\theta=0$, $\theta=\dfrac{\pi}{4}$与伯努利双纽线$r^2=a^2\cos 2\theta$围成，于是所求的平面图形面积为

$$S=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}a^2\cos 2\theta\mathrm{d}\theta=a^2\sin 2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=a^2\ .$$

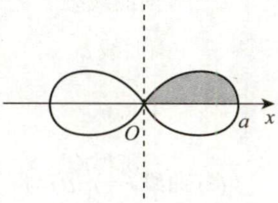


图 10-2

例 10.4 求曲线$y=\mathrm{e}^{-x}\sin x(x\geqslant 0)$与$x$轴所围平面图形的面积 .

解 $S=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\right|$，其中

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{-x})' & (\sin x)' \\ \mathrm{e}^{-x} & \sin x\end{vmatrix}\Bigg|_{n\pi}^{(n+1)\pi}$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)\bigg|_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\frac{(-1)^n}{2}\mathrm{e}^{-n\pi}(\mathrm{e}^{-\pi}+1),$$

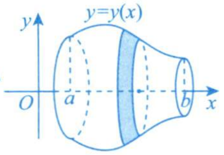
故

$$S=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\mathrm{e}^{-\pi})^n=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2}\cdot\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-\pi}}=\frac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2(1-\mathrm{e}^{-\pi})}.$$

2. 用定积分表达和计算旋转体的体积

(1) 曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a$，$x=b(a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_x=\int_a^b \pi y^2(x)\mathrm{d}x.$$



(2) 曲线 $y=y(x)$ 与 $x=a$，$x=b(0\leqslant a<b)$ 及 x 轴围成的曲边梯形绕 y 轴旋转一周所得到的旋转体的体积

$$V_y=2\pi\int_a^b x|y(x)|\mathrm{d}x. \tag{*}$$

【注】 公式 (*) 有时用起来很方便，现简单推导如下：

取 $[x,x+\Delta x](\Delta x>0)$，得到一个小竖条，如图 10-3 的阴影区域所示，此小竖条绕着 y 轴旋转一周，成为一个“圆柱壳”，将其沿任何一条竖线“切开”，可展开为一个“长方体”，其体积为

$$\mathrm{d}V_y=2\pi x|y(x)|\mathrm{d}x,$$

故

柱壳法

$$V_y=2\pi\int_a^b x|y(x)|\mathrm{d}x.$$

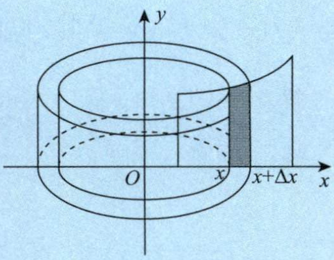


图 10-3

(3) 平面曲线绕定直线旋转．

设平面曲线 L：$y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$，且 $f(x)$ 可导．

定直线 L_0：$Ax+By+C=0$，且过 L_0 的任一条垂线与 L 至多有一个交点，如图 10-4 所示，则 L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\frac{\pi}{(A^2+B^2)^{\frac{3}{2}}}\int_a^b[Ax+Bf(x)+C]^2|Af'(x)-B|\mathrm{d}x. \tag{10-1}$$

特别地，若 $A=C=0$, $B\neq0$，则 L_0 为 $y=0$（x 轴），如图 10-5 所示，L 绕 L_0 旋转一周所得旋转体的体积为

$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x.$$

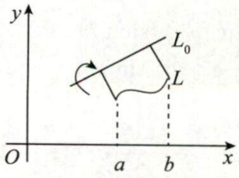


图 10-4

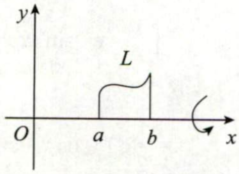


图 10-5

例 10.5 求曲线 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}$ 在 $[0,2\pi]$ 部分与 x 轴围成的平面图形绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积.

解 $y=\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\sin x}$ 在 $[0,\pi]$ 上存在，在 $(\pi,2\pi)$ 内不存在，故

$$V=\int_0^{\pi}\pi y^2(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x\overset{\text{见注}}{=\!=\!=}\frac{1}{2}\pi(1+\mathrm{e}^{-\pi}).$$

【注】 $\int_0^{\pi}\pi\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left.\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{-x})' & (\sin x)'\\ \mathrm{e}^{-x} & \sin x\end{vmatrix}\right|_0^{\pi}=-\frac{\pi}{2}(\cos x+\sin x)\mathrm{e}^{-x}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^{-\pi}+1).$

例 10.6 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，且满足 $2f(x)+x^2f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{x^2+2x}{\sqrt{1+x^2}}$. 求 $f(x)$，并求曲线 $y=f(x)$，$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积 .

解 由例 1.2 知

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0).$$

由 $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ 得 $x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}(0<y<1)$，从而曲线 $y=f(x)$，$y=\frac{1}{2}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{2}$ 及 y 轴所围图形绕 x 轴旋转所成旋转体的体积为

$$V=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}xy\mathrm{d}y=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{y^2}{\sqrt{1-y^2}}\mathrm{d}y$$

$$\overset{\text{令}\,y=\sin t}{=\!=\!=\!=}2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\sin^2t\mathrm{d}t=2\pi\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{\pi^2}{6}.$$

例 10.7 过坐标原点作曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 的切线，该切线与曲线 $y=\mathrm{e}^x$ 以及 x 轴围成的向 x 轴负向无限伸展的平面图形记为 D . 求

(1) D 的面积 A；

(2) D 绕直线 $x=1$ 旋转一周所成的旋转体的体积 V .

解 设切点坐标为$P(x_0, y_0)$，于是曲线$y=\mathrm{e}^x$在点P的切线斜率为

$$y'(x_0)=\mathrm{e}^{x_0},$$

切线方程为

$$y-y_0=\mathrm{e}^{x_0}(x-x_0).$$

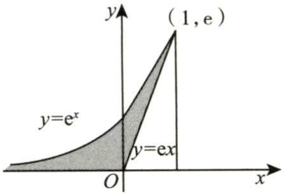


图 10-6

因为该切线经过点(0, 0)，所以$-y_0=-x_0\mathrm{e}^{x_0}$．又因为$y_0=\mathrm{e}^{x_0}$，代入求得$x_0=1$，从而$y_0=\mathrm{e}^{x_0}=\mathrm{e}$，切线方程为$y=\mathrm{e}x$，如图 10-6 所示．

(1) 取水平条面积微元，则D的面积

$$A=\int_0^{\mathrm{e}}\left(\frac{y}{\mathrm{e}}-\ln y\right)\mathrm{d}y=\left.\left(\frac{y^2}{2\mathrm{e}}-y\ln y+y\right)\right|_0^{\mathrm{e}}=\frac{\mathrm{e}}{2}+\underline{\lim_{y\to0^+}y\ln y}=\frac{\mathrm{e}}{2}.$$

见例1.28的注

(2) D绕直线$x=1$旋转一周所成的旋转体的体积微元为

$$\mathrm{d}V=\left[\pi(1-\ln y)^2-\pi\left(1-\frac{y}{\mathrm{e}}\right)^2\right]\mathrm{d}y,$$

从而

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\mathrm{e}}\left(\ln^2y-2\ln y+\frac{2y}{\mathrm{e}}-\frac{y^2}{\mathrm{e}^2}\right)\mathrm{d}y\\&=\pi\left.\left(y\ln^2y-4y\ln y+4y+\frac{y^2}{\mathrm{e}}-\frac{y^3}{3\mathrm{e}^2}\right)\right|_0^{\mathrm{e}}=\frac{5}{3}\pi\mathrm{e}.\end{aligned}$$

【**注**】第二问也可用公式 (10-1) 来做．

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_{-\infty}^{1}(x-1)^2\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\pi\int_0^1(x-1)^2\cdot\mathrm{e}\mathrm{d}x\\&=\pi\int_{-\infty}^{1}(x-1)^2\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)-\mathrm{e}\pi\int_0^1(x^2-2x+1)\mathrm{d}x\\&=\pi\mathrm{e}^x(x-1)^2\Big|_{-\infty}^{1}-2\pi\int_{-\infty}^{1}(x-1)\cdot\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{\pi\mathrm{e}}{3}\\&=-2\pi\int_{-\infty}^{1}(x-1)\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)-\frac{\pi\mathrm{e}}{3}\\&=-2\pi\mathrm{e}^x\cdot(x-1)\Big|_{-\infty}^{1}+2\pi\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x-\frac{\pi\mathrm{e}}{3}\\&=2\pi\mathrm{e}^x\Big|_{-\infty}^{1}-\frac{\pi\mathrm{e}}{3}\\&=\frac{5\pi\mathrm{e}}{3}.\end{aligned}$$

例 10.8 曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x$所围平面有界区域绕直线$y=x$旋转一周所得旋转体的体积为______.

解 应填$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$．

L： $y=\sqrt{x}, 0\leqslant x\leqslant 1$ ．L_0： $y=x$，即$x-y=0$，故$A=1, B=-1, C=0$ ．于是由公式(10-1)，有

$$\begin{aligned}V&=\frac{\pi}{[1^2+(-1)^2]^{\frac{3}{2}}}\int_0^1(x-\sqrt{x})^2\left|\frac{1}{2\sqrt{x}}-(-1)\right|\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1(x-\sqrt{x})^2\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi\ .\end{aligned}$$

3. 用定积分表达和计算函数的平均值

设$x\in[a, b]$，函数$y(x)$在$[a, b]$上的平均值为$\overline{y}=\frac{1}{b-a}\int_a^b y(x)\mathrm{d}x$ ．

例 10.9 设$f(x)$连续，且$f(x+2)-f(x)=x, \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0$，则$f(x)$在$[1, 3]$上的平均值为______.

解 应填$\frac{1}{4}$．

记$F(x)=\int_x^{x+2}f(t)\mathrm{d}t$，则

$$F'(x)=f(x+2)-f(x)=x,$$

故

$$F(x)=\int x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2+C\ .$$

由$F(0)=\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=0=C$，得$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，则

$$\overline{f}=\frac{1}{3-1}\int_1^3 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}F(1)=\frac{1}{4}\ .$$

4. 其他几何应用（仅数学一、数学二）

(1)“平面上的曲边梯形”的形心坐标公式．

设平面区域$D=\{(x, y)|0\leqslant y\leqslant f(x), a\leqslant x\leqslant b\}$，$y=f(x)$在$[a, b]$上连续，如图 10-7 所示．现推导$D$的形心坐标$\overline{x}, \overline{y}$的计算公式．

$$\overline{x}=\frac{\iint\limits_D x\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}x\mathrm{d}y}{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x};$$

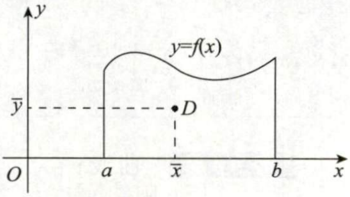


图 10-7

$$\bar{y}=\frac{\iint\limits_D y\mathrm{d}\sigma}{\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma}=\frac{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}y\mathrm{d}y}{\int_a^b\mathrm{d}x\int_0^{f(x)}\mathrm{d}y}=\frac{\frac{1}{2}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}.$$

例 10.10　设曲线 L 的方程为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$，$1\leqslant x\leqslant \mathrm{e}$，$D$ 是由曲线 L 和直线 $x=1$，$x=\mathrm{e}$ 及 x 轴围成的平面图形，则 D 的形心的横坐标为______.

解　应填 $\frac{3(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}$.

平面图形 D 的形心的横坐标的计算公式为 $\bar{x}=\frac{\int_1^{\mathrm{e}}xy\mathrm{d}x}{\int_1^{\mathrm{e}}y\mathrm{d}x}$，其中

$$\int_1^{\mathrm{e}}xy\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}x\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{16}x^4-\frac{1}{4}x^2\ln x+\frac{1}{8}x^2\right)\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3),$$

$$\int_1^{\mathrm{e}}y\mathrm{d}x=\int_1^{\mathrm{e}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{1}{12}x^3-\frac{1}{2}x\ln x+\frac{1}{2}x\right)\right|_1^{\mathrm{e}}=\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12},$$

所以 D 的形心的横坐标为

$$\bar{x}=\frac{\frac{1}{16}(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{\frac{1}{12}\mathrm{e}^3-\frac{7}{12}}=\frac{3(\mathrm{e}^2+1)(\mathrm{e}^2-3)}{4(\mathrm{e}^3-7)}.$$

(2) 平面曲线的弧长 .

①若平面光滑曲线由直角坐标方程 $y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$ 给出，则 $s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\mathrm{d}x$.

②若平面光滑曲线由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.

③若平面光滑曲线由极坐标方程 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$.

例 10.11　曲线 $y=\ln(1-x^2)$ 上相应于 $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}$ 的一段弧的长度为______.

解　应填 $\ln 3-\frac{1}{2}$.

$$s=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{1-x^2}\right)^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1+x^2}{1-x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}-1\right)\mathrm{d}x=\ln 3-\frac{1}{2}.$$

例 10.12　阿基米德螺线 $r=\theta$ 上相应于 θ 从 0 到 2π 一段的弧长为______.

解 应填$\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right)$.

曲线图形如图 10-8 所示 .

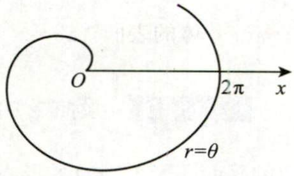


图 10-8

由题意，所求弧长为

$$\begin{aligned}s&=\int_0^{2\pi}\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{\theta^2+1^2}\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\theta^2}\mathrm{d}\theta\\&=\left[\frac{\theta}{2}\sqrt{1+\theta^2}+\frac{1}{2}\ln\left(\theta+\sqrt{1+\theta^2}\right)\right]\Bigg|_0^{2\pi}\\&=\pi\sqrt{1+4\pi^2}+\frac{1}{2}\ln\left(2\pi+\sqrt{1+4\pi^2}\right).\end{aligned}$$

(3) 旋转曲面的面积 (侧面积).

①曲线L：$y=f(x), a\leqslant x\leqslant b$，绕$x$轴旋转一周所得旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_a^b|y|\sqrt{1+(y_x')^2}\mathrm{d}x .$$

②曲线L：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\end{cases}\alpha\leqslant t\leqslant\beta, x'(t)\neq0$，绕$x$轴旋转一周所得旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|y(t)|\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\mathrm{d}t .$$

③曲线L：$r=r(\theta), \alpha\leqslant\theta\leqslant\beta$，绕$x$轴旋转一周所得旋转曲面的面积

$$S=2\pi\int_\alpha^\beta|r(\theta)\sin\theta|\sqrt{r^2(\theta)+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta .$$

例 10.13 设曲线$y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant2)$，则该曲线绕$x$轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为______.

解 应填$\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1)$.

曲线$y=\sqrt{x-1}(1\leqslant x\leqslant2)$绕$x$轴旋转一周所得到的旋转体的表面积为

$$S=\int_1^2 2\pi y\sqrt{1+(y')^2}\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\sqrt{4x-3}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{6}(5\sqrt{5}-1) .$$

例 10.14 设星形线的方程为$\begin{cases}x=2\cos^3 t,\\y=2\sin^3 t,\end{cases}$ 则它绕x轴旋转一周而成的旋转体的表面积为______.

解 应填$\frac{48}{5}\pi$．

旋转体的表面积为

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi y\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2}\,\mathrm{d}t$$

$$=4\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3 t\cdot 6\sin t\cos t\,\mathrm{d}t=\frac{48}{5}\pi\ .$$

(4) 平行截面面积为已知的立体体积．

在区间$[a,b]$上，垂直于x轴的平面截立体Ω所得到的截面面积为x的连续函数$A(x)$，则Ω的体积为

$$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x\ .$$

例 10.15 曲线$y=\sqrt{x}$与$y=x$所围平面有界区域绕直线$y=x$旋转一周所得旋转体的体积为______.

解 应填$\frac{\sqrt{2}}{60}\pi$．

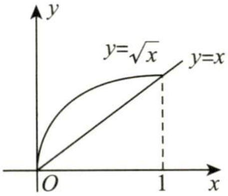


图 10-9

在例 10.8 中，我们用了一种方法求此问题，这里，我们再从“平行截面面积为已知的立体体积”角度，提供第二种方法进行求解．

$y=\sqrt{x}$与$y=x$交于点$(0,0)$, $(1,1)$，如图 10-9 所示，曲线$y=\sqrt{x}$上的点到$y=x$的距离为$r=\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$，故垂直于$x$轴的平面截“该旋转体”所得的截面面积为$A(x)=\sqrt{2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2$．因此，旋转体的体积为

$$V=\int_0^1\sqrt{2}\pi\left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\pi}{\sqrt{2}}(x-2x^{\frac{3}{2}}+x^2)\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{2}}{60}\pi\ .$$

【注】事实上，$V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$就是$V=\int_a^b \pi f^2(x)\mathrm{d}x$的一般化．

基础习题精练

习 题

10.1 双纽线$(x^2+y^2)^2=x^2-y^2$所围成的区域的面积用定积分表示为（　　）.

(A) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$　　(B) $4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta \mathrm{d}\theta$　　(C) $2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{\cos 2\theta}\mathrm{d}\theta$　　(D) $\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta)^2\mathrm{d}\theta$

10.2 位于曲线$y=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(0\leqslant x<+\infty)$下方，$x$轴上方的无界区域绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积为______.

10.3 圆域$x^2+(y-b)^2\leqslant k^2(0<k<b)$绕$x$轴旋转一周所得旋转体的体积$V=$______.

10.4（仅数学一、数学二）曲线$x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$相应于$1\leqslant y\leqslant \mathrm{e}$的一段弧的长度为______.

10.5（仅数学一、数学二）星形线$x=\cos^3 t$，$y=\sin^3 t(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$的弧长为______.

10.6 已知曲线$y=a\sqrt{x}(a>0)$与曲线$y=\ln\sqrt{x}$在点$(x_0,\ y_0)$处有公共切线，求：

(1) 常数a及切点$(x_0,\ y_0)$；

(2) 两曲线与x轴围成的平面图形的面积S.

10.7 设D_1是由抛物线$y=2x^2$和直线$x=a$，$x=2$及$y=0$所围成的平面区域，D_2是由抛物线$y=2x^2$和直线$y=0$，$x=a$所围成的平面区域，其中$0<a<2$.

(1) 求D_1绕x轴旋转一周而成的旋转体体积V_1，D_2绕y轴旋转一周而成的旋转体体积V_2；

(2) 问当a为何值时，V_1+V_2取得最大值？并求此最大值.

10.8 计算由摆线$\begin{cases}x=a(t-\sin t),\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}(a>0,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴所围平面图形绕$y$轴旋转一周所得旋转体的体积.

10.9 求曲线$y=3-|x^2-1|$与x轴围成的封闭图形绕直线$y=3$旋转一周所得旋转体的体积.

解 答

10.1 (A) **解** 双纽线的极坐标方程为$r^2=\cos 2\theta$，根据对称性，所求面积为

$$S=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2\theta\mathrm{d}\theta\ .$$

故选 (A).

10.2 $\frac{\pi^2}{2}$ **解** 所求体积为

$$\int_0^{+\infty}\pi\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2\mathrm{d}x=\lim_{b\to+\infty}\pi\int_0^b\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\lim_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b=\frac{\pi^2}{2}\ .$$

10.3 $2\pi^2k^2b$ **解** 如图 10-10 所示，上半圆周为$y_2=b+\sqrt{k^2-x^2}$，下半圆周为$y_1=b-\sqrt{k^2-x^2}$.
其体积微元为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=(\pi y_2^2-\pi y_1^2)\mathrm{d}x\\&=\pi[(b+\sqrt{k^2-x^2})^2-(b-\sqrt{k^2-x^2})^2]\mathrm{d}x\\&=4\pi b\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

则所求旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V&=4\pi b\int_{-k}^{k}\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=8\pi b\int_0^k\sqrt{k^2-x^2}\mathrm{d}x\\&=8\pi b\cdot\frac{\pi k^2}{4}=2\pi^2k^2b\ .\end{aligned}$$

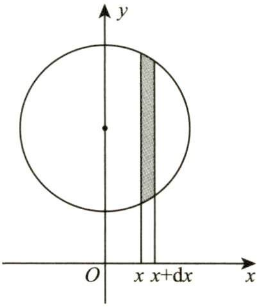


图 10-10

【注】采用对y积分，即取微元$[y, y+\mathrm{d}y]$亦可算出V.

10.4 $\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1)$ **解** 以y作为参数，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right)^2+1}\mathrm{d}y=\sqrt{\left(\frac{y}{2}-\frac{1}{2y}\right)^2+1}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y\ ,$$

故弧长
$$s=\int_1^{e}\frac{1}{2}\left(y+\frac{1}{y}\right)\mathrm{d}y=\frac{1}{4}(\mathrm{e}^2+1).$$

10.5 6 **解** 如图 10-11 所示，曲线具有对称性，我们只需计算在第一象限的弧段，即 $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 对应的部分弧长 . 故

$$s=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(-3\cos^2t\sin t)^2+(3\sin^2t\cos t)^2}\,\mathrm{d}t$$
$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}3|\sin t\cos t|\,\mathrm{d}t=12\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\cos t\mathrm{d}t=6.$$

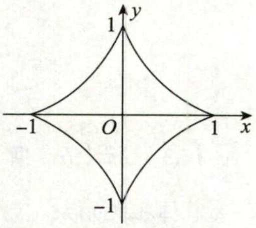


图 10-11

10.6 **分析** 利用两条曲线都经过点 (x_0,y_0) 及两条曲线在点 (x_0,y_0) 处有公共切线可列出三个方程，从而可解出常数 a, x_0, y_0，然后可求出平面图形的面积 .

解 (1) 由题设条件可得
$$\begin{cases}y_0=a\sqrt{x_0},\\ y_0=\ln\sqrt{x_0},\\ \dfrac{a}{2\sqrt{x_0}}=\dfrac{1}{2x_0},\end{cases}$$

解此方程组可得 $a=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $x_0=\mathrm{e}^2$, $y_0=1$，于是切点为 $(\mathrm{e}^2,1)$.

(2) **方法一** 画出曲线 $y=\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}$ 与曲线 $y=\ln\sqrt{x}$ 的图形，则两曲线与 x 轴围成的平面图形 (见图 10-12) 的面积
$$S=\int_0^1(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}^2y^2)\mathrm{d}y=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$$

方法二
$$S=\int_0^1\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x+\int_1^{\mathrm{e}^2}\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}-\ln\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$$

方法三
$$S=\int_0^{\mathrm{e}^2}\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{x}\mathrm{d}x-\int_1^{\mathrm{e}^2}\ln\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\mathrm{e}^2-\frac{1}{2}.$$

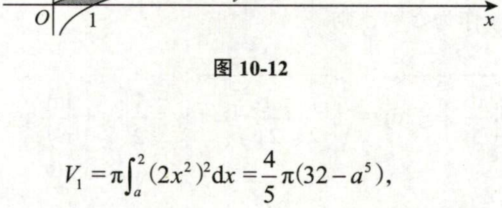


图 10-12

10.7 **解** (1) 由题意得，
$$V_1=\pi\int_a^2(2x^2)^2\mathrm{d}x=\frac{4}{5}\pi(32-a^5),$$

$$V_2=\pi a^2\cdot 2a^2-\pi\int_0^{2a^2}\frac{y}{2}\mathrm{d}y=\pi a^4 .$$

(2) 由 (1) 得，

$$V=V_1+V_2=\frac{4}{5}\pi(32-a^5)+\pi a^4 .$$

令

$$V'=4\pi a^3(1-a)=0,$$

得区间 $(0,\ 2)$ 内唯一的驻点 $a=1$，且 $V''(1)=-4\pi<0$，因此 $a=1$ 是极大值点，即最大值点，此时

$$V_{\max}=\frac{129}{5}\pi .$$

10.8　解　作平面图形如图 10-13 所示．

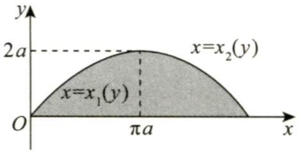


图 10-13

方法一　平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为

$$V_y=\pi\left[\int_0^{2a}x_2^2(y)\mathrm{d}y-\int_0^{2a}x_1^2(y)\mathrm{d}y\right]$$

$$=\pi\left[\int_{2\pi}^{\pi}a^2(t-\sin t)^2 a\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}a^2(t-\sin t)^2 a\sin t\mathrm{d}t\right]$$

$$=\pi a^3\left[-\int_{\pi}^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t\right]$$

$$=-\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t ,$$

其中　$$\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(t^2\sin t+\sin^3 t-2t\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}t^2\sin t\mathrm{d}t-\int_0^{2\pi}2t\sin^2 t\mathrm{d}t .$$

因为　$$\int_0^{2\pi}t^2\sin t\mathrm{d}t=-t^2\cos t\Big|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}2t\cos t\mathrm{d}t$$

$$=-4\pi^2+2t\sin t\Big|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}2\sin t\mathrm{d}t=-4\pi^2 ,$$

$$\int_0^{2\pi}2t\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}2t\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\int_0^{2\pi}(t-t\cos 2t)\mathrm{d}t$$

$$=\left(\frac{1}{2}t^2-\frac{t\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}\frac{\sin 2t}{2}\mathrm{d}t$$

$$=2\pi^2-\frac{\cos 2t}{4}\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=2\pi^2 ,$$

所以　$$\int_0^{2\pi}(t-\sin t)^2\sin t\mathrm{d}t=-4\pi^2-2\pi^2=-6\pi^2 ,$$

则　$$V_y=-\pi a^3\cdot(-6\pi^2)=6\pi^3a^3 .$$

方法二　平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积为

$$V_y = 2\pi\int_0^{2\pi a} xy(x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^{2\pi} a(t-\sin t)a(1-\cos t)a(1-\cos t)\mathrm{d}t$$

$$= 2\pi a^3\int_0^{2\pi}(t-2t\cos t+t\cos^2 t-\sin t+2\sin t\cos t-\sin t\cos^2 t)\mathrm{d}t$$

$$= 6\pi^3 a^3 .$$

10.9 **解** 作出图形如图 10-14 所示．$\overset{\frown}{AB}$的方程为$y = x^2+2(0\leqslant x\leqslant 1)$，$\overset{\frown}{BC}$的方程为$y=4-x^2(1\leqslant x\leqslant 2)$．

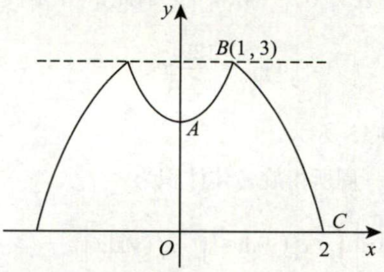


图 10-14

设旋转体在区间 [0, 1] 上的体积为 V_1，在区间 [1, 2] 上的体积为 V_2，则它们的体积微元分别为

$$\mathrm{d}V_1 = \pi\{3^2-[3-(x^2+2)]^2\}\mathrm{d}x = \pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x,$$

$$\mathrm{d}V_2 = \pi\{3^2-[3-(4-x^2)]^2\}\mathrm{d}x = \pi(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x .$$

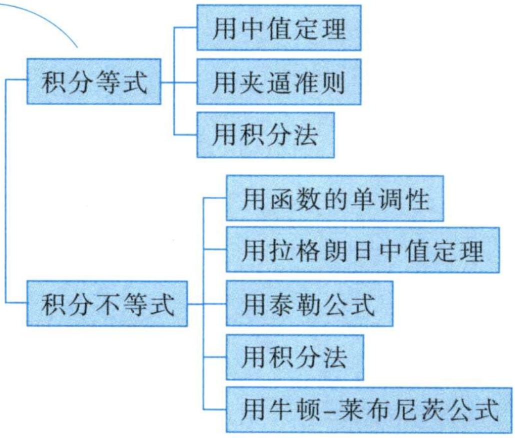
由对称性得

$$V = 2(V_1+V_2) = 2\pi\int_0^1(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x + 2\pi\int_1^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x$$

$$= 2\pi\int_0^2(8+2x^2-x^4)\mathrm{d}x = \frac{448}{15}\pi .$$

第11讲 一元函数积分学的应用（二）——积分等式与积分不等式

基础知识结构



常考：① $\int_a^b$

② $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b$

基础内容精讲

积分等式问题主要涉及积分形式的中值定理 (见例 11.1，例 11.2)，用夹逼准则求一类积分的极限 (见例 11.3 ~ 11.5) 与证明某些特殊的积分等式 [见例 11.6(1)]；积分不等式问题主要涉及积分形式的不等式证明，可用函数的单调性 (见例 11.7)、拉格朗日中值定理 (见例 11.8)、泰勒公式 (见例 11.9)、积分法 (见例 11.10) 与牛顿 – 莱布尼茨公式 (见例 11.11) 来解决 .

一、积分等式

1. 用中值定理

例 11.1 (1) 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，且 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号，证明：存在 $\xi\in(a, b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\,;$$

→ 推广的积分中值定理

(2) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上连续，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2 f(x)\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$.

(1) **证明** 若 $g(x)\equiv 0$，结论显然成立；

若 $g(x)\not\equiv 0$，由于不变号，不妨设 $g(x)>0$. 令

$$F(x)=\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t,\ G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

在 $[a,b]$ 上应用柯西中值定理，有 $\dfrac{F(b)-F(a)}{G(b)-G(a)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}$，即

$$\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x-0}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-0}=\frac{f(\xi)g(\xi)}{g(\xi)},$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,\ \xi\in(a,b),$$

其中 $\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$. 同理可得 $g(x)<0$ 时成立 . 得证 .

(2) **解** 由 (1) 知，$\int_1^2 f(x)\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=f(\xi_n)\int_1^2\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x,\ 1<\xi_n<2$. 因 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，则 $f(\xi_n)$ 有界；又在 $(1,2)$ 内，$\mathrm{e}^{x^n}>x^n+1>0$，即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}^{x^n}}<\dfrac{1}{x^n+1}<\dfrac{1}{x^n}$.

于是
$$0<\int_1^2\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x<\int_1^2 x^{-n}\mathrm{d}x=\frac{1}{1-n}x^{1-n}\Big|_1^2=\frac{1}{1-n}(2^{1-n}-1),$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-n}(2^{1-n}-1)=0,$$

由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=0$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_1^2 f(x)\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=0$.

【注】(1) 由于 $\xi\in(a,b)\subset[a,b]$，故闭区间上结论亦成立，即设 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 不变号，则至少存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

(2) 对于 $\int_1^2 f(x)\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$，虽然上下限为常数，但被积函数 $f(x)\mathrm{e}^{-x^n}$ 与 n 有关，故中值 ξ_n 与 n 有关；

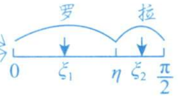
同理，对于 $\int_1^2\mathrm{e}^{-x^n}$，若写成 $\int_1^2\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\eta_n^n}$, $\eta_n\in(1,2)$, η_n 亦与 n 有关，考生需注意，此时不能用 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-\eta_n^n}=0$.

例 11.2 设 $f(x)$ 在 $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上有二阶导数，且 $f(0)=2$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}-1)$. 证明：存在 $\xi\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使 $f''(\xi)<0$.

证明 由推广的积分中值定理知，存在 $\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得 $f(\eta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\sin x}\cos x\mathrm{d}x=2(\mathrm{e}-1)$.

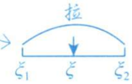
又$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x}\cos x dx = e^{\sin x}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = e-1$，于是$f(\eta)\cdot(e-1)=2(e-1)$，即存在$\eta\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，使得$f(\eta)=2$．

因$f(0)=2$，$f(\eta)=2$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$，由罗尔定理知，存在$\underline{\xi_1\in(0,\eta)}$，使得$f'(\xi_1)=0$，又由拉格朗日中值定理知，存在$\underline{\xi_2\in\left(\eta,\dfrac{\pi}{2}\right)}$，使得



$$f'(\xi_2)=\frac{f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)-f(\eta)}{\dfrac{\pi}{2}-\eta}=\frac{1-2}{\dfrac{\pi}{2}-\eta}<0,$$

再由拉格朗日中值定理知，存在$\underline{\xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)}$，使得$f''(\xi)=\dfrac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0$．



2. 用夹逼准则

例 11.3　$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1(n+1)x^n\ln(1+x)dx=$（　　）．

(A) $\ln 2$　　(B) 1

(C) e^2　　(D) $+\infty$

解　应选 (A).

$$\int_0^1(n+1)x^n\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d(x^{n+1})$$

$$=x^{n+1}\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx$$

$$=\ln 2-\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx,$$

对于$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx$,利用放缩法，由于$0\leqslant\dfrac{x^{n+1}}{1+x}\leqslant x^{n+1}$，$0\leqslant x\leqslant 1$，故

$$0\leqslant\int_0^1\frac{x^{n+1}}{1+x}dx\leqslant\int_0^1 x^{n+1}dx=\frac{1}{n+2},$$

当$n\to\infty$时，由夹逼准则，有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1\dfrac{x^{n+1}}{1+x}dx=0$．于是原式$=\ln 2$．

例 11.4　(1) 比较$\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt$与$\int_0^1 t^n|\ln t|dt\,(n=1,2,\cdots)$的大小，说明理由；

(2) 记$u_n=\int_0^1|\ln t|[\ln(1+t)]^n dt\,(n=1,2,\cdots)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$．

解　(1) 当$0\leqslant t\leqslant 1$时，$0\leqslant\ln(1+t)\leqslant t$，所以

$$0 \leqslant |\ln t|[\ln(1+t)]^n \leqslant t^n |\ln t|,$$

根据积分的保号性，得

$$\int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t .$$

(2) 由 (1) 知，
$$0 \leqslant u_n = \int_0^1 |\ln t|[\ln(1+t)]^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t .$$

因为
$$\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = -\int_0^1 t^n \ln t \mathrm{d}t = -\frac{t^{n+1}}{n+1}\ln t \Big|_0^1 + \frac{1}{n+1}\int_0^1 t^n \mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2},$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 t^n |\ln t| \mathrm{d}t = 0$，于是由夹逼准则得 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

【注】 更为一般的结论：设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

证明 由 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有最大值 M 和最小值 m，即 $m \leqslant f(x) \leqslant M$，于是 $mx^n \leqslant x^n f(x) \leqslant Mx^n$. 根据积分的保号性，有 $\int_0^1 mx^n \mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 Mx^n \mathrm{d}x$，即 $\frac{m}{n+1} \leqslant \int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{M}{n+1}$. 根据夹逼准则，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)\mathrm{d}x = 0$.

如例 11.4 中所取的 $f(x) = \begin{cases} |\ln x|, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n |\ln x| \mathrm{d}x = 0$.

例 11.5 设函数 $f(x) = x - [x]$，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t =$ ______.

解 应填 $\frac{1}{2}$.

由例 1.13 可知 $f(x)$ 是周期为 1 的周期函数，其图像如图 11-1 所示 .

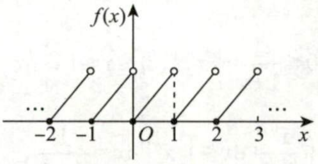


图 11-1

$\int_0^n f(t)\mathrm{d}t = n\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，表示 n 个三角形的面积. 每个三角形的面积为 $\frac{1}{2}$，故为 $\frac{n}{2}$.

当 $n \leqslant x < n+1$ 时，$\frac{n}{2} = \int_0^n f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t = \frac{n+1}{2}$，于是

$$\frac{n}{2(n+1)} = \boxed{\frac{1}{n+1}\int_0^n f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t < \frac{1}{n}\int_0^{n+1} f(t)\mathrm{d}t} = \frac{n+1}{2n} .$$

当 $0<a<y<b$，$0<c<x<d$ 时，有 $\frac{a}{d} < \frac{y}{x} < \frac{b}{c}$

当 $x \to +\infty$ 时，$n \to \infty$，由夹逼准则，有 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}$.

3. 用积分法

例 11.6　设$f(x)$的二阶导数$f''(x)$在$[0,1]$上连续，且$f(0)=f(1)=0$，证明：

(1) $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x$；

(2) $\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{12}\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f''(x)|\}$.

证明　(1) $\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)f''(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^1 x(x-1)\mathrm{d}[f'(x)]$

$$=\frac{1}{2}x(x-1)f'(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 f'(x)(2x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{1}{2}\int_0^1(2x-1)\,\mathrm{d}[f(x)]$$

$$=-\frac{1}{2}(2x-1)f(x)\Big|_0^1+\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

由条件$f(0)=f(1)=0$，知结论成立 .

(2) 记$M=\max\limits_{0\leqslant x\leqslant 1}\{|f''(x)|\}$，则由 (1) 有

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{M}{2}\int_0^1 x(1-x)\mathrm{d}x=\frac{M}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{M}{12}\text{ .}$$

二、积分不等式

1. 用函数的单调性

通常的做法：首先将某一积分限（通常取上限）变量化，然后移项构造辅助函数，由辅助函数的单调性来证明不等式，此方法多用于所给条件为“$f(x)$在$[a,b]$上连续”的情形 .

例 11.7　设函数$f(x)$, $g(x)$在区间$[a,b]$上连续，且$f(x)$单调增加，$0\leqslant g(x)\leqslant 1$. 证明：

(1) $0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a$, $x\in[a,b]$；

(2) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

证明　(1) 因为$0\leqslant g(x)\leqslant 1$，所以当$x\in[a,b]$时，有$\int_a^x 0\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant\int_a^x 1\mathrm{d}t$，即

$$0\leqslant\int_a^x g(t)\mathrm{d}t\leqslant x-a\text{ .}$$

(2) 令$F(x)=\int_a^{a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u} f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)g(t)\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$.

因为$f(x)$, $g(x)$在区间$[a,b]$上连续，所以$F(x)$在区间$[a,b]$上可导，且

$$F'(x)=\left\{f\left[a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\right]-f(x)\right\}g(x).$$

由 (1) 知，$a+\int_a^x g(u)\mathrm{d}u\leqslant x$, $x\in[a,b]$. 又因为$f(x)$单调增加，且$g(x)\geqslant 0$，所以$F'(x)\leqslant 0$，从而$F(x)$在区间$[a,b]$上单调减少.

又$F(a)=0$，故$F(b)\leqslant 0$，即$\int_a^{a+\int_a^b g(t)\mathrm{d}t} f(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

2. 用拉格朗日中值定理

此方法多用于所给条件为“$f(x)$一阶可导”且某一端点值较简单 (甚至为 0) 的题目 .

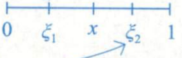
例 11.8 设$f(x)$在$[0,1]$上具有一阶连续导数，且$f(0)=f(1)=0$. 记$M=\max\limits_{x\in[0,1]}\{|f'(x)|\}$. 证明：

见到f, f', 想拉格朗日中值定理

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{4}M.$$

证明 将大区间$[0,1]$分成两个小区间$[0,x]$和$[x,1]$.

在$[0,x]$上对$f(x)$使用拉格朗日中值定理，得$f(x)-f(0)=f(x)=f'(\xi_1)x$，其中$\xi_1\in(0,x)$，于是



$$|f(x)|=|f'(\xi_1)|x.$$

在$[x,1]$上对$f(x)$使用拉格朗日中值定理，得$f(1)-f(x)=-f(x)=f'(\xi_2)(1-x)$，其中$\xi_2\in(x,1)$，于是

$$|f(x)|=|f'(\xi_2)|(1-x).$$

当$x\in[0,1]$时，因为$M=\max\{|f'(x)|\}$，所以

$$|f(x)|\leqslant Mx,\ |f(x)|\leqslant M(1-x),$$

于是

$$\left|\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_x^1 f(t)\mathrm{d}t\right|$$

$$\leqslant M\int_0^x t\mathrm{d}t+M\int_x^1(1-t)\mathrm{d}t=M\left[\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}\right],$$

其中，$\frac{x^2}{2}+\frac{(1-x)^2}{2}=x^2-x+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}$，故得证 .

3. 用泰勒公式

此方法多用于所给条件为“$f(x)$二阶可导”且题中有简单函数值 (甚至为 0) 的题目 .

例 11.9 设$f(x)$在$[0,2]$上二阶导数连续，且$f(1)=0$. 当$x\in[0,2]$时，记$M=\max\{|f''(x)|\}$，证明：$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{3}M$.

证明　根据题设，选取点 $x_0=1$ 展开成泰勒公式，则

$$f(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2\ (\ \xi\text{介于}x,1\text{之间}),$$

$$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=f'(1)\int_0^2(x-1)\mathrm{d}x+\int_0^2\frac{f''(\xi)}{2}(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^2 f''(\xi)(x-1)^2\mathrm{d}x,$$

$$\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^2|f''(\xi)|(x-1)^2\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}M\int_0^2(x-1)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}M,$$

故得证．

4. 用积分法

例 11.10　设 $f(x)$ 在 $[0,2\pi]$ 上具有一阶连续导数，且 $f'(x)\geqslant0$，证明：对任意正整数 n 有

$$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)].$$

证明　$\left|\int_0^{2\pi}f(x)\sin nx\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f(x)\mathrm{d}(\cos nx)\right|=\left|\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|$

$$\leqslant\left|\frac{1}{n}f(x)\cos nx\Big|_0^{2\pi}\right|+\left|\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\cos nx\mathrm{d}x\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}|f'(x)\cos nx|\mathrm{d}x$$

$$\leqslant\frac{1}{n}[f(2\pi)-f(0)]+\frac{1}{n}\int_0^{2\pi}f'(x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{n}[f(2\pi)-f(0)].$$

5. 用牛顿–莱布尼茨公式

例 11.11　设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)=f(b)=0$．证明：

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

证明　由 $f(x)=f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t, \tag{①}$$

由 $f(x)=f(x)-f(b)=\int_b^x f'(t)\mathrm{d}t$ 得

$$|f(x)|\leqslant\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t. \tag{②}$$

式① + 式②，得 $2|f(x)|\leqslant\int_a^x|f'(t)|\mathrm{d}t+\int_x^b|f'(t)|\mathrm{d}t=\int_a^b|f'(t)|\mathrm{d}t$，即

$$|f(x)|\leqslant\frac{1}{2}\int_a^b|f'(x)|\mathrm{d}x.$$

基础习题精练

习题

11.1 若函数 $\varphi(x)$ 具有二阶导数，且满足 $\varphi(2)>\varphi(1),\ \varphi(2)>\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$，证明：至少存在一点 $\xi\in(1,3)$，使得 $\varphi''(\xi)<0$.

11.2 设 $\varphi(x)$ 是可微函数 $f(x)$ 的反函数，且 $f(1)=0$，证明：

$$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\ .$$

11.3 证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

11.4 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且严格单调增加，证明：

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ .$$

11.5 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且单调减少，证明：当 $0<\lambda<1$ 时，$\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x\geqslant\lambda\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

11.6 设 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上有二阶导数，且 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1,\ f''(x)>0$，证明：$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant 1$.

解答

11.1 **证明** 由积分中值定理，可知至少存在一点 $\eta\in(2,3)$，使得

$$\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\varphi(\eta)(3-2)=\varphi(\eta)\ .$$

对 $\varphi(x)$ 在 $[1,2]$ 和 $[2,\eta]$ 上分别应用拉格朗日中值定理，并注意到 $\varphi(1)<\varphi(2),\ \varphi(\eta)<\varphi(2)$，得

$$\varphi'(\xi_1)=\frac{\varphi(2)-\varphi(1)}{2-1}>0,\ 1<\xi_1<2,$$

$$\varphi'(\xi_2)=\frac{\varphi(\eta)-\varphi(2)}{\eta-2}<0,\ 2<\xi_2<\eta\leqslant 3\ .$$

在 $[\xi_1,\xi_2]$ 上对导函数 $\varphi'(x)$ 应用拉格朗日中值定理，有

$$\varphi''(\xi)=\frac{\varphi'(\xi_2)-\varphi'(\xi_1)}{\xi_2-\xi_1}<0,\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)\subset(1,3)\ .$$

11.2　分析　左端定积分的被积函数为变限积分，考虑分部积分法 .

证明　$\int_0^1\left[\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = x\int_0^{f(x)}\varphi(t)\mathrm{d}t\Big|_0^1-\int_0^1 x\varphi[f(x)]\cdot f'(x)\mathrm{d}x$

$$=-\int_0^1 x^2\cdot f'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^1 x^2\mathrm{d}[f(x)]$$

$$=-x^2f(x)\Big|_0^1+2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x=2\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\ .$$

11.3　证明　要证原不等式成立，只需证 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0$.

方法一　$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

在上式右边第二项积分中，令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，得

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin t-\cos t}{1+\left(\frac{\pi}{2}-t\right)^2}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\left[\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}\right]\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故原式得证 .

方法二

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{1+\xi^2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1+\eta^2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=(\sqrt{2}-1)\left(\frac{1}{1+\xi^2}-\frac{1}{1+\eta^2}\right),$$

其中 $0\leqslant\xi\leqslant\frac{\pi}{4}$，$\frac{\pi}{4}\leqslant\eta\leqslant\frac{\pi}{2}$，从而有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x-\sin x}{1+x^2}\mathrm{d}x\geqslant 0,$$

故原式得证 .

11.4　分析　$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\Leftrightarrow(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x<0$，可构造辅助函数，用单调性证明 .

证明 令 $F(t)=(a+t)\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-2\int_a^t xf(x)\mathrm{d}x,\ t\in[a,\ b]$，则

$$F'(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x+(a+t)f(t)-2tf(t)=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-(t-a)f(t)$$

$$=\int_a^t f(x)\mathrm{d}x-\int_a^t f(t)\mathrm{d}x=\int_a^t[f(x)-f(t)]\mathrm{d}x\ .$$

因为$f(x)$在$[a,\ b]$上严格单调增加，所以$f(x)-f(t)<0$，于是有

$$F'(t)=\int_a^t\left[f(x)-f(t)\right]\mathrm{d}x<0,$$

即$F(t)$严格单调减少，又$F(a)=0$，所以$F(b)<0$，即

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x<0,$$

即

$$(a+b)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x<2\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x\ .$$

11.5 **证明** 要证原不等式成立，只需证 $\dfrac{\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x}{\lambda}\geqslant\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

令 $F(t)=\dfrac{\int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x}{t}$,由于 $F(\lambda)=\dfrac{\int_0^\lambda f(x)\mathrm{d}x}{\lambda}$, $F(1)=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$,故只需证当$\lambda\in(0,1)$时，有

$$F(\lambda)\geqslant F(1)\ . \tag{*}$$

由$F(t)$在$(0,1]$内连续，在$(0,1)$内可导，且

$$F'(t)=\frac{f(t)t-\int_0^t f(x)\mathrm{d}x}{t^2}=\frac{f(t)t-f(c)t}{t^2}=\frac{f(t)-f(c)}{t},$$

其中$0\leqslant c\leqslant t$，知$f(c)\geqslant f(t)$，有$F'(t)\leqslant 0$，知$F(t)$在$(0,1]$内单调减少 . 又$0<\lambda<1$，有$F(\lambda)\geqslant F(1)$，即(*)式成立，故原不等式成立 .

11.6 **证明**

$$f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{f''(\xi)}{2!}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2,$$

其中ξ介于x与$\frac{1}{2}$之间 . 又由$f''(x)>0$，则$f''(\xi)>0$，于是

$$f(x)\geqslant f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\ .$$

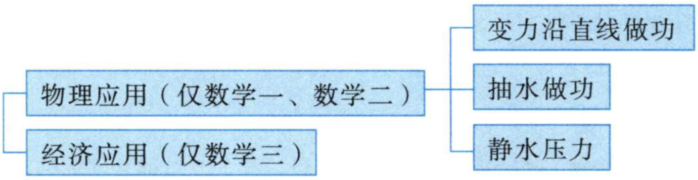
两边在区间$[0,1]$上对x积分，得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_0^1\left[f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]\mathrm{d}x$$

$$=f\left(\frac{1}{2}\right)+f'\left(\frac{1}{2}\right)\int_0^1\left(x-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x=f\left(\frac{1}{2}\right)=1\ .$$

第12讲 一元函数积分学的应用（三）——物理应用与经济应用

基础知识结构



基础内容精讲

1. 物理应用（仅数学一、数学二）

(1) 变力沿直线做功 .

设方向沿 x 轴正向的力函数为 $y=F(x)(a\leqslant x\leqslant b)$，则物体沿 x 轴从点 a 移动到点 b 时，变力 $F(x)$ 所做的功 (见图 12-1) 为

$$W=\int_a^b F(x)\mathrm{d}x,$$

功的微元 $\mathrm{d}W=F(x)\mathrm{d}x$.

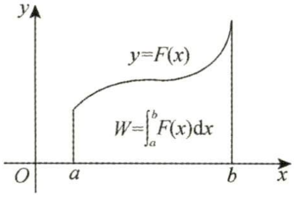


图 12-1

例 12.1 用铁锤将一铁钉击入木板，设木板对铁钉的阻力与铁钉击入木板的深度成正比，在击第一次时，将铁钉击入木板 1 cm. 如果铁锤每次击打做功相等，则第二锤可将铁钉又击入______.

解 应填 $(\sqrt{2}-1)$cm .

设第 n 次击打后，铁钉击入木板的深度为 x_n cm，第 n 次击打时，铁锤所做的功为 $W_n(n=1,2)$，由题设，当铁钉击入木板的深度为 x cm 时，木板对铁钉的阻力的大小为 kx（ k 为常数），所以

$$W_1=\int_0^{x_1} kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_1^2,\ x_1=1\ ;$$

$$W_2=\int_{x_1}^{x_2} kx\mathrm{d}x=\frac{k}{2}x_2^2-\frac{k}{2}x_1^2,$$

又 $W_2=W_1$，从而

$$\frac{k}{2}x_2^2=2W_1=k,$$

于是
$$x_2=\sqrt{2},$$

所以第二锤可将铁钉又击入$(\sqrt{2}-1)$cm．

(2) 抽水做功．

如图 12-2 所示，将容器中的水全部抽出所做的功为

$$W=\rho g\int_a^b xA(x)\mathrm{d}x,$$

其中ρ为水的密度，g为重力加速度．

功的微元$\mathrm{d}W=\rho gxA(x)\mathrm{d}x$为位于$x$处厚度为$\mathrm{d}x$，水平截面面积为$A(x)$的一层水被抽出（路程为$x$）所做的功．

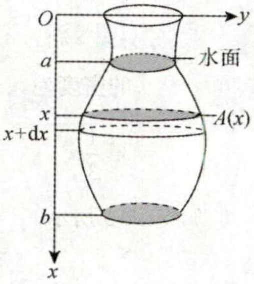


图 12-2

求解这类问题的关键是确定x处的水平截面面积$A(x)$，其余的量都是固定的．

例 12.2 有一倒圆锥形容器，高为a，上底半径为b，装满水．记水的密度为ρ，重力加速度为g，则将容器中的水全部从容器顶部抽出所做的功为______．

解 应填$\frac{1}{12}\rho g a^2b^2\pi$．

如图 12-3 所示，建立坐标系．在x处的水平截面的半径r满足$\frac{r}{b}=\frac{a-x}{a}$，即

$$r=\frac{b(a-x)}{a}.$$

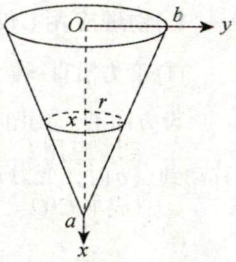


图 12-3

截面面积
$$A(x)=\pi r^2=\pi\cdot\left[\frac{b(a-x)}{a}\right]^2=\frac{b^2(a-x)^2\pi}{a^2}.$$

所以将水全部抽出所做的功

$$W=\rho g\int_0^a xA(x)\mathrm{d}x=\rho g\int_0^a x\frac{b^2(a-x)^2\pi}{a^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{12}\rho g a^2b^2\pi.$$

(3) 静水压力．

垂直浸没在水中的平板$ABCD$（见图 12-4）的一侧受到的水压力为

$$P=\rho g\int_a^b x[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x,$$

其中ρ为水的密度，g为重力加速度．

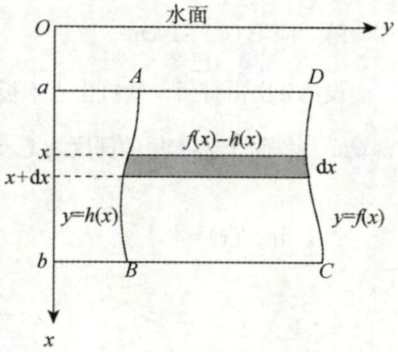


图 12-4

压力微元 $\mathrm{d}P=\rho gx[f(x)-h(x)]\mathrm{d}x$，即图中矩形条所受到的压力．$x$ 表示水深，$f(x)-h(x)$ 是矩形条的宽度，$\mathrm{d}x$ 是矩形条的高度．

【注】水压力问题的特点：压强随水的深度的改变而改变．求解这类问题的关键是确定水深 x 处的平板的宽度 $f(x)-h(x)$．

例 12.3　斜边长为 $2a$ 的等腰直角三角形平板铅直地沉没在水中，且斜边与水面相齐．记重力加速度为 g，水的密度为 ρ，则该平板一侧所受的水压力为______．

解　应填 $\frac{1}{3}a^3\rho g$．

如图 12-5 所示，该平板一侧所受的水压力为

$$P=\int_0^a 2\rho g(a-y)y\mathrm{d}y=2\rho g\int_0^a(ay-y^2)\mathrm{d}y=2\rho g\left(\frac{a^3}{2}-\frac{a^3}{3}\right)=\frac{1}{3}a^3\rho g\ .$$

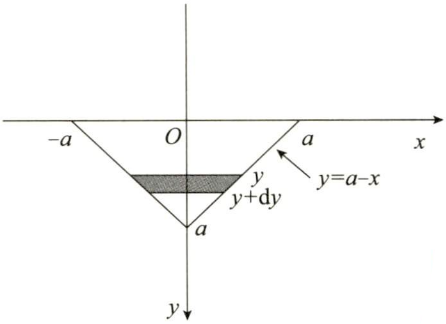


图 12-5

2. 经济应用（仅数学三）

①总成本 $C(Q)$，边际成本 $C'(Q)$，固定成本 C_0 之间的关系为

$$C(Q)=\int_0^Q C'(t)\mathrm{d}t+C_0\ .$$

②总收益 $R(Q)$ 与边际收益 $R'(Q)$ 之间的关系为

$$R(Q)=\int_0^Q R'(t)\mathrm{d}t\ .$$

例 12.4　已知某产品的边际成本为 $4+\frac{x}{4}$（万元 / 单位），固定成本为 1 万元，产品对价格的需求弹性为 $\frac{p}{8-p}$，产品最大需求量为 8，其中 x 表示产量，p 表示价格，求使产品取最大利润时的产量和价格．

解　由 $C'(x)=4+\frac{x}{4}$，$C(0)=1$，可得

$$C(x)=\int_0^x C'(t)\mathrm{d}t+C(0)=4x+\frac{x^2}{8}+1\ .$$

又 $\eta_0=\frac{-p\mathrm{d}x}{x\mathrm{d}p}=\frac{p}{8-p}$（注意：由经济意义知 $\frac{p}{8-p}>0$）.

$\frac{\mathrm{d}x}{x}=\frac{\mathrm{d}p}{p-8}$，可得 $\ln|x|=\ln|p-8|+\ln c$.

由 $x(0)=8$ 可得 $c=1$. 所以 $x=8-p$，$R(x)=8x-x^2$. 故

$$L(x)=R(x)-C(x)=(8x-x^2)-\left(4x+\frac{x^2}{8}+1\right)$$

$$=-\frac{9}{8}x^2+4x-1 .$$

令 $L'(x)=4-\frac{9}{4}x=0$，可得 $x_0=\frac{16}{9}$.

因为 $L''(x)=-\frac{9}{4}<0$，所以 $x_0=\frac{16}{9}$ 为最大值点，这时 $p=8-x_0=\frac{56}{9}$. 故当产量为 $\frac{16}{9}$ 个单位，价格为 $\frac{56}{9}$ 万元时，利润最大 .

基础习题精练

习题

12.1 （仅数学一、数学二）由曲线 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ 及直线 $x=a$，$x=b(a<b)$ 所围成的平面板铅直地没入容重为 $r(r=\rho g$，表示单位体积液体的重力）的液体中，x 轴铅直向下，液面与 y 轴重合，如图 12-6 所示，平面板所受液压力为（　　）.

(A) $\int_a^b x[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$

(B) $\int_a^b rx[f_1(x)-f_2(x)]\mathrm{d}x$

(C) $\int_a^b r[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$

(D) $\int_a^b rx[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x$

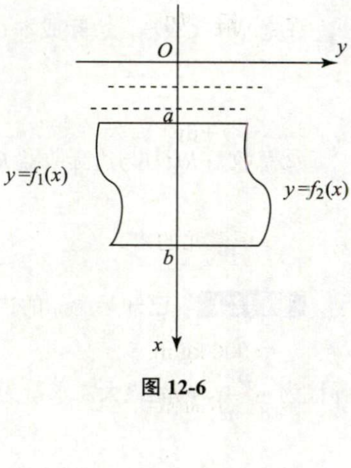


图 12-6

12.2 （仅数学三）当某商品销售量为 a 时，边际收入为 $R'(a)=200-\frac{a}{50}$，则销售量为 2 000 时的平均单位收入为______.

12.3　(仅数学一、数学二) 有一半径为 4 m 的半球形水池蓄满了水，现在要将水全部抽到距水池原水面 6 m 高的水箱中，求需做多少功 .(水的密度 ρ=1 000 kg/m^3，重力加速度 g =9.8 m/s^2，π =3.14)

12.4　(仅数学三) 设某商品的最大需求量为 1 200 件，该商品的需求函数 $Q=Q(p)$，需求弹性 $\eta=\dfrac{p}{120-p}\ (\eta>0)$，$p$ 为单价 (单位：万元).

(1) 求需求函数的表达式；

(2) 求 p =100 万元时的边际收益，并说明其经济意义 .

解答

12.1　(D)　**解**　由图 12-7 可知，在 $[x,\ x+\mathrm{d}x]$ 上液体对阴影部分的压力微元为

$$rx[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x\ .$$

因此平面板所受液压力为

$$F=\int_a^b rx[f_2(x)-f_1(x)]\mathrm{d}x\ .$$

故选 (D).

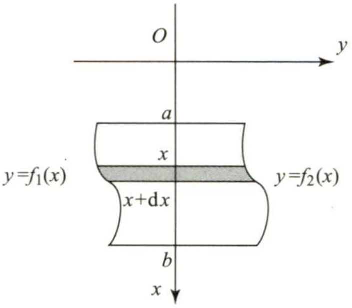


图 12-7

12.2　180　**解**　由题意可得，

$$\overline{R'}=\frac{1}{2\,000}\int_0^{2\,000}\left(200-\frac{a}{50}\right)\mathrm{d}a=\frac{1}{2\,000}\left(200a-\frac{a^2}{100}\right)\Bigg|_0^{2\,000}=180\ .$$

12.3　**解**　如图 12-8 所示，建立坐标系 . 在 y 处的水面面积为

$$\pi(4^2-y^2)=\pi(16-y^2),$$

在区间 $[y,\ y+\mathrm{d}y]$ 上的体积微元为

$$\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

提升此体积微元的水所需要的力的微元为

$$\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

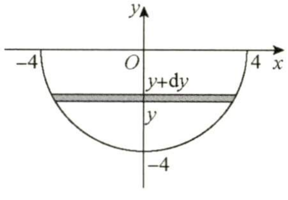


图 12-8

其中 ρ =1 000 kg/m^3，g =9.8 m/s^2，π =3.14 . 提升到距原水面 6 m 高处等于提升距离为 $(6-y)$m，从而提升此微元的水需做功的微元为

$$(6-y)\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y,$$

所以将水全部提升至原水面上方 6 m 处需做功为

$$W=\int_{-4}^0(6-y)\rho g\pi(16-y^2)\mathrm{d}y=320\pi\rho g\approx 9\,847(\mathrm{kJ})\ .$$

12.4 解 (1) 由题设

$$-\frac{p}{Q}Q'=\frac{p}{120-p},$$

所以$\int\frac{\mathrm{d}Q}{Q}=-\int\frac{1}{120-p}\mathrm{d}p$，可得$\ln Q=\ln(120-p)+\ln C$，即$Q=C(120-p)$．

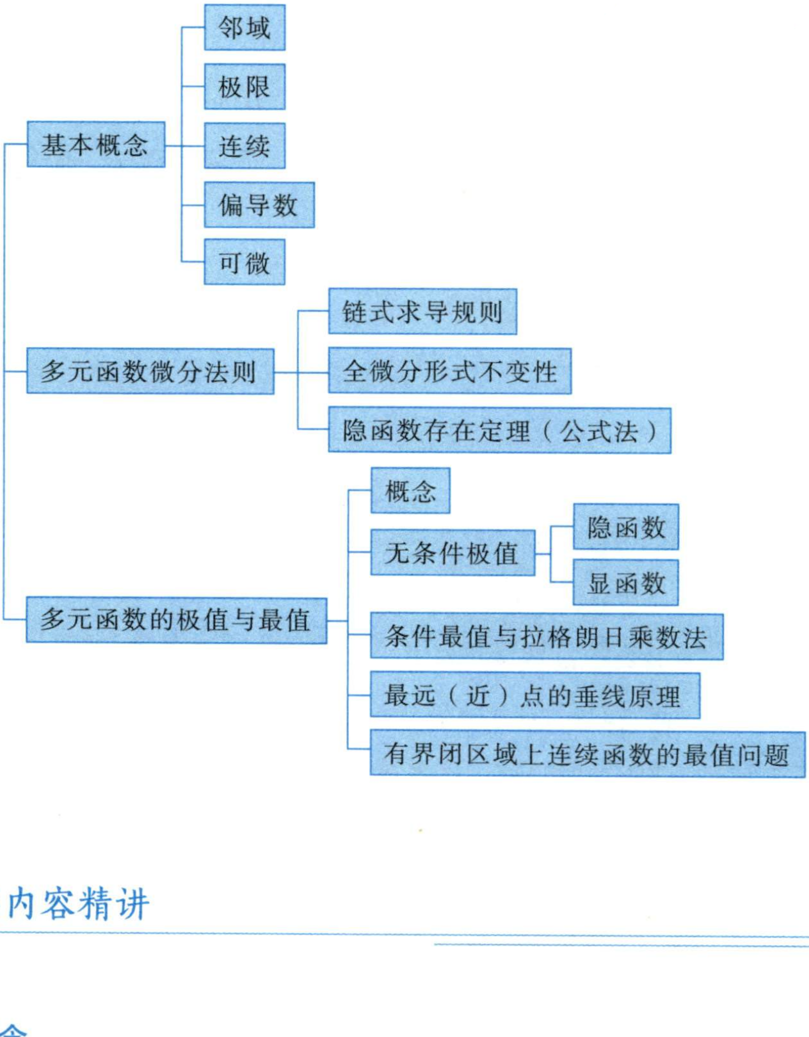
又最大需求量为 1 200 件，故$C=10$，所以需求函数$Q=1\,200-10p$．

(2) 由 (1) 知，收益函数$R=120Q-\frac{1}{10}Q^2$，边际收益$R'(Q)=120-\frac{1}{5}Q$．

当$p=100$时，$Q=200$，故当$p=100$万元时的边际收益$R'(200)=80$．其经济意义：当销售量为 200 时，每增加一个单位的销售量，商品所得收益增加 80 万元．

第13讲 多元函数微分学

基础知识结构



基础内容精讲

一、基本概念

1. 邻域

δ邻域 设 $P_0(x_0, y_0)$ 是 xOy 平面上的一个点，δ是某一正数. 与点 $P_0(x_0, y_0)$ 的距离小于 δ 的点

$P(x, y)$的全体，称为**点P_0的δ邻域**，记为$U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta)=\{P\,|\,|PP_0|<\delta\} \text{ 或 } U(P_0, \delta)=\left\{(x, y)\,\middle|\,\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$

去心δ邻域 点P_0的去心δ邻域，记作$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)$，即$\overset{\circ}{U}(P_0, \delta)=\{P\,|\,0<|PP_0|<\delta\}$.

特别指出，如果不需要强调邻域的半径δ，则用$U(P_0)$表示点P_0的某个邻域，点P_0的去心邻域记作$\overset{\circ}{U}(P_0)$.

δ邻域的几何意义 $U(P_0, \delta)$表示xOy平面上以点$P_0(x_0, y_0)$为中心，$\delta>0$为半径的圆内部的点$P(x, y)$的全体.

2. 极限

设函数$f(x, y)$在区域D上有定义，$P_0(x_0, y_0)\in D$或为区域D边界上的一点．如果对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在$\delta>0$，当点$P(x, y)\in D$，且满足$0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$时，恒有

$$|f(x, y)-A|<\varepsilon,$$

则称常数A为$(x, y)\to(x_0, y_0)$时$f(x, y)$的极限，记作

$$\lim_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A \text{ 或 } \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x, y)=A,$$

也常记作
$$\lim_{P\to P_0} f(P)=A.$$

【注】(1) 一元极限中$x\to x_0$有且仅有两种方式（$x\to x_0^-$和$x\to x_0^+$），二重极限中$(x, y)\to(x_0, y_0)$一般有无穷多种方式.

(2) 若有两条不同路径使极限$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$的值不相等或某一路径使极限$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$的值不存在，都说明$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)$不存在.

(3) 除洛必达法则和单调有界准则外，可照搬一元函数求极限的方法来求二重极限，二重极限保持了一元极限的各种性质，如唯一性、局部有界性、局部保号性、运算规则及脱帽法：$\lim\limits_{(x, y)\to(x_0, y_0)} f(x, y)=A \Leftrightarrow f(x, y)=A+\alpha$，其中当$(x, y)\to(x_0, y_0)$时，$\alpha$是无穷小量.

例 13.1 设$I_1=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$I_2=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x|y|}{x^2+y^2}$，则（　　）.

(A) I_1存在，I_2不存在　　(B) I_1存在，I_2存在

(C) I_1不存在，I_2存在　　(D) I_1不存在，I_2不存在

解 应选(A).

$$0 \leqslant I_1 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0,$$

由夹逼准则，得 $I_1 = 0$，故 I_1 存在．

取路径 $y = x$，则

$$I_2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = x}} \frac{x|y|}{x^2+y^2} = \lim_{x \to 0} \frac{x|x|}{2x^2},$$

又 $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x|x|}{2x^2} = \frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{x|x|}{2x^2} = -\frac{1}{2}$，极限不存在，故 I_2 不存在．

3. 连续

如果 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则称函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续，如果 $f(x, y)$ 在区域 D 上每一点处都连续，则称 $f(x, y)$ 在区域 D 上连续．

【注】 如果多元函数不连续，《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》未要求讨论间断点类型．

例 13.2 设

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{e^{xy}-1}, & xy \neq 0, \\ a, & xy = 0 \end{cases}$$

为连续函数，则 $a =$______．

解 应填 $-\frac{1}{3}$．

因为 $f(x, y)$ 为连续函数，所以

$$a = f(0, 0) = \lim_{(x, y) \to (0, 0)} f(x, y) = \lim_{xy \to 0} \frac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{e^{xy}-1} = \lim_{xy \to 0} \frac{-\frac{1}{3}xy}{xy} = -\frac{1}{3}.$$

4. 偏导数

(1) 定义．

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的**偏导数**，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \quad \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}}, \quad \left.z'_x\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} \text{或} f'_x(x_0, y_0),$$

即
$$f'_x(x_0, y_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,\ y_0)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta x}.$$

类似地，函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)处对y的偏导数定义为
$$f'_y(x_0, y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,\ y_0+\Delta y)-f(x_0,\ y_0)}{\Delta y}.$$

(2) 如果$z=f(x, y)$在区域D上的每一点(x, y)处都有偏导数，一般来说，它们仍是x, y的函数，则称为$f(x, y)$的偏导函数，简称偏导数，记作$\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $f'_x(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $f'_y(x, y)$.

(3) 几何意义.

设有二元函数$z=f(x, y)$，且$z_0=f(x_0, y_0)$，则$f'_x(x_0, y_0)$在几何上表示曲线$\begin{cases}z=f(x, y),\\ y=y_0\end{cases}$在点$(x_0, y_0, z_0)$处的切线对$x$轴的斜率. 同理，$f'_y(x_0, y_0)$在几何上表示曲线$\begin{cases}z=f(x, y),\\ x=x_0\end{cases}$在点$(x_0, y_0, z_0)$处的切线对$y$轴的斜率.

(4) 高阶偏导数.

如果二元函数$z=f(x, y)$的偏导数$f'_x(x, y)$和$f'_y(x, y)$仍然具有偏导数，则它们的偏导数称为$z=f(x, y)$的二阶偏导数，记作
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xx}(x, y)=z''_{xx},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=f''_{xy}(x, y)=z''_{xy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yy}(x, y)=z''_{yy},$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=f''_{yx}(x, y)=z''_{yx},$$
其中称$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$为二阶混合偏导数. 类似地可以定义$n(n\geqslant 3)$阶偏导数.

(5) 如果函数$z=f(x, y)$的两个二阶混合偏导数$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$及$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$都在区域$D$内连续，则在区域$D$内$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$，即二阶混合偏导数在连续的条件下与求导的次序无关.

例 13.3 已知函数$f(x, y)=\ln\left(y+|x\sin y|\right)$，则（　　）.

(A) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\,1)}$不存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\,1)}$存在　　(B) $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,\,1)}$存在，$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,\,1)}$不存在

(C) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均存在　　(D) $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 均不存在

解　应选 (A).

因为$f(x, y)=\ln\left(y+|x\sin y|\right)$，所以

$$f(0, 1)=\ln(1+0)=0,\ f(x, 1)=\ln\left(1+|x\sin 1|\right),\ f(0, y)=\ln(y+0)=\ln y,$$

因此
$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x, 1)-f(0, 1)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+|x\sin 1|)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{|x\sin 1|}{x},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}=\lim_{y\to 1}\frac{f(0, y)-f(0, 1)}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{\ln y}{y-1}=\lim_{y\to 1}\frac{1}{y}=1,$$

所以$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 不存在，$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,1)}$ 存在.

例 13.4　设函数$f(t)$连续，令$F(x, y)=\int_0^{x-y}(x-y-t)f(t)\mathrm{d}t$，则（　　）.

(A) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　(B) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$　　(D) $\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=-\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$

解　应选 (C).

由题知，$F(x, y)=x\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-y\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t-\int_0^{x-y}tf(t)\mathrm{d}t$，则

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+xf(x-y)-yf(x-y)-(x-y)f(x-y)=\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}=f(x-y),$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}=-xf(x-y)-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t+yf(x-y)+(x-y)f(x-y)=-\int_0^{x-y}f(t)\mathrm{d}t,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}=f(x-y),$$

所以$\dfrac{\partial F}{\partial x}=-\dfrac{\partial F}{\partial y}$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

例 13.5　设函数$f(x, y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t$，则$f_x'(1, +\infty)$ ＝______.

解　应填$-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$.

当$x>0$时，

$$f(x,\ y)=\int_0^{xy}\mathrm{e}^{-xt^2}\mathrm{d}t \xlongequal[u=\sqrt{x}t]{令\frac{u}{\sqrt{x}}=t} \frac{1}{\sqrt{x}}\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u,$$

于是$f(x,\ +\infty)=\lim\limits_{y\to+\infty}f(x,\ y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}$，故

$$f_x'(1,\ +\infty)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)'\Bigg|_{x=1}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\Bigg|_{x=1}=-\frac{\sqrt{\pi}}{4}.$$

【注】此题先计算$f(x,\ +\infty)$，再计算$f_x'(1,\ +\infty)$是简便的．

若先计算$f_x'(x,\ y)$，再代入$(1,\ +\infty)$，过程如下：

$$f_x'(x,\ y)=-\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\cdot\int_0^{x^{\frac{3}{2}}y}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u+\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{-x^3y^2}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{x}y,$$

于是$f_x'(1,\ +\infty)=-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u^2}\mathrm{d}u=-\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}$．略复杂．

例 13.6 设函数$f(x,\ y)$可微，$f(0,\ 0)=0$，$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,\ y)$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cos y$，求$f(x,\ y)$．

解 由$\dfrac{\partial f}{\partial y}=\mathrm{e}^{-x}\cos y$得$f(x,\ y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y+\varphi(x)$，于是$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-\mathrm{e}^{-x}\sin y+\varphi'(x)$．

又$\dfrac{\partial f}{\partial x}=-f(x,\ y)$，故

$$-\mathrm{e}^{-x}\sin y+\varphi'(x)=-\mathrm{e}^{-x}\sin y-\varphi(x),$$

于是有$\varphi'(x)+\varphi(x)=0$，解得$\varphi(x)=C\mathrm{e}^{-x}$，即$f(x,\ y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y+C\mathrm{e}^{-x}$．

由$f(0,\ 0)=0$，得$C=0$，所以$f(x,\ y)=\mathrm{e}^{-x}\sin y$．

【注】本题进一步可求$f(x,\ x)$在$[0,\ +\infty)$的部分与x轴围成的图形绕x轴旋转一周所成的旋转体体积，步骤如下：

$$V=\int_0^{+\infty}\pi f^2(x,\ x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\pi\mathrm{e}^{-2x}\sin^2 x\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\pi\mathrm{e}^{-2x}\frac{1-\cos 2x}{2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}(1-\cos 2x)\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x-\frac{\pi}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\cos 2x\mathrm{d}x$$

$$\xlongequal{令u=2x}\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\cos u\mathrm{d}u,$$

其中

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \cos u \mathrm{d}u = \left.\frac{\begin{vmatrix} (\mathrm{e}^{-u})' & (\cos u)' \\ \mathrm{e}^{-u} & \cos u \end{vmatrix}}{(-1)^2 + 1^2}\right|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}(-\mathrm{e}^{-u}\cos u + \mathrm{e}^{-u}\sin u)\Big|_0^{+\infty}$$

$$= \frac{1}{2}[0-(-1)] = \frac{1}{2},$$

故

$$V = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

5. 可微

先看一个引例．如图 13-1 所示，设矩形的长和宽分别为x和y，则此矩形的面积为$S = xy$．

若x，y分别增长Δx，Δy，则该矩形面积的增量为

$$\Delta S = (x+\Delta x)(y+\Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x\Delta y.$$

上式右端由两部分组成：一部分是$y\Delta x + x\Delta y$，它是关于Δx，Δy的线性函数；另一部分是$\Delta x\Delta y$，因为

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\Delta x\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} \leqslant \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{2}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{2} = 0,$$

所以当$\Delta x \to 0$，$\Delta y \to 0$时，$\Delta x\Delta y$是比$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$高阶的无穷小量，即

$$\Delta S = y\Delta x + x\Delta y + o(\rho)(\rho \to 0).$$

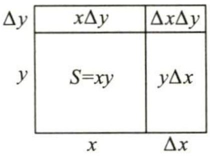


图 13-1

$y\Delta x + x\Delta y$是ΔS的主要部分，$o(\rho)$是ΔS与主要部分$y\Delta x + x\Delta y$之间的误差，称$y\Delta x + x\Delta y$为函数$S = xy$在点(x, y)处的全微分．

(1) 定义．

设函数$z = f(x, y)$在点(x, y)的某实心邻域内有定义，若$z = f(x, y)$在该点的全增量

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$$

可表示为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho),$$

其中A, B仅与点(x, y)有关，而与Δx, Δy无关；$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，且当$\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$时，$o(\rho)$为ρ的高阶无穷小，则称函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处可微分，并称$A\Delta x + B\Delta y$为函数$z = f(x, y)$在点(x, y)处的全微分，记为

$$\mathrm{d}z = A\Delta x + B\Delta y.$$

(2) 可微的必要条件.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则该函数在该点处的偏导数必存在，且

$$A=\frac{\partial z}{\partial x},\ B=\frac{\partial z}{\partial y}\ .$$

由此可得，若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处可微，则全微分可记为 $\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y$.

(3) 可微的充分条件.

若函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 处的偏导数存在且连续，则该函数在点 (x,y) 处可微.

【注】(1) 在区域 D 上，若 $\mathrm{d}[f(x,y)]=0$ 或 $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}=0$，则 $f(x,y)\equiv C$（常数），$(x,y)\in D$.

(2) 判别函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是否连续，步骤如下:

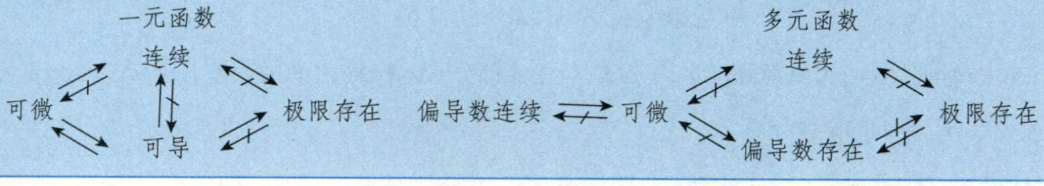
①用定义法求 $f'_x(x_0,y_0)$，$f'_y(x_0,y_0)$；

②用公式法求 $f'_x(x,y)$，$f'_y(x,y)$；

③计算 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_x(x,y)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_y(x,y)$.

看 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_x(x,y)=f'_x(x_0,y_0)$，$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f'_y(x,y)=f'_y(x_0,y_0)$ 是否成立.若成立，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处的偏导数是连续的.

(3) 一元函数和多元函数在极限存在、连续、可导、可微的相互关系上，有相同之处，更有相异之处，图示如下（记号“$\longrightarrow$”表示可推出，“$\not\longrightarrow$”表示不一定推出）:



(4) 可微的判别步骤.

判别函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处是否可微，步骤如下:

①写出全增量 $\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$；

②写出线性增量 $A\Delta x+B\Delta y$，其中 $A=f'_x(x_0,y_0)$，$B=f'_y(x_0,y_0)$；

③作极限 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$，若该极限等于0，则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微，否则，就不可微.

例13.7 已知 $(axy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1+by\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y$ 为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分，则 $(a,b)=$ (　　).

(A) $(2,\ 2)$　　(B) $(2,\ -2)$　　(C) $(-2,\ 2)$　　(D) $(-2,\ -2)$

解　应选 (B).

依题意，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=axy^3-y^2\cos x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=1+by\sin x+3x^2y^2,$$

则
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=3axy^2-2y\cos x,\ \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=by\cos x+6xy^2 .$$

显然 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$ 和 $\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$ 连续，于是 $\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$，从而 $a=2,\ b=-2$.

例 13.8　设 $z_1=|xy|,\ z_2=\begin{cases}\frac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,\ y)\neq(0,\ 0),\\ 0,\qquad\qquad (x,\ y)=(0,\ 0),\end{cases}$ 则（　　）.

(A) z_1 在点 $(0,\ 0)$ 处不可微，z_2 在点 $(0,\ 0)$ 处不可微

(B) z_1 在点 $(0,\ 0)$ 处不可微，z_2 在点 $(0,\ 0)$ 处可微

(C) z_1 在点 $(0,\ 0)$ 处可微，z_2 在点 $(0,\ 0)$ 处不可微

(D) z_1 在点 $(0,\ 0)$ 处可微，z_2 在点 $(0,\ 0)$ 处可微

解　应选 (C).

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(0,\ 0)}=\lim_{x\to 0}\frac{z_1(x,\ 0)-z_1(0,\ 0)}{x-0}=0 ,$$

$$\left.\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{(0,\ 0)}=\lim_{y\to 0}\frac{z_1(0,\ y)-z_1(0,\ 0)}{y-0}=0 ,$$

$$\frac{z_1(x,\ y)-z_1(0,\ 0)-\left.\frac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(0,\ 0)}\cdot x-\left.\frac{\partial z_1}{\partial y}\right|_{(0,\ 0)}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

由例 13.1 可知 z_1 在点 $(0,\ 0)$ 处可微 .

$$\left.\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(0,\ 0)}=\lim_{x\to 0}\frac{z_2(x,\ 0)-z_2(0,\ 0)}{x-0}=0 ,$$

$$\left.\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|_{(0,\ 0)}=\lim_{y\to 0}\frac{z_2(0,\ y)-z_2(0,\ 0)}{y-0}=0 ,$$

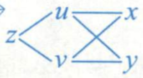
$$\frac{z_2(x,\ y)-z_2(0,\ 0)-\left.\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(0,\ 0)}\cdot x-\left.\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|_{(0,\ 0)}\cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x|y|}{x^2+y^2},$$

由例 13.1 可知 z_2 在点 $(0,\ 0)$ 处不可微 .

二、多元函数微分法则

1. 链式求导规则

复合结构图

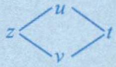


设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(x,y)$, $v=\psi(x,y)$，则 $z=f[\varphi(x,y),\psi(x,y)]$，且

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

【注】 (1) 设 $z=f(u,v)$, $u=\varphi(t)$, $v=\psi(t)$，则 $z=f[\varphi(t),\psi(t)]$，且 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$.

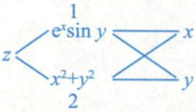
复合结构图



(2) 无论 z 对哪个变量求导，也无论 z 已经求了几阶导，求导后的新函数仍然具有与原函数完全相同的复合结构 .

例 13.9 设 $z=f\left(e^x\sin y,\ x^2+y^2\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，$f_1'(0,0)=1$，$f_2'(0,0)=-1$，则 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=($　　$)$.

复合结构图



(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) −1

解　应选 (B).

$$\frac{\partial z}{\partial x}=e^x\sin y f_1'+2xf_2',$$

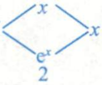
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^{2x}\sin y\cos y f_{11}''+2e^x\left(y\sin y+x\cos y\right)f_{12}''+4xyf_{22}''+e^x\cos y f_1' .$$

于是 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(0,0)}=f_1'(0,0)=1.$

例 13.10 设函数 $f(x,e^x)=x+e^x$，且 $f_x'(x,y)\big|_{y=e^x}=1+2e^x$，则 $f_y'(x,y)\big|_{y=e^x}=$______.

解　应填 −1.

复合结构图



$$\frac{\mathrm{d}[f(x,e^x)]}{\mathrm{d}x}=f_x'(x,y)\big|_{y=e^x}+f_y'(x,y)\big|_{y=e^x}\cdot e^x,$$

即

$$1+e^x=1+2e^x+f_y'(x,y)\big|_{y=e^x}\cdot e^x,$$

故

$$f_y'(x,y)\big|_{y=e^x}=-1 .$$

【**注**】事实上，$f_y'(x,\square)$是$f(x,\square)$对第二个位置求导，故有

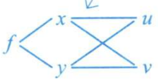
$$f_y'(x,y)\big|_{y=e^x}=f_y'(x,e^x),$$

同理

$$f_x'(x,y)\big|_{y=e^x}=f_x'(x,e^x).$$

例 13.11 设对任意的x,y有$\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4$，用变量代换$x=uv$，$y=\dfrac{u^2-v^2}{2}$将函数$f(x,y)$变换成函数$g(u,v)$，且满足关系式$a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$，求$a$，$b$．

复合结构图



解 $g(u,v)=f\left(uv,\dfrac{u^2-v^2}{2}\right)$，于是

$$\frac{\partial g}{\partial u}=\frac{\partial f}{\partial x}v+\frac{\partial f}{\partial y}u,\ \frac{\partial g}{\partial v}=\frac{\partial f}{\partial x}u-\frac{\partial f}{\partial y}v,$$

代入到$a\left(\dfrac{\partial g}{\partial u}\right)^2-b\left(\dfrac{\partial g}{\partial v}\right)^2=u^2+v^2$中，整理得

$$(av^2-bu^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+2(a+b)uv\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}+(au^2-bv^2)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2=u^2+v^2,\tag{*}$$

比较等号左右两端，必须有$2(a+b)=0$，此时再将$\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2=4-\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2$代入(*)式，并整理得

$$(a+b)(v^2-u^2)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+4(au^2-bv^2)=u^2+v^2,$$

所以有$a+b=0$，且$4a=1$，$-4b=1$，于是$a=\dfrac{1}{4}$，$b=-\dfrac{1}{4}$．

2. 全微分形式不变性

设$z=f(u,v)$，$u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，如果$f(u,v)$，$u(x,y)$，$v(x,y)$分别有连续偏导数，则复合函数$z=f(u,v)$在(x,y)处的全微分仍可表示为

$$dz=\frac{\partial z}{\partial u}du+\frac{\partial z}{\partial v}dv,$$

即无论u，v是自变量还是中间变量，上式总成立．

例 13.12 若函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$dz|_{(0,0)}=$______．

解 应填$-\dfrac{1}{3}dx-\dfrac{2}{3}dy$．

先求$z(0,0)$．在原方程中令$x=0$，$y=0$得$e^{3z(0,0)}=1$，故$z(0,0)=0$．

利用全微分形式不变性，将原方程两端求全微分得

$$e^{x+2y+3z}\mathrm{d}(x+2y+3z)+\mathrm{d}(xyz)=0,$$

即

$$e^{x+2y+3z}(\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z)+yz\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z=0,$$

令$x=0$，$y=0$，$z=0$可得$\mathrm{d}x+2\mathrm{d}y+3\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=0$，则

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y.$$

3. 隐函数存在定理（公式法）

隐函数存在定理 1 对于由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=f(x)$，当$F_y'(x,y)\neq 0$时，则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}.$$

【注】证明如下：

将$y=f(x)$代入$F(x,y)=0$，得$F[x,f(x)]=0$，在这个等式两边对x求导，得$F_x'(x,y)+F_y'(x,y)\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$，因$F_y'(x,y)\neq 0$，故$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x'(x,y)}{F_y'(x,y)}$.

隐函数存在定理 2 对于由方程$F(x,y,z)=0$确定的隐函数$z=f(x,y)$，当$F_z'(x,y,z)\neq 0$时，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

【注】证明如下：

将$z=f(x,y)$代入$F(x,y,z)=0$，得$F[x,y,f(x,y)]=0$，在这个等式两边分别对x和y求偏导数，得$F_x'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial x}=0$，$F_y'(x,y,z)+F_z'(x,y,z)\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=0$，因$F_z'(x,y,z)\neq 0$，故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)},\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'(x,y,z)}{F_z'(x,y,z)}.$$

例 13.13 设有三元方程$xy-z\ln y+e^{xz}=1$，根据隐函数存在定理，存在点$(0,1,1)$的一个邻域，在此邻域内该方程（ ）.

(A) 只能确定一个具有连续偏导数的隐函数$z=z(x,y)$

(B) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$y=y(x,z)$和$z=z(x,y)$

(C) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$z=z(x,y)$

(D) 可确定两个具有连续偏导数的隐函数$x=x(y,z)$和$y=y(x,z)$

解 应选 (D).

令
$$F(x, y, z)=xy-z\ln y+\mathrm{e}^{xz}-1,$$

则 $F_x'(x, y, z)=y+\mathrm{e}^{xz}z$, $F_y'(x, y, z)=x-\dfrac{z}{y}$, $F_z'(x, y, z)=-\ln y+\mathrm{e}^{xz}x$. 于是,

$$F_x'(0, 1, 1)=2\neq 0, F_y'(0, 1, 1)=-1\neq 0, F_z'(0, 1, 1)=0 .$$

因此，在点 $(0, 1, 1)$ 的某一个邻域 U_1 内，存在一个连续且具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y, z)$；在点 $(0, 1, 1)$ 的某一个邻域 U_2 内，也存在一个连续且具有连续偏导数的隐函数 $y=y(x, z)$. 于是，在邻域 $U=U_1\cap U_2$ 内，就存在两个连续且具有连续偏导数的隐函数 $x=x(y, z)$ 和 $y=y(x, z)$，故应选 (D).

例 13.14 设 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有连续的偏导数，且 $F(x_0, y_0)=0$，则 $F_y'(x_0, y_0)\neq 0$ 是 $F(x, y)=0$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内能确定一个连续函数 $y=y(x)$，且满足 $y_0=y(x_0)$，并有连续导数的（　　）.

(A) 必要非充分条件　　(B) 充分非必要条件

(C) 充要条件　　(D) 既不充分又不必要条件

解 应选 (B).

由隐函数存在定理 1 知，在题设条件下，$F_y'(x_0, y_0)\neq 0$ 是方程 $F(x, y)=0$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内能确定一个连续函数 $y=y(x)$，且满足 $y_0=y(x_0)$，并有连续导数的充分条件，但不是必要条件 . 如 $F(x, y)=x^3-xy$, $F(0, 0)=0$, $F_y'(0, 0)=-x\big|_{x=0}=0$，但 $F(x, y)=0$ 可确定函数 $y=x^2$（满足 $y(0)=0$).

例 13.15 若函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz=1$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=$______.

解 应填 $-\dfrac{1}{3}\mathrm{d}x-\dfrac{2}{3}\mathrm{d}y$.

在例 13.12 中，已利用全微分形式不变性做过本题，在此利用公式法再做一遍 .

先求 $z(0, 0)$. 在原方程中令 $x=0$, $y=0$ 得 $\mathrm{e}^{3z(0,0)}=1$，故 $z(0, 0)=0$.

令 $F(x, y, z)=\mathrm{e}^{x+2y+3z}+xyz-1$，则由公式法，知

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x'}{F_z'}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 1+yz}{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 3+xy},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y'}{F_z'}=-\frac{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 2+xz}{\mathrm{e}^{x+2y+3z}\cdot 3+xy},$$

当 $x=0$, $y=0$, $z=0$ 时，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\dfrac{2}{3}$，则

$$\mathrm{d}z\big|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}\mathrm{d}x-\frac{2}{3}\mathrm{d}y .$$

例 13.16 设函数 $z=z(x, y)$ 由方程 $F(x+zy^{-1}, y+zx^{-1})=0$ 所确定，其中 F 具有连续偏导数，且

$xF_1'+yF_2'\neq 0$，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=$________.

解 应填$z-xy$.

令$G(x,y,z)=F(x+zy^{-1},y+zx^{-1})$，则由公式法得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x'}{G_z'}=-\frac{F_1'-\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y'}{G_z'}=-\frac{-\frac{z}{y^2}F_1'+F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'},$$

所以

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\left(-xF_1'+\frac{z}{x}F_2'\right)+\left(\frac{z}{y}F_1'-yF_2'\right)}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}$$

$$=\frac{(-x^2y+xz)F_1'+(yz-xy^2)F_2'}{xF_1'+yF_2'}$$

$$=\frac{xF_1'(-xy+z)+yF_2'(z-xy)}{xF_1'+yF_2'}$$

$$=z-xy.$$

【注】此题还有以下两种解法，一是复合函数求导法，二是利用全微分形式不变性.

复合函数求导法 在等式$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$两边对$x$求偏导，并注意到$x$，$y$是自变量，$z$是因变量，有

$$F_1'\left(1+\frac{1}{y}\frac{\partial z}{\partial x}\right)+F_2'\left(\frac{x\frac{\partial z}{\partial x}-z}{x^2}\right)=0,$$

解得$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}$. 同理可得$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}$. 余下步骤同上.

利用全微分形式不变性 对方程$F\left(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x}\right)=0$两边求全微分，利用全微分的形式不变性，有

$$F_1'\mathrm{d}\left(x+\frac{z}{y}\right)+F_2'\mathrm{d}\left(y+\frac{z}{x}\right)=F_1'\left(\mathrm{d}x+\frac{y\mathrm{d}z-z\mathrm{d}y}{y^2}\right)+F_2'\left(\mathrm{d}y+\frac{x\mathrm{d}z-z\mathrm{d}x}{x^2}\right)=0,$$

解得

$$\mathrm{d}z=\frac{-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}\mathrm{d}x+\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}\mathrm{d}y,$$

即有
$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-F_1'+\frac{z}{x^2}F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\frac{z}{y^2}F_1'-F_2'}{\frac{1}{y}F_1'+\frac{1}{x}F_2'}.$$

余下步骤同上.

三、多元函数的极值与最值

1. 概念

若存在点(x_0, y_0)的某个邻域，使得在该邻域内任意一点(x, y)，均有

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)(\text{或}f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0))$$

成立，则称点(x_0, y_0)为$f(x, y)$的**极大值点**(或**极小值点**)，$f(x_0, y_0)$为$f(x, y)$的**极大值**(或**极小值**).

设点(x_0, y_0)为$f(x, y)$定义域内一点，若对于$f(x, y)$的定义域内任意一点(x, y)，均有

$$f(x, y)\leqslant f(x_0, y_0)(\text{或}f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0))$$

成立，则称$f(x_0, y_0)$为$f(x, y)$的**最大值**(或**最小值**).

例 13.17　二元函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处取得极值是一元函数$f(x, y_0)$和$f(x_0, y)$分别在x_0和y_0处取得极值的(　　).

(A) 充分条件　　　　(B) 必要条件

(C) 充要条件　　　　(D) 既非充分也非必要条件

解　应选(A).

不妨设二元函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处取得极小值，则在点(x_0, y_0)的某邻域内处处有$f(x, y)\geqslant f(x_0, y_0)$，显然在此邻域内固定$y=y_0$时有$f(x, y_0)\geqslant f(x_0, y_0)$，这表明一元函数$f(x, y_0)$在点$x_0$处取得极小值，同理，固定$x=x_0$时有$f(x_0, y)\geqslant f(x_0, y_0)$，这表明一元函数$f(x_0, y)$在点$y_0$处取得极小值.

反之，若一元函数$f(x, y_0)$和$f(x_0, y)$分别在x_0和y_0处取得极值，此时未必有二元函数$f(x, y)$在点(x_0, y_0)处取得极值，比如二元函数$f(x, y)=x^4+y^4-(x+y)^2$在点$(0, 0)$处不取极值(取$y=-x$路径有$f(x, -x)=2x^4>0$，取$y=x$路径有$f(x, x)=2x^4-4x^2<0$，而$f(0, 0)=0$，于是$f(x, y)$在点$(0, 0)$处不取极值)，但是一元函数$f(x, 0)=x^4-x^2<0=f(0, 0)$，即一元函数$f(x, 0)$在$x=0$处取极大值，$f(0, y)=y^4-y^2<0=f(0, 0)$，即一元函数$f(0, y)$在$y=0$处取极大值.

例 13.18　设函数$f(x, y)$具有二阶连续偏导数，且在点(x_0, y_0)处取极大值，记$a=\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)}$，

$b=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{(x_0,\,y_0)}$，则（　　）.

(A) $a>0,\ b>0$　　(B) $a\geqslant 0,\ b\geqslant 0$

(C) $a<0,\ b<0$　　(D) $a\leqslant 0,\ b\leqslant 0$

解　应选 (D).

此题用举特例的方法比较简便 .

①取 $f(x,\,y)=-(x^2+y^2)$，则点 $(0,\,0)$ 为极大值点 .

此时，

$$a=f''_{xx}(x,y)\big|_{(0,\,0)}=-2<0,$$

$$b=f''_{yy}(x,\,y)\big|_{(0,\,0)}=-2<0,$$

排除 (A)，(B).

②再取 $f(x,\,y)=-(x^4+y^4)$，则点 $(0,\,0)$ 为极大值点 .

此时，

$$a=f''_{xx}(x,\,y)\big|_{(0,\,0)}=-12x^2\big|_{(0,\,0)}=0,$$

$$b=f''_{yy}(x,\,y)\big|_{(0,\,0)}=-12y^2\big|_{(0,\,0)}=0,$$

排除 (C)，选 (D).

事实上，$a=\left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0,\,y_0)}=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2[f(x,\,y_0)]}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$，记 $g(x)=f(x,\,y_0)$，按题设，即 $g(x)$ 在 $x=x_0$ 处取极大值，故由例 5.2 知，有 $g'(x_0)=0,\ g''(x_0)\leqslant 0$，即 $g''(x_0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}^2[f(x,\,y_0)]}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}=a\leqslant 0$，同理，$b\leqslant 0$.

2. 无条件极值

(1) 二元函数取极值的必要条件（类比一元函数）.

设 $z=f(x,\,y)$ 在点 $(x_0,\,y_0)$ 处 $\begin{cases}\text{一阶偏导数存在,}\\ \text{取极值,}\end{cases}$ 则 $f'_x(x_0,\,y_0)=0,\ f'_y(x_0,\,y_0)=0$.

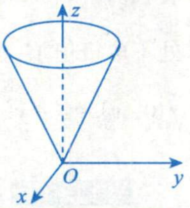
【注】(1) 该必要条件同样适用于三元及三元以上函数 .

(2) 偏导数不存在的点也可能是极值点 .

如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 点处取极小值，但其 $z'_x(0,0)$，$z'_y(0,0)$ 均不存在.

(2) 二元函数取极值的充分条件 .

$$\text{记}\begin{cases}f''_{xx}(x_0,\,y_0)=A,\\ f''_{xy}(x_0,\,y_0)=B,\\ f''_{yy}(x_0,\,y_0)=C,\end{cases}\text{则 } \varDelta=AC-B^2\begin{cases}>0\Rightarrow\text{极值}\begin{cases}A<0\Rightarrow\text{极大值,}\\ A>0\Rightarrow\text{极小值,}\end{cases}\\ <0\Rightarrow\text{非极值,}\\ =0\Rightarrow\text{方法失效，另谋他法 .}\end{cases}$$



【注】该充分条件不适用于三元及三元以上函数 .

综合 (1)，(2)，可用必要条件求出所有可疑点，再用充分条件判别这些可疑点是否是极值点 .

例 13.19 已知函数 $z=z(x,\ y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定，求 $z(x,\ y)$ 的极值 .

解 在 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 两端分别对 x 和 y 求偏导数，得

$$\begin{cases} 2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0, \\ 2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0, \end{cases} \tag{*}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=0$，得

$$\begin{cases} x=-\dfrac{1}{z}, \\ y=-\dfrac{1}{z}. \end{cases}$$

将 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{z}, \\ y=-\dfrac{1}{z} \end{cases}$ 代入方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$，得 $\ln z-\dfrac{2}{z}+2=0$，可知 $z=1$，从而 $\begin{cases} x=-1, \\ y=-1. \end{cases}$

对方程组 (*) 中两式的两端分别再对 x，y 求偏导数，得

$$\begin{cases} 2z+4x\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0, \\ 2x\dfrac{\partial z}{\partial y}+2y\dfrac{\partial z}{\partial x}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{1}{z^2}\dfrac{\partial z}{\partial x}\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0, \\ 2z+4y\dfrac{\partial z}{\partial y}+(x^2+y^2)\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{z^2}\left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0, \end{cases}$$

从而得 $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{(-1,\,-1)}=-\dfrac{2}{3}$，$B=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{(-1,\,-1)}=0$，$C=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{(-1,\,-1)}=-\dfrac{2}{3}$.

由于 $AC-B^2>0$，$A<0$，因此 $z(-1,\ -1)=1$ 是 $z(x,\ y)$ 的极大值 .

3. 条件最值与拉格朗日乘数法

求目标函数 $u=f(x,\ y,\ z)$ 在约束条件 $\begin{cases} \varphi(x,\ y,\ z)=0, \\ \psi(x,\ y,\ z)=0 \end{cases}$ 下的最值，则

①构造辅助函数 $F(x,\ y,\ z,\ \lambda,\ \mu)=f(x,\ y,\ z)+\lambda\varphi(x,\ y,\ z)+\mu\psi(x,\ y,\ z)$；

②令

$$\begin{cases} F'_x=f'_x+\lambda\varphi'_x+\mu\psi'_x=0, \\ F'_y=f'_y+\lambda\varphi'_y+\mu\psi'_y=0, \\ F'_z=f'_z+\lambda\varphi'_z+\mu\psi'_z=0, \\ F'_\lambda=\varphi(x,\ y,\ z)=0, \\ F'_\mu=\psi(x,\ y,\ z)=0; \end{cases}$$

5分

③解上述方程组得备选点P_i，$i=1, 2, 3, \cdots, n$，并求$f(P_i)$，取其最大值为$u_{\max}$，最小值为$u_{\min}$；
④根据实际问题，必存在最值，所得即为所求.

7分

> **【注】**若从约束条件$\begin{cases}\varphi(x, y, z)=0, \\ \psi(x, y, z)=0\end{cases}$中易解出$z=z(x, y)$，则将其代入$f(x, y, z)$，得$f[x, y, z(x, y)]$，即转化为无条件最值问题.

例 13.20 设a，b满足$\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a\leqslant 0, b\geqslant 0)$，求曲线$y=x^2+ax$与直线$y=bx$所围区域面积的最大值和最小值.

解 $\int_a^b |x|\,\mathrm{d}x=\int_a^0(-x)\mathrm{d}x+\int_0^b x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(a^2+b^2)=\frac{1}{2}$，故

$$a^2+b^2=1(a\leqslant 0, b\geqslant 0),$$

曲线$y=x^2+ax$与直线$y=bx$的交点的横坐标分别为

$$x_1=0, x_2=b-a,$$

于是面积

$$S=\int_0^{b-a}[bx-(x^2+ax)]\mathrm{d}x=\frac{1}{6}(b-a)^3 .$$

注意到$\frac{1}{6}(b-a)^3$的最值点与$(b-a)$的最值点是一样的，故转化成求$S^*=b-a$在条件$a^2+b^2=1(a\leqslant 0, b\geqslant 0)$下的最值点，利用拉格朗日乘数法，令$F(a, b, \lambda)=b-a+\lambda(a^2+b^2-1)$，由

$$F'_a=-1+2\lambda a=0, F'_b=1+2\lambda b=0, F'_\lambda=a^2+b^2-1=0,$$

解得驻点$(a, b)=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，此时$S=\frac{\sqrt{2}}{3}$. 又当$a=0$，$b=1$时，$S=\frac{1}{6}$；当$a=-1$，$b=0$时，$S=\frac{1}{6}$.

比较以上函数值，知所求区域面积的最大值是$\frac{\sqrt{2}}{3}$，最小值是$\frac{1}{6}$.

> **【注】**本题的约束条件$a^2+b^2=1(a\leqslant 0, b\geqslant 0)$不是封闭的整个圆，而只是第二象限的部分，是不封闭曲线，对不封闭曲线在用拉格朗日乘数法时要注意比较端点处的函数值.

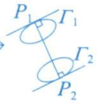
4. 最远（近）点的垂线原理

此原理可直接使用.
用好此原理，可能在多元最值问题上节约大量时间，提高效率.

如果Γ是光滑闭曲线，点Q是Γ外的一个点，点P_1，P_2分别是Γ上与点Q的最远点，最近点，则直线P_1Q，P_2Q分别在点P_1处，P_2处与Γ垂直，即P_1Q，P_2Q分别与点P_1，P_2的切线垂直.

若光滑闭曲线Γ_1，Γ_2不相交，点P_1，P_2分别是它们之间的最远（近）点，则直线P_1P_2是Γ_1，Γ_2的公

垂线，即 P_1P_2 同时垂直于 Γ_1，Γ_2 在这两个点处的切线 .



例 13.21 求曲线 $x^2+4y^2=4$ 上到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离最近的点 .

解 方法一 设 $P(x, y)$ 为曲线 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则点 P 到直线 $2x+3y-6=0$ 的距离

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}} .$$

点 (x_0, y_0) 到直线 $Ax+By+C=0$ 的距离公式：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

因为求函数 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点，所以问题可抽象为如下数学模型：

求目标函数 $d^2=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2$ 在约束条件 $x^2+4y^2=4$ 下的最小值 .

作拉格朗日函数 $F(x, y, \lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2-4)$，令

$$\begin{cases} F'_x=\dfrac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0, & ① \\ F'_y=\dfrac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0, & ② \\ F'_\lambda=x^2+4y^2-4=0. & ③ \end{cases}$$

若 $\lambda=0$，则上述方程组转化为 $\begin{cases}2x+3y-6=0, \\ x^2+4y^2-4=0,\end{cases}$ 即求曲线与直线的交点 . 事实上，二者并不相交，此时方程组无解 .

若 $\lambda\neq 0$，由①，②式得 $\dfrac{\frac{4}{13}}{\frac{6}{13}}=\dfrac{-2x}{-8y}$，$x=\dfrac{8}{3}y$，代入③式，解得 $x_1=\dfrac{8}{5}$，$y_1=\dfrac{3}{5}$；$x_2=-\dfrac{8}{5}$，$y_2=-\dfrac{3}{5}$，

且

$$d\big|_{(x_1, y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}}, d\big|_{(x_2, y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}} .$$

根据问题的实际意义可知，最近距离一定存在，因此 $\left(\dfrac{8}{5}, \dfrac{3}{5}\right)$ 即为所求点 .

方法二 设 $P(x, y)$ 为所求点，因曲线 $x^2+4y^2=4$ 可写成参数方程 $\begin{cases}x=x, \\ y^2=1-\dfrac{1}{4}x^2,\end{cases}$ 故其在点 $P(x, y)$ 处的切向向量可表示为 $\boldsymbol{\tau}=\left(1, -\dfrac{x}{4y}\right)$.

又直线 $2x+3y-6=0$ 的法向向量 $\boldsymbol{n}=(2, 3)$，根据最远（近）点的垂线原理，有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{\tau}$，即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\tau}=0$，$2\cdot 1+3\cdot\left(-\dfrac{x}{4y}\right)=0$，即有 $x=\dfrac{8}{3}y$，代入 $x^2+4y^2=4$，得 $\begin{cases}x_1=\dfrac{8}{5}, \\ y_1=\dfrac{3}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=-\dfrac{8}{5}, \\ y_2=-\dfrac{3}{5}.\end{cases}$

又由点到直线的距离公式易知，$\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$即为所求点 .

5. 有界闭区域上连续函数的最值问题

(1) 理论依据——**最大值与最小值定理**：在有界闭区域D上的多元连续函数，在区域D上一定有最大值和最小值 .

(2) 求法 .

①根据$f_x'(x, y)$，$f_y'(x, y)$为 0 或不存在，求出区域D内部的所有可疑点；

②用拉格朗日乘数法或代入法求出区域D边界上的所有可疑点；

③比较以上所有可疑点的函数值大小，取其最小者为最小值，最大者为最大值 .

例 13.22 已知函数$z=f(x, y)$的全微分$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$，并且$f(1,1)=2$. 求$f(x, y)$在椭圆域$D=\left\{(x, y)\middle| x^2+\frac{y^2}{4}\leqslant 1\right\}$上的最大值和最小值 .

解 由$\mathrm{d}z=2x\mathrm{d}x-2y\mathrm{d}y$可知

$$z=f(x, y)=x^2-y^2+C,$$

再由$f(1,1)=2$，得$C=2$，故

$$z=f(x, y)=x^2-y^2+2 .$$

令$\frac{\partial f}{\partial x}=2x=0, \frac{\partial f}{\partial y}=-2y=0$，解得驻点$(0, 0)$. 在椭圆$x^2+\frac{y^2}{4}=1$上，$z=x^2-(4-4x^2)+2$，即

$$z=5x^2-2(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

其最大值为$z\big|_{x=\pm 1}=3$，最小值为$z\big|_{x=0}=-2$，再与$f(0, 0)=2$比较，可知$f(x, y)$在椭圆域D上的最大值为 3，最小值为 −2.

【注】在边界$x^2+\frac{y^2}{4}=1$上的最值也可以直接利用拉格朗日乘数法，令

$$F(x, y, \lambda)=x^2-y^2+2+\lambda\left(x^2+\frac{y^2}{4}-1\right) .$$

令$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}=2x+2\lambda x=0,\\ \frac{\partial F}{\partial y}=-2y+\frac{\lambda}{2}y=0,\\ \frac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+\frac{y^2}{4}-1=0,\end{cases}$解得$M_1(0, 2)$, $M_2(0, -2)$, $M_3(1, 0)$, $M_4(-1, 0)$. 此时

$$f(M_1)=f(M_2)=-2, f(M_3)=f(M_4)=3 ,$$

故在边界$x^2+\frac{y^2}{4}=1$上的最大值是 3，最小值是 −2.

基础习题精练

习题

13.1　设$f(0,0)=0$，当$(x,y)\neq(0,0)$时，$f(x,y)$取下列哪个函数可使$f(x,y)$在$(0,0)$点连续？（　　）

(A) $\dfrac{xy}{x^2+y^2}$　(B) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$　(C) $\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$　(D) $\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

13.2　设$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且对任意(x,y)都有$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}>0$，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，则（　　）.

(A) $f(0,0)>f(1,1)$　(B) $f(0,0)<f(1,1)$　(C) $f(0,1)>f(1,0)$　(D) $f(0,1)<f(1,0)$

13.3　函数$f(x,y)=\sqrt{|xy|}$在点$(0,0)$处（　　）.

(A) 偏导数不存在　(B) 偏导数存在，但不可微

(C) 可微，但偏导数不连续　(D) 偏导数连续

13.4　已知二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

则$f(x,y)$在点$(0,0)$处（　　）.

(A) 极限存在但不连续　(B) 连续但偏导数不存在

(C) 偏导数存在但不可微　(D) 可微

13.5　设$z_1=|x+y|$，$\mathrm{d}z_2=(3x^2+6x)\mathrm{d}x-(3y^2-6y)\mathrm{d}y$，则点$(0,0)$（　　）.

(A) 不是z_1的极值点，也不是z_2的极值点

(B) 是z_1的极大值点，也是z_2的极大值点

(C) 是z_1的极小值点，是z_2的极大值点

(D) 是z_1的极小值点，也是z_2的极小值点

13.6　（仅数学三）以p_A，p_B分别表示A，B两种商品的价格，设商品A的需求函数为

$$Q_A=500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2,$$

则当$p_A=10$，$p_B=20$时，商品A的需求量对自身价格的弹性$\eta_{AA}(\eta_{AA}>0)$为______.

13.7 设函数$z=\left(1+\dfrac{x}{y}\right)^2$，则$\mathrm{d}z\big|_{(1,\ 1)}=$______.

13.8 设函数$f(x)$可微，且$f'(0)=\dfrac{1}{2}$，则$z=f(4x^2-y^2)$在点$(1,\ 2)$处的全微分$\mathrm{d}z\big|_{(1,\ 2)}=$______.

13.9 设$z=z(x,\ y)$由$(z+y)^x=x^2$确定，则$\dfrac{\partial z}{\partial x}\bigg|_{(1,\ 1)}=$______.

13.10 设$z=f(x^2y^2,\ \mathrm{e}^{xy})$，其中$f(u,\ v)$有二阶连续偏导数，求$z''_{xx}$，$z''_{yy}$，$z''_{xy}$.

13.11 设函数$u=f(x^2,\ xy,\ xz)$具有一阶连续偏导数，又函数$y=y(x)$, $z=z(x)$分别由

$$\sin xy=y,\ \mathrm{e}^z=\int_0^{xz}\sin t\mathrm{d}t$$

确定，求$\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

13.12 求二元函数$f(x,\ y)=x^2y^2+x\ln x$的极值 .

13.13 已知函数$f(x,\ y)$满足$f''_{xy}(x,\ y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，$f'_x(x,\ 0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，$f(0,\ y)=y^2+2y$，求$f(x,\ y)$的极值 .

13.14 求曲线$x^3-xy+y^3=1(x\geqslant 0,\ y\geqslant 0)$上的点到坐标原点的最长距离与最短距离 .

解答

13.1 (C) **解** 由初等数学基本不等式：

$$\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{1}{2}|x|\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\ .$$

对于任给的$\varepsilon>0$，取$\delta=2\varepsilon$，当$0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$时，$\left|\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\right|<\varepsilon$. 由定义，可得

$$\lim_{(x,\ y)\to(0,\ 0)}f(x,\ y)=0=f(0,\ 0)\ .$$

对于(A),取$y=kx$,则$f(x,\ y)=f(x,\ kx)=\dfrac{k}{1+k^2}((x,\ y)\neq(0,\ 0))$,从而$\lim\limits_{\substack{y=kx\\x\to 0}}f(x,\ y)=\dfrac{k}{1+k^2}$,随$k$而异.

(B)与(A)同理 . (D)中取$y=kx^2$，$\lim\limits_{\substack{y=kx^2\\x\to 0}}f(x,\ y)=\dfrac{k}{1+k^2}$，随$k$而异 .

13.2 (D) **解** 因为$\dfrac{\partial f(x,\ y)}{\partial x}>0$，所以$f(x,\ y)$关于$x$是单调递增函数（此时$y$固定），故$f(0,\ 1)<f(1,\ 1)$；

因为$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}<0$，所以$f(x,y)$关于$y$是单调递减函数（此时$x$固定），故$f(1,1)<f(1,0)$.

因此$f(0,1)<f(1,0)$，(C) 不正确，故选 (D).

对于选项(A),(B),举反例,$f(x,y)=x-y$,符合题干条件,但$f(0,0)=f(1,1)$,故(A),(B)均不正确.

13.3　(B)　**解**　$f_x'(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot 0|}-0}{\Delta x}=0=A$，

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|0\cdot\Delta y|}-0}{\Delta y}=0=B,$$

故$f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在．又

$$\Delta z=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}-0=\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|},$$

故有$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\Delta z-A\Delta x-B\Delta y}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\dfrac{\sqrt{|\Delta x\cdot\Delta y|}}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$不存在．从而$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微．

13.4　(C)　**解**　$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)+\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$，

前者极限为0，对后者考虑极坐标．令$x=r\cos\theta$，$y=r\sin\theta$，有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{x^4+y^2}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^4\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to 0^+}\frac{r^2\cos^3\theta\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+\sin^2\theta}=0,$$

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$，所以$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续．

$$f_x'(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x}=1,$$

同理，$f_y'(0,0)=1$，所以$f(x,y)$在点$(0,0)$处偏导数存在．

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-f_x'(0,0)(x-0)-f_y'(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}-x-y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y}{(x^4+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}\xlongequal{\text{取 }y=x^2}\lim_{x\to 0}\frac{x^5}{(x^4+x^4)\sqrt{x^2+x^4}}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2|x|}=\pm\frac{1}{2}\neq 0,$$

于是$f(x,y)$在点$(0,0)$处不可微．

13.5　(D)　**解**　由于$\left.\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|_{(0,0)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-0}{x-0}$不存在，即其在点$(0,0)$处偏导数不存在，只能利用极值的定义来考虑．

因$z_1(0,0)=0$，又当$(x,y)\neq(0,0)$时，总有$z_1(x,y)\geqslant 0$，可知点$(0,0)$为z_1的极小值点；又由于

$\mathrm{d}z_2=(3x^2+6x)\mathrm{d}x-(3y^2-6y)\mathrm{d}y$，可知$\frac{\partial z_2}{\partial x}=3x^2+6x$，$\frac{\partial z_2}{\partial y}=-(3y^2-6y)$，且$\left.\frac{\partial z_2}{\partial x}\right|_{(0,\,0)}=0$，$\left.\frac{\partial z_2}{\partial y}\right|_{(0,\,0)}=0$．又

$$\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}=6x+6,\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}=0,\ \frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}=-6y+6,$$

则

$$A=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial x^2}\right|_{(0,\,0)}=6,\ B=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial x\partial y}\right|_{(0,\,0)}=0,\ C=\left.\frac{\partial^2 z_2}{\partial y^2}\right|_{(0,\,0)}=6,$$

$$AC-B^2=36>0,\ A>0,$$

可知点(0, 0)为z_2的极小值点．

故选 (D).

13.6　0.4　**解**　根据弹性的定义，有

$$\eta_{AA}=-\frac{p_A}{Q_A}\cdot\frac{\partial Q_A}{\partial p_A}=-\frac{p_A}{Q_A}\cdot(-2p_A-p_B)=\frac{p_A(2p_A+p_B)}{500-p_A^2-p_Ap_B+2p_B^2},$$

故当$p_A=10$，$p_B=20$时，$\eta_{AA}=0.4$．

13.7　$4(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y)$　**解**　设$u=\frac{x}{y}$，则

$$z=\left(1+\frac{x}{y}\right)^2=(1+u)^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=2(1+u),\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{x}{y^2},$$

故

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=2(1+u)\cdot\frac{1}{y}=\frac{2}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}=2(1+u)\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{2x}{y^2}\left(1+\frac{x}{y}\right),$$

因此

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=\frac{2}{y}\left(1+\frac{x}{y}\right)\left(\mathrm{d}x-\frac{x}{y}\mathrm{d}y\right),$$

故

$$\mathrm{d}z|_{(1,\,1)}=4(\mathrm{d}x-\mathrm{d}y).$$

13.8　$4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$　**解**　令$u=4x^2-y^2$，则$z=f(u)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=f'(u)(4x^2-y^2)'_x=8xf'(u),\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,\,2)}=8f'(0)=4,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=f'(u)(4x^2-y^2)'_y=-2yf'(u),\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,\,2)}=-4f'(0)=-2,$$

所以$\mathrm{d}z|_{(1,\,2)}=4\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y$．

13.9 2 **解** 将所给方程变形为 $(z+y)^x-x^2=0$，令 $F(x,y,z)=(z+y)^x-x^2$，则

$$F'_x=(z+y)^x\ln(z+y)-2x,$$

$$F'_z=x(z+y)^{x-1}.$$

将 $x=0$ 代入所给方程，不成立，故 $x\neq0$，$F'_z\neq0$，则有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{(z+y)^x\ln(z+y)-2x}{x(z+y)^{x-1}}. \qquad (*)$$

当 $x=1$，$y=1$ 时，由原方程可得 $z=0$，代入 (*) 式可得 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)}=2$．

13.10 **解** $z'_x=f'_1\cdot2xy^2+f'_2\cdot ye^{xy}$，$z'_y=f'_1\cdot2x^2y+f'_2\cdot xe^{xy}$，

$$\begin{aligned}z''_{xx}&=f''_{11}\cdot(2xy^2)^2+f''_{12}\cdot ye^{xy}\cdot2xy^2+f'_1\cdot2y^2+f''_{21}\cdot2xy^2\cdot ye^{xy}+f''_{22}\cdot(ye^{xy})^2+f'_2\cdot y^2e^{xy}\\&=f''_{11}\cdot4x^2y^4+f''_{22}\cdot y^2e^{2xy}+f''_{12}\cdot4xy^3e^{xy}+f'_1\cdot2y^2+f'_2\cdot y^2e^{xy}.\end{aligned}$$

同理可得

$$z''_{yy}=f''_{11}\cdot4x^4y^2+f''_{22}\cdot x^2e^{2xy}+f''_{12}\cdot4x^3ye^{xy}+f'_1\cdot2x^2+f'_2\cdot x^2e^{xy},$$

$$\begin{aligned}z''_{xy}&=f''_{11}\cdot2x^2y\cdot2xy^2+f''_{12}\cdot xe^{xy}\cdot2xy^2+f'_1\cdot4xy+f''_{21}\cdot2x^2y\cdot ye^{xy}+f''_{22}\cdot xe^{xy}\cdot ye^{xy}+f'_2\cdot(e^{xy}+xye^{xy})\\&=f''_{11}\cdot4x^3y^3+f''_{22}\cdot xye^{2xy}+f''_{12}\cdot4x^2y^2e^{xy}+f'_1\cdot4xy+f'_2\cdot(1+xy)e^{xy}.\end{aligned}$$

13.11 **解** 复合函数 $u=f(x^2,xy,xz)$ 两边对 x 求导数得

$$\frac{du}{dx}=f'_1\cdot2x+f'_2\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)+f'_3\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right). \qquad ①$$

由隐函数 $\sin xy=y$ 求 $\frac{dy}{dx}$．等式 $\sin xy=y$ 两边对 x 求导数得

$$(\cos xy)\cdot\left(y+x\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dy}{dx},$$

解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\cos xy}{1-x\cos xy}. \qquad ②$$

由隐函数 $e^z=\int_0^{xz}\sin t\,dt$ 求 $\frac{dz}{dx}$．等式 $e^z=\int_0^{xz}\sin t\,dt$ 两边对 x 求导数得

$$e^z\frac{dz}{dx}=(\sin xz)\cdot\left(z+x\frac{dz}{dx}\right),$$

解得

$$\frac{dz}{dx}=\frac{z\sin xz}{e^z-x\sin xz}. \qquad ③$$

将②，③式代入①式，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1'\cdot 2x+f_2'\cdot\left(y+x\frac{y\cos xy}{1-x\cos xy}\right)+f_3'\cdot\left(z+x\frac{z\sin xz}{\mathrm{e}^z-x\sin xz}\right).$$

13.12　解　$f_x'(x,\ y)=2xy^2+1+\ln x,\ f_y'(x,\ y)=2x^2y$.

令
$$\begin{cases}f_x'(x,\ y)=0,\\ f_y'(x,\ y)=0,\end{cases}$$

解得唯一驻点$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$. 由

$$f_{xx}''=2y^2+\frac{1}{x},\ f_{xy}''=4xy,\ f_{yy}''=2x^2,$$

得
$$A=f_{xx}''\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)=\mathrm{e},\ B=f_{xy}''\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)=0,\ C=f_{yy}''\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)=\frac{2}{\mathrm{e}^2},$$

故$AC-B^2=\frac{2}{\mathrm{e}}>0,\ A=\mathrm{e}>0$，可知点$\left(\frac{1}{\mathrm{e}},0\right)$为$f(x,\ y)$的极小值点，极小值为$-\frac{1}{\mathrm{e}}$.

13.13　解　由$f_{xy}''(x,\ y)=2(y+1)\mathrm{e}^x$，得

$$f_x'(x,\ y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+\varphi(x),$$

因为$f_x'(x,\ 0)=(x+1)\mathrm{e}^x$，所以$\varphi(x)=(x+1)\mathrm{e}^x$，从而

$$f_x'(x,\ y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+(x+1)\mathrm{e}^x,$$

将上式两端对x积分得

$$f(x,\ y)=(y^2+2y)\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x+\phi(y),$$

因为$f(0,\ y)=y^2+2y$，所以$\phi(y)=0$，从而

$$f(x,\ y)=(x+y^2+2y)\mathrm{e}^x,$$

于是$f_y'(x,\ y)=(2y+2)\mathrm{e}^x$，$f_{xx}''(x,\ y)=(x+y^2+2y+2)\mathrm{e}^x$，$f_{yy}''(x,\ y)=2\mathrm{e}^x$，$f_{xy}''=f_{yx}''=(2y+2)\mathrm{e}^x$.

令$f_x'(x,\ y)=0,\ f_y'(x,\ y)=0$，得驻点$(0,\ -1)$，所以

$$A=f_{xx}''(0,\ -1)=1,\ B=f_{xy}''(0,\ -1)=0,\ C=f_{yy}''(0,\ -1)=2,$$

由于$AC-B^2>0,\ A>0$，因此极小值为$f(0,\ -1)=-1$.

13.14　解　方法一　设$(x,\ y)$为曲线上的任一点，目标函数为距离的平方即$f(x,\ y)=x^2+y^2$，构造拉格朗日函数

$$F(x,\ y,\ \lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^3-xy+y^3-1).$$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2x+(3x^2-y)\lambda=0, & ①\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2y+(3y^2-x)\lambda=0, & ②\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^3-xy+y^3-1=0, & ③\end{cases}$$

当$x>0$，$y>0$时，由①，②式得

$$\frac{x}{y}=\frac{3x^2-y}{3y^2-x}，即 3xy(y-x)=(x+y)(x-y),$$

得$y=x$或$3xy=-(x+y)$（由于$x>0$，$y>0$，因此舍去）.

将$y=x$代入③式得

$$2x^3-x^2-1=0，即 (x-1)(2x^2+x+1)=0,$$

解得$x=1$，从而点$(1,1)$为唯一可能的极值点.

又当$x=0$时，$y=1$；当$y=0$时，$x=1$. 分别计算点$(1,1)$，$(0,1)$及$(1,0)$处的目标函数值，有

$$f(1,1)=2,\ f(0,1)=f(1,0)=1,$$

故所求最长距离为$\sqrt{2}$，最短距离为1.

方法二　由导数的几何意义，知平面曲线上任一点(x_0, y_0)的切向量为$(1, y'_{x_0})$.

对曲线$x^3-xy+y^3=1$两边关于x求导得$3x^2-y-xy'+3y^2y'=0$，解得$y'=\dfrac{y-3x^2}{3y^2-x}$.

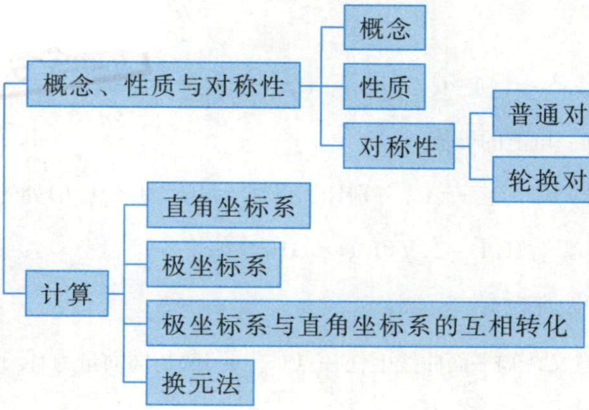
由最远（近）点的垂线原理知，坐标原点到曲线C距离的最值点(x, y)满足$(x, y)\cdot(1, y'_x)=0$，即

$x+\dfrac{y-3x^2}{3y^2-x}\cdot y=0$，整理得$(3xy+x+y)(y-x)=0$，解得$y=x$或$3xy=-(x+y)$（不符合题意，舍去）.

余下步骤同方法一.

第14讲　二重积分

基础知识结构



基础内容精讲

一、概念、性质与对称性

1. 概念

按照第8讲中给出定积分定义的方法，可以得到二重积分的定义．

设$f(x, y)$是有界闭区域D上的有界函数，将闭区域D任意分成 →分割 n个小闭区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n,$$

其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小闭区域，也表示它的面积．在每个$\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i, η_i)，作乘积 →近似 $f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i (i=1, 2, \cdots, n)$，并作和 →求和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$，如果当各小闭区域的直径中的最大值$\lambda$趋于零时，和的极限 →取极限 总存在（与$\Delta\sigma_i$的分法及点$(\xi_i, \eta_i)$的取法均无关），则称此极限值为函数$f(x, y)$在闭区域$D$上的二重积分，记作$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i\ ,$$

其中$f(x,\ y)$称为被积函数，$f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$称为被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$称为面积元素，x与y称为积分变量，D称为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i)\Delta\sigma_i$称为积分和．

$\mathrm{d}\sigma > 0$

若$f(x,\ y)$在有界闭区域D上连续，则二重积分$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$一定存在．

【注】(1) 设$f(x,\ y)\geqslant 0$，如图 14-1 所示，被积函数$f(x,\ y)$可作为曲顶柱体在点$(x,\ y)$处的柱体微元的竖坐标（高），用底面积$\mathrm{d}\sigma$乘以高$f(x,\ y)$，得到一个“小竖条”的体积，再在区域D上把所有的“小竖条”累加起来，就得到了整个曲顶柱体的体积．

(2) 如果$f(x,\ y)$是负的，柱体就在xOy面的下方，二重积分的绝对值仍等于柱体的体积，但二重积分的值是负的．

(3) 如果$f(x,\ y)$在D的若干部分区域上是正的，而在其他部分区域上是负的，那么，$f(x,\ y)$在D上的二重积分就等于xOy面上方的柱体体积减去xOy面下方的柱体体积所得之差．

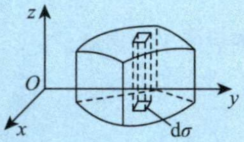


图 14-1

2. 性质

性质 1(求区域面积) $\iint\limits_D 1\cdot\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D \mathrm{d}\sigma = A$，其中$A$为$D$的面积．

性质 2(可积函数必有界) 当$f(x,\ y)$在有界闭区域D上可积时，$f(x,\ y)$在D上必有界．

性质 3(积分的线性性质) 设k_1，k_2为常数，则

$$\iint\limits_D [k_1 f(x,\ y)\pm k_2 g(x,\ y)]\mathrm{d}\sigma = k_1\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \pm k_2\iint\limits_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\ .$$

性质 4(积分的可加性) 设$f(x,\ y)$在有界闭区域D上可积，且$D_1\cup D_2 = D$，$D_1\cap D_2=\varnothing$，则

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\ .$$

性质 5(积分的保号性) 当$f(x,\ y)$，$g(x,\ y)$在有界闭区域D上可积时，若在D上有

$$f(x,\ y)\leqslant g(x,\ y),$$

则有

$$\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma \leqslant \iint\limits_D g(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\ .$$

特殊地，有

$$\left|\iint\limits_D f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,\ y)|\mathrm{d}\sigma\ .$$

性质 6(二重积分的估值定理) 设M，m分别是$f(x,\ y)$在有界闭区域D上的最大值和最小值，A为D的面积，则有

$$mA \leqslant \iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma \leqslant MA.$$

性质 7(二重积分的中值定理) 设函数$f(x, y)$在有界闭区域D上连续，A为D的面积，则在D上至少存在一点(ξ, η)，使得

$$\iint\limits_D f(x, y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi, \eta)A.$$

例 14.1 设平面闭区域$D_i(i=1, 2, 3, 4)$分别是由

$$L_1: x^2+y^2=1, \quad L_2: x^2+y^2=2,$$

$$L_3: x^2+2y^2=2, \quad L_4: 2x^2+y^2=2$$

围成的平面区域，记

$$I_i = \iint\limits_{D_i}\left(1-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

则$\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\}$ = ( ).

(A) I_1 (B) I_2 (C) I_3 (D) I_4

解 应选 (D).

曲线$L_i(i=1, 2, 3, 4)$如图 14-2 所示．记被积函数为$f(x, y)=1-\left(x^2+\frac{1}{2}y^2\right)$，由于$L_4$：$2x^2+y^2=2$，则$D_4$内部为$x^2+\frac{y^2}{2}<1$，于是在$D_4$内部有$f(x, y)>0$，而在$D_4$外部有$f(x, y)<0$．

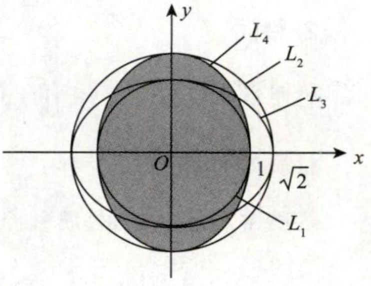


图 14-2

①比较I_1与I_4．

$$I_4 = \iint\limits_{D_4} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_4-D_1} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= I_1 + \iint\limits_{\underline{D_4-D_1}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > I_1. \quad \rightarrow f(x, y)>0$$

②比较I_2与I_4．

$$I_2 = \iint\limits_{D_2} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_4} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_2-D_4} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= I_4 + \iint\limits_{\underline{D_2-D_4}} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < I_4. \quad \rightarrow f(x, y)<0$$

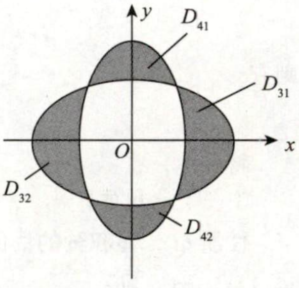


图 14-3

③比较I_3与I_4．如图 14-3 所示，将D_3，D_4中互不重合的部分分别记为$D_{31}, D_{32}, D_{41}, D_{42}$，则

$$\begin{aligned} I_3 &= \underbrace{\iint\limits_{D_{31}} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{32}} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{f(x,\ y)<0} + \iint\limits_{D_3 \cap D_4} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &< \underbrace{\iint\limits_{D_{41}} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{D_{42}} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{f(x,\ y)>0} + \iint\limits_{D_3 \cap D_4} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= I_4 . \end{aligned}$$

所以$\max\{I_1, I_2, I_3, I_4\} = I_4$，即应选 (D).

【注】 事实上，D_4是使得$\iint\limits_{D}\left(1-x^2-\frac{1}{2}y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$取得最大值的区域，因为$D_4$包含了所有使$1-x^2-\frac{1}{2}y^2$大于零的区域，而不包含任何使$1-x^2-\frac{1}{2}y^2$小于零的区域，由二重积分的性质知$I_4$最大．

例 14.2 设

$$D_t = \{(x,\ y) \mid 2x^2+3y^2 \leqslant 6t\}\ (t \geqslant 0),$$

$$f(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{1-xy}-1}{\mathrm{e}^{xy}-1}, & xy \neq 0, \\ a, & xy = 0 \end{cases}$$

为连续函数，令$F(t) = \iint\limits_{D_t} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，则$F'_+(0)$ = ______.

解 应填$-\dfrac{\sqrt{6}\pi}{3}$.

由例 13.2 可知$a = -\dfrac{1}{3}$.

由二重积分中值定理知，存在$(\xi,\ \eta) \in D_t$，使得

$$F(t) = \iint\limits_{D_t} f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{6}\pi t f(\xi,\ \eta) .$$

于是，

$$\begin{aligned} F'_+(0) &= \lim_{t \to 0^+} \frac{F(t)-F(0)}{t-0} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\sqrt{6}\pi t f(\xi,\ \eta)}{t} = \lim_{t \to 0^+} \sqrt{6}\pi f(\xi,\ \eta) \\ &= \sqrt{6}\pi f(0,\ 0) = -\frac{\sqrt{6}\pi}{3} . \end{aligned}$$

【注】 此题的被积函数命制成具体函数，但$\iint\limits_{D_t} f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma$难以计算，故考虑利用二重积分中值定理来处理．同理，若被积函数命制成抽象函数，也可以考虑利用二重积分中值定理来处理，如：

设$f(x,\ y)$具有二阶连续偏导数，

$$D_t=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant t,\ 0\leqslant y\leqslant t\},$$

令$F(t)=\iint\limits_{D_t} f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，求$F'_+(0)$.

解
$$F'_+(0)=\lim_{t\to0^+}\frac{F(t)-F(0)}{t-0}=\lim_{t\to0^+}\frac{\iint\limits_{D_t} f''_{xy}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{t-0}$$

$$\xlongequal{\text{二重积分中值定理}}\lim_{t\to0^+}\frac{f''_{xy}(\xi,\eta)\cdot t^2}{t}=\lim_{t\to0^+}\overset{0}{t}\cdot \overset{f''_{xy}(0,0)}{f''_{xy}(\xi,\eta)}=0.$$

3. 普通对称性与轮换对称性

(1) 普通对称性.

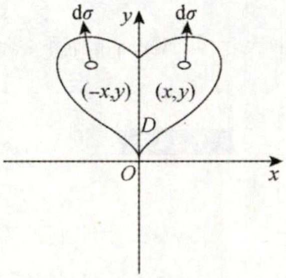


图 14-4

设区域D关于y轴对称，如图 14-4 所示，取对称的两块小面积$\mathrm{d}\sigma$，对称点分别为(x,y)与$(-x,y)$，则对称点处的高分别为$f(x,y)$与$f(-x,y)$. 依据定义，对称位置的两个"小竖条"的体积分别为$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$与$f(-x,y)\mathrm{d}\sigma$. 因为$\mathrm{d}\sigma$一样，所以，当$f(x,y)=f(-x,y)$时，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma=f(-x,y)\mathrm{d}\sigma$，体积相同，此时只需计算对称区域的一半，然后乘以 2 即可得到整个积分值；而当$f(x,y)=-f(-x,y)$时，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma=-f(-x,y)\mathrm{d}\sigma$，对称区域的体积正好相反，这样累加起来的总体积自然就是 0. 于是，我们有

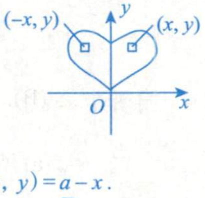
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,y)=f(-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y),\end{cases}$$

→把对称点代入，函数值相同，即2倍；函数值相反，即为0.

其中D_1是D在y轴右侧的部分.

你看，用这种基于概念的分析方法，不用死记硬背，而且真正理解了性质的本质. 现将二重积分有关的对称性全面总结如下.

①若D关于y轴对称，则

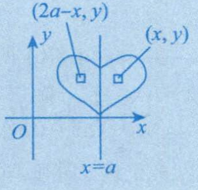


$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,y),\end{cases}$$

其中D_1是D在y轴右侧的部分.

如$\iint\limits_{D}(x-a)\mathrm{d}\sigma=0$，因$f(x,y)=x-a$，而$f(2a-x,y)=a-x$.

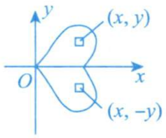
【**注**】若D关于$x=a(a\neq0)$对称，则



$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(2a-x,y),\\ 0, & f(x,y)=-f(2a-x,y),\end{cases}$$

其中D_1是D在$x=a$右侧的部分.

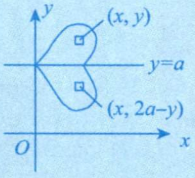
②若 D 关于 x 轴对称，则



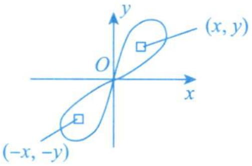
$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(x,-y),\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 在 x 轴上侧的部分 .

> **【注】**若 D 关于 $y=a(a\neq 0)$ 对称，则
>
> $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(x,2a-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(x,2a-y),\end{cases}$$
>
> 其中 D_1 是 D 在 $y=a$ 上侧的部分 .



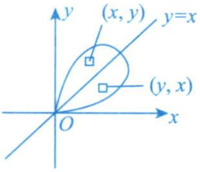
③若 D 关于原点对称，则



$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & f(x,y)=f(-x,-y),\\ 0, & f(x,y)=-f(-x,-y),\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 关于原点对称的半个部分 .

④若 D 关于 $y=x$ 对称，则



x，y 对调，$f(x,y)=f(y,x)$

$$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\begin{cases}2\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma, & \underline{f(x,y)=f(y,x)},\\ 0, & f(x,y)=-f(y,x),\end{cases}$$

其中 D_1 是 D 关于 $y=x$ 对称的半个部分 .

例 14.3 设 $J_i=\iint\limits_{D_i}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,(i=1,2,3)$，其中 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，$D_2=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x}\}$，$D_3=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ x^2\leqslant y\leqslant 1\}$，则（　　）.

(A) $J_1<J_2<J_3$　　(B) $J_3<J_1<J_2$　　(C) $J_2<J_3<J_1$　　(D) $J_2<J_1<J_3$

解 应选 (B).

如图 14-5(a) 所示，D_1 被直线 $y=x$ 分成 D_{11} 和 D_{12} 两部分，故 $\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{11}+D_{12}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，由于 $\sqrt[3]{x-y}=-\sqrt[3]{y-x}$，故由普通对称性，有 $J_1=\iint\limits_{D_1}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$.

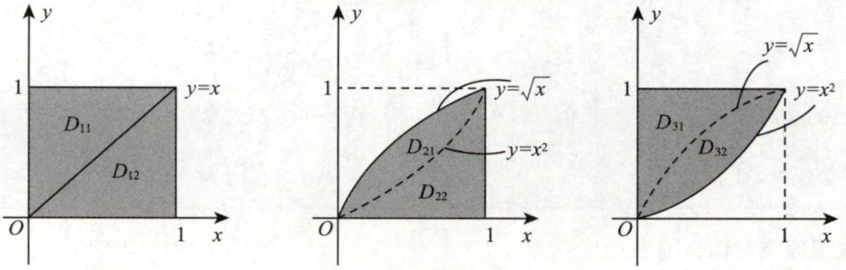
如图 14-5(b) 所示，作辅助线 $y=x^2$，将 D_2 分为 D_{21} 和 D_{22} 两部分，由普通对称性知，$\iint\limits_{D_{21}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 而在 D_{22} 上，$\sqrt[3]{x-y}\geqslant 0$，由保号性知，

$$J_2=\iint\limits_{D_2}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{22}}\sqrt[3]{x-y}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0\ .$$

如图 14-5(c) 所示，作辅助线 $y=\sqrt{x}$，将 D_3 分为 D_{31} 和 D_{32} 两部分，由普通对称性知，$\iint\limits_{D_{32}}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$. 而在 D_{31} 上，$\sqrt[3]{x-y}\leqslant 0$，由保号性知，

$$J_3=\iint\limits_{D_3}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{31}}\sqrt[3]{x-y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y<0 .$$

综上，$J_3<J_1<J_2$.



(a) (b) (c)

图 14-5

(2) 轮换对称性 .

引例 1

$$\iint\limits_{D_1:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{?}{=\!=}\iint\limits_{D_2:\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x .$$

解 因为上述两个积分只是将 x 与 y 这两个字母对调了，**而积分值与用什么字母表示是无关的**，故它们是相等的 .

引例 2

$$\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}(2x^2+3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\overset{?}{=\!=}\iint\limits_{D:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}\leqslant 1}(2y^2+3x^2)\mathrm{d}y\mathrm{d}x .$$

解 理由如上，它们也是相等的 .

引例 2 中的区域 D 有个特点，就是当你把 x 与 y 对调后，区域 D 不变（事实上，区域 D 关于 $y=x$ 对称）. 于是抽象化写出的式子为

$$\iint\limits_{D}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}f(y,\ x)\mathrm{d}y\mathrm{d}x .$$

整理一下，我们可以这样来描述：

在直角坐标系下，若把 x 与 y 对调后，区域 D 不变（或区域 D 关于 $y=x$ 对称），则

$$\iint\limits_{D}f(x,\ y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D}f(y,\ x)\mathrm{d}\sigma,$$

这就是**轮换对称性** .

【注】(1) 在直角坐标系中，若 $f(x,y)+f(y,x)\underset{(>)}{=}a$，则

$$I=\frac{1}{2}\iint_D[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\underset{(>)}{=}\frac{1}{2}\iint_D a\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{a}{2}S_D .$$

(2) 要注意区分普通对称性中的④与这里轮换对称性的区别与联系．虽然它们都是 D 关于 $y=x$ 对称，但普通对称性考查的是 $f(x,y)$ 与 $f(y,x)$ 是相等还是相反，轮换对称性考查的是 $f(x,y)+f(y,x)$ 是否简单．事实上，当 $f(x,y)=-f(y,x)$ 时，它们是一回事．

例 14.4 设 $f(x)=\iint\limits_{D(x)}\frac{v\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u+v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，$D(x)=\left\{(u,v)\middle|u^2+v^2\leqslant x^2\right\}$，则 $f(x)=$（　　）.

(A) $\frac{1}{4}\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(B) $\frac{1}{2}\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(C) $\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

(D) $2\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

解 应选 (A).

由轮换对称性，有

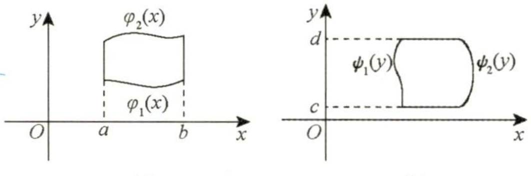
$$\begin{aligned}f(x)&=\iint\limits_{D(x)}\frac{v\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u+v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\iint\limits_{D(x)}\frac{u\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u+v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_{D(x)}\ln\sqrt{u^2+v^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{4}\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

二、计算

1. 直角坐标系下的计算方法

在直角坐标系下，按照积分次序的不同，一般将二重积分的计算分为两种情况，如图 14-6 所示．

后积先定限，
限内画直线，
先交写下限，
后交写上限.



(a)　　　(b)

图 14-6

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y$，其中 D 为 X 型区域：$\varphi_1(x)\leqslant y\leqslant\varphi_2(x)$，$a\leqslant x\leqslant b$；

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)}f(x,y)\mathrm{d}x$，其中 D 为 Y 型区域：$\psi_1(y)\leqslant x\leqslant\psi_2(y)$，$c\leqslant y\leqslant d$．

【注】(1) 有一点需要指出，这里的下限都必须小于等于上限．

(2) 若被积函数$f(x, y)$易于对y积分或积分区域D是X型区域，则选择先y后x的积分次序；

若被积函数$f(x, y)$易于对x积分或积分区域D是Y型区域，则选择先x后y的积分次序．

(3) 计算二重积分的关键是确定积分限，为此，要画好积分区域D的边界图形，当D的边界图形不易画出时，要写出D的不等式表达式，从而确定上下限．

例 14.5 设函数$f(x, y)$连续，则二次积分$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x, y)\mathrm{d}y=(\quad)$．

(A) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi+\arcsin y}^{\pi}f(x, y)\mathrm{d}x$

(B) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\pi-\arcsin y}^{\pi}f(x, y)\mathrm{d}x$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi+\arcsin y}f(x, y)\mathrm{d}x$

(D) $\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi-\arcsin y}f(x, y)\mathrm{d}x$

解 应选(B).

根据所给二次积分得到积分区域为D：$\begin{cases}\sin x<y<1,\\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi,\end{cases}$ 如图 14-7 所示，则

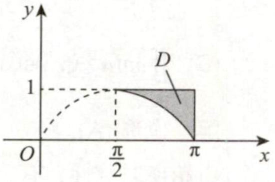


图 14-7

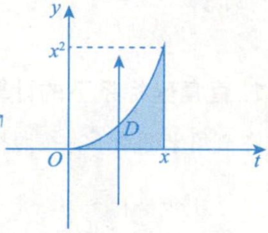
$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}f(x, y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\underline{\pi-\arcsin y}}^{\pi}f(x, y)\mathrm{d}x.$$

由例1.12得，当$\frac{\pi}{2}<x\leqslant\frac{3}{2}\pi$时，$x=\pi-\arcsin y$

例 14.6 当$x\to0^{+}$时，$f(x)=\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\int_x^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{t}\mathrm{d}t$与$g(x)=ax^b$是等价无穷小量，则$ab=$______．

解 应填$-\frac{1}{2}$．

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\int_x^{\sqrt{y}}\sin\frac{y}{t}\mathrm{d}t=-\int_0^{x^2}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{y}}^{x}\sin\frac{y}{t}\mathrm{d}t\\&=-\iint_D\sin\frac{y}{t}\mathrm{d}\sigma=-\int_0^x\mathrm{d}t\int_0^{t^2}\sin\frac{y}{t}\mathrm{d}y\\&=\int_0^x t\cdot\left(\cos\frac{y}{t}\right)\Bigg|_{y=0}^{y=t^2}\mathrm{d}t\\&=\int_0^x t(\cos t-1)\mathrm{d}t,\end{aligned}$$



于是$\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{x(\cos x-1)}{abx^{b-1}}=\lim\limits_{x\to0^{+}}\dfrac{-\frac{1}{2}x^3}{abx^{b-1}}=1$，故$ab=-\dfrac{1}{2}$．

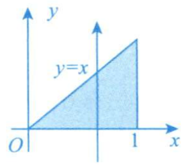
【注】(1) $\int\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{1}{\ln x}\mathrm{d}x$, $\int\sin x^2\mathrm{d}x$, $\int\cos x^2\mathrm{d}x$, $\int\sin\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\int\cos\frac{1}{x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\tan x}{x}\mathrm{d}x$, $\int\frac{\mathrm{e}^x}{x}\mathrm{d}x$, $\int\tan x^2\mathrm{d}x$, $\int\mathrm{e}^{ax^2+bx+c}\mathrm{d}x(a\neq0)$均没有初等函数形式的原函数，见到它们，一般都要

交换积分次序．

(2) 事实上，$a=-\frac{1}{8}$, $b=4$.

例 14.7　计算 $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 \arcsin\sqrt{4x-4x^2}\,\mathrm{d}x$ ．

解　先对 x 积分较困难，交换积分次序．



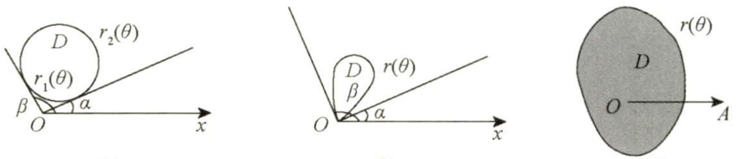
$$\text{原式}=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x \arcsin\sqrt{4x-4x^2}\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1 x\arcsin\sqrt{4x-4x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ .$$

由例9.15知

2. 极坐标系下的计算方法

在极坐标系下，按照积分区域与极点位置关系的不同，一般将二重积分的计算分为三种情况，如图 14-8 所示．



(a)　(b)　(c)

图 14-8

极坐标：$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

(1) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 外部）;

(2) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_\alpha^\beta \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 边界上）;

(3) $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\mathrm{d}r$（极点 O 在区域 D 内部）.

【注】 极坐标系与直角坐标系选择的一般原则．

一般来说，给出一个二重积分． 是否用极坐标系计算主要看①.

①看被积函数是否为 $f(x^2+y^2)$, $f\left(\frac{y}{x}\right)$, $f\left(\frac{x}{y}\right)$ 等形式;

②看积分区域是否为圆或者圆的一部分．

如果①，②至少满足其中之一，那么优先选用极坐标系，否则，就优先考虑直角坐标系．

例 14.8　设区域 $D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant\sqrt{2}\right\}$，则 $\iint\limits_D\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______.

解　应填 $\frac{3\pi}{4}$ ．

用轮换对称性

$$\iint\limits_D\left(x^2+\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\left(y^2+\frac{x^2}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\iint\limits_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2^{\frac{1}{4}}}(r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta)r\mathrm{d}r=\frac{3\pi}{4}.$$

例 14.9 设平面有界区域D位于第一象限，由曲线$x^2+y^2-xy=1$，$x^2+y^2-xy=2$与直线$y=\sqrt{3}x$，$y=0$围成，计算$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解 在考试时，有些D的边界图形不易画出，考生可根据D的表达式来确定上下限．由$x^2+y^2-xy=2$得$r^2-r^2\sin\theta\cos\theta=2$，故$r=\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}$．又$y=\sqrt{3}x$，得$r\sin\theta=\sqrt{3}r\cos\theta$，有$\tan\theta=\sqrt{3}$，则$\theta=\frac{\pi}{3}$．

$$\iint\limits_D\frac{1}{3x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}\cdot\frac{1}{r^2(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\mathrm{d}\theta\int_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}\cdot\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{r}\mathrm{d}r$$

$$\ln r\Bigg|_{\sqrt{\frac{1}{1-\cos\theta\sin\theta}}}^{\sqrt{\frac{2}{1-\cos\theta\sin\theta}}}=\frac{\ln 2}{2}$$

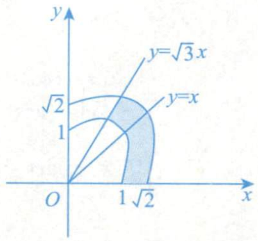
$$=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3\cos^2\theta+\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{3+\tan^2\theta}\mathrm{d}(\tan\theta)$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C(a>0)$$

$$=\frac{\ln 2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{\tan\theta}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}\ln 2}{24}\pi.$$



【注】本题有两个办法画出D的边界图形．

第一，描点法．显然，$x^2+y^2-xy=1$与$x^2+y^2-xy=2$分别与x轴、y轴和$y=x$交于$(1,0)$与$(\sqrt{2},0)$，$(0,1)$与$(0,\sqrt{2})$，$(1,1)$与$(\sqrt{2},\sqrt{2})$，将这些点连起来即可得到其大致图形．

第二，事实上，$x^2+y^2-xy=(x\ \ y)\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，其二次型矩阵为$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$，$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\lambda-1\end{vmatrix}=0$，得$\lambda_1=\frac{1}{2}$，$\lambda_2=\frac{3}{2}$（或用配方法$x^2+y^2-xy=\left(x-\frac{1}{2}y\right)^2+\frac{3}{4}y^2$）．故$x^2+y^2-xy$可经正

学完线性代数分册再看此处

交变换化为$\frac{1}{2}y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2$，于是$\frac{1}{2}y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2=1$与$\frac{1}{2}y_1^2+\frac{3}{2}y_2^2=2$均为椭圆，即可画出图形．

例 14.10 设$f(x)=\iint\limits_{D(x)}\frac{v\ln\sqrt{u^2+v^2}}{u+v}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，$D(x)=\left\{(u,v)\middle|u^2+v^2\leqslant x^2\right\}$，求曲线$y(x)=\int_1^x f(t)\mathrm{d}t(x>0)$的拐点．

解 由轮换对称性，根据例 14.4 知，有

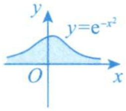
$$
\begin{aligned}
f(x)&=\frac{1}{4}\iint\limits_{D(x)}\ln(u^2+v^2)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^x\ln r^2\cdot r\mathrm{d}r\\
&=\frac{\pi}{4}\int_0^x\ln r^2\mathrm{d}(r^2)=\frac{\pi}{4}\left(r^2\ln r^2\Big|_0^x-\int_0^x r^2\cdot\frac{2r}{r^2}\mathrm{d}r\right)\\
&=\frac{\pi}{4}(2x^2\ln x-x^2),
\end{aligned}
$$

故$y'(x)=f(x)$，$y''(x)=\frac{\pi}{4}(4x\ln x+2x-2x)=\pi x\ln x\xlongequal{令}0$，得$x=1$，当$0<x<1$时，$y''(x)<0$，当$x>1$时，$y''(x)>0$，于是$(1,0)$为$y(x)$的拐点．

例 14.11 计算$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$．

解 设$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，则

$$
\begin{aligned}
I^2&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}y=\iint\limits_{\substack{0\leqslant x<+\infty\\0\leqslant y<+\infty}}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\cdot\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}(-r^2)\\
&=-\frac{\pi}{4}\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{4},
\end{aligned}
$$



$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}$，这叫高斯积分，如同欧拉公式$\mathrm{e}^{\pi i}+1=0$一样美妙.比如你看，它们都同时包含e，π.

由积分的保号性知$I>0$，故$I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$．

【注】应记住这一结果，它经常被用到，如例 14.12.

例 14.12 计算$\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$．

解 $\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$，又由例 9.28 知，$2\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=2\int_0^{+\infty}x^{2\cdot\frac{3}{2}-1}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=$

$\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. 故 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

【注】 本题若不用 Γ 函数，对于 $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx$，要这样算：

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx &= \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right) x e^{-x^2} d(-x^2) = \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right) x d(e^{-x^2}) \\ &= -\frac{1}{2} x e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{2}\right) e^{-x^2} dx \\ &= 0 + \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4},\end{aligned}$$

故 $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，显然，这是相对麻烦的 .

例 14.13 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{x^2-t^2} dt + a e^{x^2}}{x^b} = -\frac{1}{2}$，求 a, b 的值 .

解 一开始，可能看不出是什么类型的未定式，作恒等变形 (分子分母同时除以 e^{x^2}) 再看：

$$原式 = \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt + a}{x^b e^{-x^2}} = -\frac{1}{2},$$

此时不论 b 取何值，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^b e^{-x^2} = 0$，即判定为 “$\frac{0}{0}$” 型 (事实上，变形前为 “$\frac{\infty}{\infty}$” 型).

故

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt + a\right) = 0,$$

于是

$$a = -\int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^2} dt = -\frac{\sqrt{\pi}}{4}. \xrightarrow{\quad} 由例14.12知$$

则

$$\begin{aligned}原式 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{-t^2} dt - \frac{\sqrt{\pi}}{4}}{x^b e^{-x^2}} \xlongequal{洛必达法则} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 e^{-x^2}}{b x^{b-1} e^{-x^2} + x^b e^{-x^2}(-2x)} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{b x^{b-1} - 2x^{b+1}} = -\frac{1}{2},\end{aligned}$$

故 $b = 1$.

3. 极坐标系与直角坐标系的互相转化

一是用好 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 这个公式；二是画出区域 D 的边界图形，做好上限、下限的转化 .

例 14.14 $\int_0^1 dx \int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy$ = ______.

解 应填$2-\frac{\pi}{2}$.

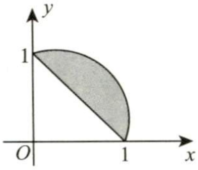


图 14-9

本题乍一看，也许我们会先考虑题目是否在积分次序上设置了障碍，是否需要交换积分次序再做积分，但是，细致做来，我们会发现不管是先对x积分，还是先对y积分，都不容易计算．看来这不是积分次序上的问题，这时想想看是不是选择何种坐标系的问题呢？被积函数中含有x^2+y^2的形式，且积分区域是圆的一部分，如图 14-9 所示，显然应该优先考虑极坐标系，题目给出的却是直角坐标系，我们需要改变一下．于是，有

$$\text{原式}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r^2}r\mathrm{d}r$$

由 $x+y=1$ 得 $r\cos\theta+r\sin\theta=1$，故 $r=\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}$.

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\theta+\sin\theta)\frac{\cos\theta+\sin\theta-1}{\cos\theta+\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta$$

$$=1+1-\frac{\pi}{2}=2-\frac{\pi}{2}.$$

4. 换元法

二重积分亦有和定积分一脉相承的换元法，有时很有用，现介绍于此，供参考，若能够用上，可直接使用，不必证明．

先回顾一元函数积分换元法，见“①”，再看二重积分换元法，见“②”．

① $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \xlongequal{x=\varphi(t)} \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

a. $f(x)\to f[\varphi(t)]$.

b. $\int_a^b \to \int_\alpha^\beta$.

c. $\mathrm{d}x\to\varphi'(t)\mathrm{d}t$.

注意：$x=\varphi(t)$单调，存在一阶连续导数．

② $\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \xlongequal[y=y(u,v)]{x=x(u,v)} \iint\limits_{D_{uv}} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

a. $f(x,y)\to f[x(u,v),y(u,v)]$.

b. $\iint\limits_{D_{xy}}\to\iint\limits_{D_{uv}}$.

c. $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\to\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

注意：其中$\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v)\end{cases}$是$(x,y)$面到$(u,v)$面的一对一映射，$x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$存在一阶连续偏导数，$\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}\neq 0$.

另外，令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$\iint\limits_{D_{xy}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\left\|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_{D_{r\theta}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta .$$

这就是直角坐标系到极坐标系的换元过程 .

例 14.15 设平面区域$D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1-y,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$，计算二重积分$\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma$.

解 令$\begin{cases}x+y=u,\\ y=v,\end{cases}$则$\begin{cases}x=u-v,\\ y=v,\end{cases}$

$$J=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1 ,$$

且由$\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 1-y,\\ 0\leqslant y\leqslant 1,\end{cases}$知$\begin{cases}v\leqslant u\leqslant 1,\\ 0\leqslant v\leqslant 1,\end{cases}$如图 14-10 所示 . 故

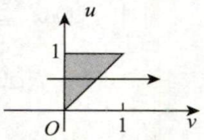


图 14-10

$$I=\iint\limits_{D}\mathrm{e}^{\frac{y}{x+y}}\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{D_{uv}}\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\int_0^1\mathrm{d}u\int_0^u\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\mathrm{d}v$$

$$=\int_0^1 u\,\mathrm{e}^{\frac{v}{u}}\Big|_{v=0}^{v=u}\mathrm{d}u=\int_0^1 u(\mathrm{e}-1)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}(\mathrm{e}-1).$$

【**注**】此题亦可用常规方法（极坐标系，见图 14-11）求解：

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}r\mathrm{d}r$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{e}^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\cdot\frac{r^2}{2}\Big|_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}\mathrm{d}\theta$$

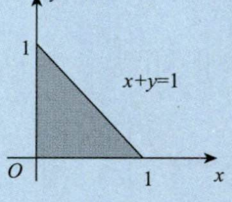


图 14-11

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\frac{1}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}d\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}\right)$$

$$=\frac{1}{2}e^{\frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}(e-1).$$

基础习题精练

习题

14.1 设 $I_1=\iint\limits_D \sin\left|\frac{x-y}{2}\right|dxdy$，$I_2=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2 dxdy$，$I_3=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3 dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|(x-1)^2+(y-1)^2\leqslant 2\}$，则（　　）.

(A) $I_1<I_2<I_3$　　(B) $I_2<I_3<I_1$　　(C) $I_3<I_1<I_2$　　(D) $I_3<I_2<I_1$

14.2 设函数 $f(t)$ 连续，区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leqslant 2y\}$，则 $\iint\limits_D f(xy)dxdy=$（　　）.

(A) $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(xy)dy$　　(B) $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)dx$

(C) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　　(D) $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

14.3 累次积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ 可以写成（　　）.

(A) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y-y^2}} f(x,y)dx$　　(B) $\int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(C) $\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy$　　(D) $\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{x-x^2}} f(x,y)dy$

14.4 $\int_{-1}^{1}dx\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\sin(x^2+y^2)dy=$（　　）.

(A) $\frac{\pi}{4}(\cos 2-1)$　　(B) $\frac{\pi}{4}(-\cos 2+1)$　　(C) $\frac{\pi}{4}(\cos 2+1)$　　(D) $\frac{\pi}{4}(-\cos 2-1)$

14.5 交换积分次序：$\int_0^{\frac{1}{4}}dy\int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)dx+\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{2}}dy\int_y^{\frac{1}{2}} f(x,y)dx=$______.

14.6 设$f(x)$为连续函数，$F(t)=\int_1^t \mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x$，则$F'(t)=$______.

14.7 设区域D是由曲线$y=\sin x$与直线$x=\pm\dfrac{\pi}{2}$，$y=1$围成的平面区域，则$\iint\limits_D (xy^5-1)\mathrm{d}\sigma=$______.

14.8 设区域$D=\left\{(x,\ y)\middle|\ x^2+y^2\leqslant 1,\ x\geqslant 0\right\}$，计算二重积分$I=\iint\limits_D \dfrac{1+xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

14.9 计算二重积分$\iint\limits_D \mathrm{e}^{\max\{x^2,\ y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D=\{(x,\ y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$.

14.10 计算二重积分$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos 2\theta}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中

$$D=\left\{(r,\ \theta)\middle|0\leqslant r\leqslant \sec\theta,\ 0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}.$$

14.11 计算二重积分$I=\iint\limits_D r^2\mathrm{e}^{-r^2\sin^2\theta}\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，其中$D=\left\{(r,\theta)\middle|r\geqslant 0,\dfrac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2}\right\}$.

14.12 (1) 设积分区域D能使二重积分$\iint\limits_D (1-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$的值达到最大，求出该积分区域$D$；

(2) 对 (1) 中的二重积分$\iint\limits_D (1-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma$，求出其最大值.

解答

14.1 (D) **解** 当$(x,\ y)\in D$时，$-2\leqslant x-y\leqslant 2,\ -1\leqslant\dfrac{x-y}{2}\leqslant 1$，则$0<\left|\dfrac{x-y}{2}\right|<1$，从而有

$$0<\left(\frac{x-y}{2}\right)^2=\left|\frac{x-y}{2}\right|^2<\left|\frac{x-y}{2}\right|<1,$$

所以
$$0<\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\iint\limits_D \sin\left|\frac{x-y}{2}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

又由轮换对称性知，

$$\begin{aligned}I_3&=\iint\limits_D \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3+\sin\left(\frac{y-x}{2}\right)^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\iint\limits_D\left[\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3-\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)^3\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=0.\end{aligned}$$

于是$I_3<I_2<I_1$.

14.2 (D) **解** 所给问题为直角坐标系下的二重积分，积分区域$D=\{(x, y)|\ x^2+y^2\leqslant 2y\}$在直角坐标系下可以表示为$x^2+(y-1)^2\leqslant 1$，即圆心在$(0, 1)$，半径为 1 的圆域 . 因此区域$D$可表示为

$$-1\leqslant x\leqslant 1,\ 1-\sqrt{1-x^2}\leqslant y\leqslant 1+\sqrt{1-x^2},$$

也可以表示为

$$0\leqslant y\leqslant 2,\ -\sqrt{2y-y^2}\leqslant x\leqslant \sqrt{2y-y^2}\ .$$

因此

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(xy)\mathrm{d}y,$$

可知 (A) 不正确 . 又

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(xy)\mathrm{d}x,$$

且题设中没有给出f为偶函数的条件，可知 (B) 也不正确 .

在极坐标系下，$x^2+y^2=2y$转化为$r=2\sin\theta$. 因此D可以表示为

$$0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant r\leqslant 2\sin\theta,$$

因此

$$\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} f(r^2\cos\theta\sin\theta)r\mathrm{d}r\ ,$$

可知 (C) 不正确，(D) 正确 . 故选 (D).

14.3 (D) **解** 积分区域$D=\left\{(r, \theta)\middle|0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{\pi}{2},\ 0\leqslant r\leqslant\cos\theta\right\}$，化为直角坐标，可表示为

$$D=\left\{(x, y)\middle|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant\sqrt{x-x^2}\right\}$$

$$=\left\{(x, y)\middle|0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-y^2}\right\}\ .$$

14.4 (B) **解** 先画出积分区域D，如图 14-12 所示，因积分区域D的边界曲线为$y=|x|$与$y=\sqrt{2-x^2}$，其交点为$(1, 1)$与$(-1, 1)$，故D可用极坐标表示为

$$D=\left\{(r, \theta)\middle|0\leqslant r\leqslant\sqrt{2},\ \frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{3\pi}{4}\right\},$$

则

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{\sqrt{2-x^2}}\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}} r\sin r^2\mathrm{d}r$$

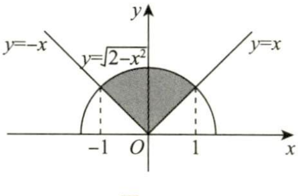


图 14-12

$$=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}(-\cos r^2)\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{\pi}{4}(-\cos 2+1).$$

14.5 $\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$ **解** 积分区域为 $D=\left\{(x,y)\middle|0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},\ x^2\leqslant y\leqslant x\right\}$，如图 14-13 所示，故应填

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

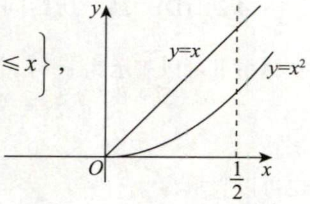


图 14-13

14.6 $(t-1)f(t)$ **解** 所给积分为二次变限积分，它是变量 t 的函数．故求 $F'(t)$ 需先将二次变限积分化为变限的单积分．为此考虑所给二次积分的特点，由于依给定的积分次序，不能化为变限单积分，因此先交换积分次序，可得

$$F(t)=\int_1^t\mathrm{d}y\int_y^t f(x)\mathrm{d}x=\int_1^t\mathrm{d}x\int_1^x f(x)\mathrm{d}y=\int_1^t(x-1)f(x)\mathrm{d}x,$$

于是 $F'(t)=(t-1)f(t)$．

14.7 $-\pi$ **解** 所给积分区域如图 14-14 所示．

记 $A\left(-\frac{\pi}{2},-1\right)$，$B\left(-\frac{\pi}{2},1\right)$，$C\left(\frac{\pi}{2},1\right)$．作辅助线 $y=-\sin x$，则曲线 BO 将区域 D 划分为 D_1，D_2 两个子区域，区域 D_1 关于 x 轴对称，区域 D_2 关于 y 轴对称．而 xy^5 既为 x 的奇函数，也为 y 的奇函数，从而 $\iint\limits_{D_1}xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint\limits_{D_2}xy^5\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，因此

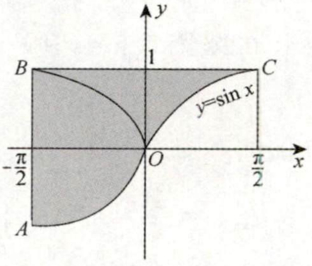


图 14-14

$$\text{原式}=-\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x\int_{\sin x}^{1}\mathrm{d}y$$

$$=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin x)\mathrm{d}x\overset{(*)}{=\!=}-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=-\pi.$$

【注】上述 (*) 处见第 9 讲“三、(2) 的注 (1)”．

14.8 **解** 因为 $I_1=\iint\limits_D\frac{1}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{1+r^2}r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2}\ln(1+r^2)\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\ln 2$，

$$I_2=\iint\limits_D\frac{xy}{1+x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^3\cos\theta\sin\theta}{1+r^2}\mathrm{d}r=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r^3}{1+r^2}\mathrm{d}r=0,$$

所以

$$I=I_1+I_2=\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

14.9 **解** 设 $D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant x\}$，$D_2=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,\ x\leqslant y\leqslant 1\}$，则

$$\iint\limits_D e^{\max\{x^2,\ y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} e^{\max\{x^2,\ y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} e^{\max\{x^2,\ y^2\}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_1} e^{x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2} e^{y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x e^{x^2}\mathrm{d}y+\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^y e^{y^2}\mathrm{d}x=\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x+\int_0^1 ye^{y^2}\mathrm{d}y=e-1 .$$

14.10 解 我们先画出积分区域D（见图 14-15），然后将积分化为直角坐标系下的二重积分，再去计算，即

$$I=\iint\limits_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\iint\limits_D y\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\sqrt{1-x^2+y^2}\,\mathrm{d}(1-x^2+y^2)=\frac{1}{3}\int_0^1(1-x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-(1-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x.$$

$r=\sec\theta$，即 $r=\dfrac{1}{\cos\theta}$，

也即 $r\cos\theta=1$，得 $x=1$.

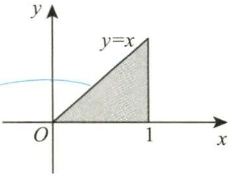


图 14-15

设$x=\sin t$，则$I=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 t\mathrm{d}t=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{\pi}{16}$.

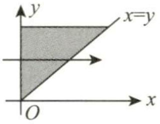


图 14-16

14.11 解 D的图形为图 14-16 中阴影部分 . 转换成直角坐标系进行计算 .

$$I=\iint\limits_D xe^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}e^{-y^2}\mathrm{d}y\int_0^y x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}y^2e^{-y^2}\mathrm{d}y\xlongequal{\text{由例 14.12}}\frac{\sqrt{\pi}}{8} .$$

14.12 解 (1) 由二重积分的性质可知，当积分区域D包含了所有使被积函数$1-2x^2-y^2$大于等于零的区域，而不包含使被积函数$1-2x^2-y^2$小于零的区域，即当D是椭圆$2x^2+y^2=1$所围的平面闭区域时，此二重积分的值达到最大 .

(2) 由 (1) 知$D=\left\{(x,\ y)\middle|2x^2+y^2\leqslant 1\right\}$，此时令$\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\end{cases}$则

$$\iint\limits_D(1-2x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2\cos^2\theta-r^2\sin^2\theta)\cdot\left\|\begin{matrix}\dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial\theta}\\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial\theta}\end{matrix}\right\|\mathrm{d}r$$

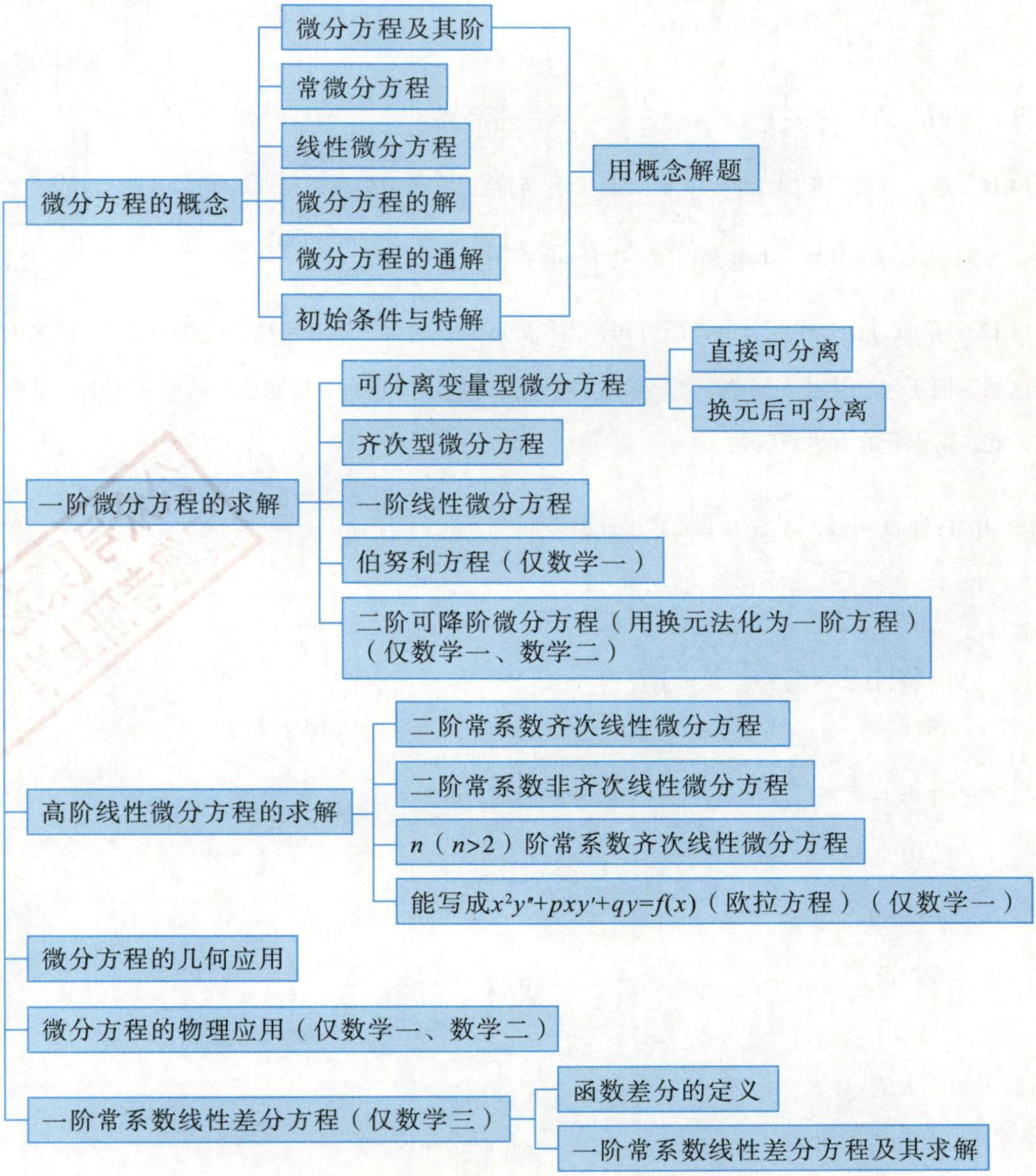
$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)\frac{1}{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r$$

$$=\sqrt{2}\pi\left(\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{\sqrt{2}\pi}{4} .$$

第15讲 微分方程

基础知识结构



- 微分方程的概念
  - 微分方程及其阶
  - 常微分方程
  - 线性微分方程
  - 微分方程的解
  - 微分方程的通解
  - 初始条件与特解
    - 用概念解题
- 一阶微分方程的求解
  - 可分离变量型微分方程
    - 直接可分离
    - 换元后可分离
  - 齐次型微分方程
  - 一阶线性微分方程
  - 伯努利方程（仅数学一）
  - 二阶可降阶微分方程（用换元法化为一阶方程）（仅数学一、数学二）
- 高阶线性微分方程的求解
  - 二阶常系数齐次线性微分方程
  - 二阶常系数非齐次线性微分方程
  - n（$n>2$）阶常系数齐次线性微分方程
  - 能写成$x^2y''+pxy'+qy=f(x)$（欧拉方程）（仅数学一）
- 微分方程的几何应用
- 微分方程的物理应用（仅数学一、数学二）
- 一阶常系数线性差分方程（仅数学三）
  - 函数差分的定义
  - 一阶常系数线性差分方程及其求解

基础内容精讲

一、微分方程的概念

满足两个条件：
①方程；
②含未知函数的导数(微分)

1. 微分方程及其阶

表示未知函数及其导数（或者微分）与自变量之间关系的方程称为**微分方程**，一般写成

$$F\left[x, y, y', \cdots, y^{(n)}\right]=0 \text{或} y^{(n)}=f\left[x, y, y', \cdots, y^{(n-1)}\right].$$

微分方程中未知函数的最高阶导数的阶数称为**微分方程的阶**．如 $y'''-y''+6y=0$ 就是三阶微分方程．

2. 常微分方程

未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**．如 $y'''-y''+6y=0$，$y\mathrm{d}x-\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}y=0$．

3. 线性微分方程

形如 $a_n(x)y^{(n)}+a_{n-1}(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_1(x)y'+a_0(x)y=f(x)$ 的微分方程称为 **n 阶线性微分方程**，其中 $a_k(x)(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是自变量 x 的函数，$a_n(x)\neq 0$．当 $a_k(x)(k=0, 1, 2, \cdots, n)$ 都是常数时，又称方程为 **n 阶常系数线性微分方程**．若右端函数 $f(x)$ 恒为零，则称方程为 **n 阶齐次线性微分方程**，否则称其为 **n 阶非齐次线性微分方程**．

4. 微分方程的解

若将函数代入微分方程，使方程成为恒等式，则该函数称为**微分方程的解**．微分方程解的图形称为积分曲线．

经任何恒等变形都不能使常数个数减少，如 $y=\mathrm{e}^x(C_1+C_2x)$，但 $y=C_1\sin x+C_2\cdot 2\sin x=(C_1+2C_2)\sin x=C\sin x$，这里的 C_1，C_2 就不独立．

5. 微分方程的通解

若微分方程的解中含有的独立常数的个数等于微分方程的阶数，则该解称为微分方程的**通解**．

此处的常数并非一定是任意常数，可能是在一定范围内取值的常数，如例15.4

6. 初始条件与特解

确定通解中常数的条件就是**初始条件**．如 $y(x_0)=a_0$，$y'(x_0)=a_1$，$\cdots$，$y^{(n-1)}(x_0)=a_{n-1}$，其中 a_0，a_1，$\cdots$，a_{n-1} 为 n 个给定的数．确定了通解中的常数后，解就成了**特解**．

例 15.1 设 $y=f(x)$ 是方程 $y''-2y'+4y=0$ 的一个解，若 $f(x_0)>0$，且 $f'(x_0)=0$，则函数 $f(x)$ 在点 x_0 处（　　）．

(A) 取得极大值　　(B) 取得极小值

(C) 某个邻域内单调增加　　(D) 某个邻域内单调减少

分析 乍一看题目，$y''-2y'+4y=0$ 是《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中要求的一个很

简单的微分方程，于是很多同学便先去求它的解，再去讨论问题．姑且不论这样做能否解决问题（事实上，由于初始条件不够，是解不出特解的），考场上时间有限，需要的是效率，是最好的解题方法．希望大家在平时的复习中，努力研究最“恰当”的方法，这种“恰当”也正是命题人想考查你的地方．

解 应选 (A).

由题设，有$f''(x_0)-2f'(x_0)+4f(x_0)=0$，结合$f(x_0)>0, f'(x_0)=0$，可得$f''(x_0)=-4f(x_0)<0$，又$f'(x_0)=0$，由判别极值的第二充分条件知，点$x=x_0$是$f(x)$的极大值点．答案选择 (A).

例 15.2 设$y=y(x)$是二阶常系数线性微分方程$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$满足初始条件$y(0)=y'(0)=0$的特解，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=$______.

解 应填 2.

不用求解微分方程，而是利用方程所反映出来的函数与各阶导数之间的关系来解题．

由$y''+py'+qy=\mathrm{e}^{3x}$得$y''(x)$连续，且$y''(0)=-py'(0)-qy(0)+\mathrm{e}^0=1$，故

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x^2)}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{y(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{y'(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{y''(x)}=\frac{2}{y''(0)}=2\ .$$

二、一阶微分方程的求解

1. 可分离变量型微分方程

(1) 直接可分离．

能写成$y'=f(x)g(y)$形式的方程称为**可分离变量型微分方程**．其解法为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x)g(y)\Rightarrow\int\frac{\mathrm{d}y}{g(y)}=\int f(x)\mathrm{d}x\ .$$

例 15.3 已知曲线$y=f(x)$过点$\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$，且其上任一点$(x, y)$处的切线斜率为$x\ln(1+x^2)$，则$f(x)=$______.

分析 本题考查根据实际问题建立微分方程的能力，关键是要知道导数的几何意义即为曲线在这一点处的切线的斜率．本讲中将经常出现由几何、物理、经济问题建立微分方程并求解的试题．

解 应填$\dfrac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]$．

由实际问题建立微分方程为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x\ln(1+x^2),\\ y\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{2},\end{cases}$$

这是一个可分离变量型微分方程求特解的问题，用分离变量法求解．由

$$\int \mathrm{d}y=\int x\ln(1+x^2)\mathrm{d}x,$$

得
$$y=\frac{1}{2}\int \ln(1+x^2)\mathrm{d}(1+x^2)=\frac{1}{2}\left[(1+x^2)\ln(1+x^2)-\int\frac{1+x^2}{1+x^2}\mathrm{d}(1+x^2)\right]$$
$$=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]+C\ .$$

代入初始条件$y|_{x=0}=-\frac{1}{2}$得$C=0$，故方程的特解为

$$y=\frac{1}{2}(1+x^2)[\ln(1+x^2)-1]\ .$$

例 15.4 微分方程$\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}$的解为______.

解 应填$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$，其中C为大于零的任意常数.

两边积分，得$\int\frac{y\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x$，则

$$\frac{1}{2}\ln(1+y^2)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\ln C_1,$$

即$\ln[(1+x^2)(1+y^2)]=\ln Cx^2$，故$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2$，其中$C$为大于零的任意常数.

> **【注】**由本题的通解表达式可知，通解中的常数是指在一定范围内任意取值的常数，而未必是在实数范围内任意取值的常数.

(2) 换元后可分离.

形如$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(ax+by+c)$的方程，其中常数$a,b$全都不为零.其解法为令$u=ax+by+c$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，代入原方程得$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=a+bf(u)$.

例 15.5 求微分方程$\mathrm{d}y=\sin(x+y+100)\mathrm{d}x$的通解.

解 ①方程可写成$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin(x+y+100)$，令$u=x+y+100$，则$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，于是原方程化为$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=1+\sin u$，就得到了可分离变量型微分方程.

②分离变量，得$\frac{\mathrm{d}u}{1+\sin u}=\mathrm{d}x$，恒等变形，有$\frac{(1-\sin u)\mathrm{d}u}{1-\sin^2 u}=\mathrm{d}x$，即$(\sec^2 u-\tan u\sec u)\mathrm{d}u=\mathrm{d}x$.

两边积分，得$\tan u-\sec u=x+C$.将$u=x+y+100$代入，得原方程的通解为

$$\tan(x+y+100)-\sec(x+y+100)=x+C,$$

其中C为任意常数.

【注】 事实上，在本题解析过程中的②处，分离变量得 $\dfrac{\mathrm{d}u}{1+\sin u}=\mathrm{d}x$ 时，默认了一件事情，那就是 $\sin u\neq -1$，回避了 $1+\sin u=0$ 的情况，从而丢掉了全部解中的部分解（可称为“奇解”）. 当 $\sin u=-1$ 时，得

$$x+y+100=2k\pi-\frac{\pi}{2},$$

其中 $k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 在《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中，只要求求通解，并不要求求出全部解 .

2. 齐次型微分方程

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 的方程叫作齐次型微分方程 . 其解法为令 $u=\dfrac{y}{x}$，则

$$y=ux\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=u+x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},$$

于是原方程变为 $x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=\varphi(u)$，即 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\varphi(u)-u}=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$.

例 15.6 设 L 是一条平面曲线，其上任意一点 $P(x,\ y)(x>0)$ 到坐标原点的距离恒等于该点处的切线在 y 轴上的截距，且 L 经过点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$. 求曲线 L 的方程 .

解 设曲线 L 过点 $P(x,\ y)$ 的切线方程为 $Y-y=y'(X-x)$. 令 $X=0$，得该切线在 y 轴上的截距为 $y-xy'$.

由题设知 $\sqrt{x^2+y^2}=y-xy'$，$\sqrt{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{y}{x}-y'$，令 $u=\dfrac{y}{x}$，则此方程可化为 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}}=-\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，解之得

$$y+\sqrt{x^2+y^2}=C\ .$$

由 L 经过点 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，知 $C=\dfrac{1}{2}$. 于是 L 的方程为 $y+\sqrt{x^2+y^2}=\dfrac{1}{2}$，即 $y=\dfrac{1}{4}-x^2(x>0)$.

3. 一阶线性微分方程

形如 $y'+p(x)y=q(x)$ 的方程叫作一阶线性微分方程，其中 $p(x),\ q(x)$ 为已知的连续函数，其通解公式为

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right].$$

请大家一定要掌握该公式的推导过程，这是一个很好的锻炼机会，不要错过 .

【注】(1) 推导通解公式.

在方程两边同时乘以$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}$，得

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y'+\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}p(x)\cdot y=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x),$$

于是

$$\left[\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y\right]'=\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x),$$

两边积分，得

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot y=\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C,$$

则

$$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right].$$

(2) 在一阶线性微分方程的通解公式$y=\mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}\left[\int \mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]$中，若

$$\int p(x)\mathrm{d}x=\ln|\varphi(x)|,$$

则

$$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}=|\varphi(x)|=\pm\varphi(x),\ \mathrm{e}^{-\int p(x)\mathrm{d}x}=\pm\frac{1}{\varphi(x)},$$

代入上述通解公式，有

$$\begin{aligned}y&=\pm\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int \pm\varphi(x)\cdot q(x)\mathrm{d}x+C\right]\\&=\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int \varphi(x)\cdot q(x)\mathrm{d}x\pm C\right]\\&\underline{\underline{\text{令}\pm C=D}}\frac{1}{\varphi(x)}\left[\int \varphi(x)\cdot q(x)\mathrm{d}x+D\right],\end{aligned}$$

其中D依然为任意常数，故$\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}=|\varphi(x)|$可不加绝对值.

在其他计算过程中，若出现$\ln u$，且u不知正负，一律加绝对值.

(3) 由于$\int p(x)\mathrm{d}x$与$\int q(x)\mathrm{e}^{\int p(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$均应理解为某一不含任意常数的原函数，故公式法亦可写成$y=\mathrm{e}^{-\int_{x_0}^{x}p(t)\mathrm{d}t}\left[\int_{x_0}^{x}q(t)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{t}p(s)\mathrm{d}s}\mathrm{d}t+C\right]$，这里的$x_0$在题设未提出定值要求时，可按方便解题的原则来取.此写法在研究解的性质时颇为有用.

例 15.7　设$y=y(x)$是微分方程$y'+y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$满足$y(0)=0$的特解.

(1) 求$y(x)$；

(2) 求曲线$y(x)$与x轴在$[0,+\infty)$上所围图形的面积.

解　(1) 根据一阶非齐次线性微分方程的通解公式，得

$$y(x)=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{d}x}\left(\int \mathrm{e}^{-x}\cos x\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}\left(\int \cos x\mathrm{d}x+C\right)$$

$$=\mathrm{e}^{-x}(\sin x+C).$$

由 $y(0)=0$，得 $C=0$，所以 $y=\mathrm{e}^{-x}\sin x$.

(2) 由例 10.4，可知所求面积为 $\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}+1}{2(1-\mathrm{e}^{-\pi})}$.

例 15.8 微分方程 $y\mathrm{d}x+(x-3y^2)\mathrm{d}y=0$ 满足条件 $y\big|_{x=1}=1$ 的解为 $y=$______.

解 应填 $\sqrt{x}$.

将微分方程变形为 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}+\dfrac{x}{y}=3y$，这是 x 关于 y 的一阶线性微分方程，其通解为

$$x=\boxed{\mathrm{e}^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}}\left(\int 3y\mathrm{e}^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right)=\frac{1}{y}\left(\int 3y^2\mathrm{d}y+C\right)=y^2+\frac{C}{y}.$$

$=\mathrm{e}^{-\ln y}=\dfrac{1}{y}$，此处 $\ln y$ 未写成 $\ln|y|$，理由见"二、3."的注(2).

将 $y\big|_{x=1}=1$ 代入上式，得 $C=0$，于是 $x=y^2$，即 $y=\pm\sqrt{x}$. 注意到 $y\big|_{x=1}=1$，故将 $y=-\sqrt{x}$ 舍去，得

$$y=\sqrt{x}.$$

例 15.9 设函数 $y=\varphi(x)$ 是微分方程 $y'+\mathrm{e}y=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ 的一个解，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=$ (　　).

(A) e　　(B) e^2　　(C) $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$　　(D) $\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$

解 应选 (D).

$y'+\mathrm{e}y=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$ 为一阶线性微分方程，其通解为

$$y=\mathrm{e}^{-\int \mathrm{e}\mathrm{d}x}\left[\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot \mathrm{e}^{\int \mathrm{e}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}x}\left[\int\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{e}x}\left[\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t+C\right]=\frac{\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t+C}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}},$$

其中 x_0 为任意正实数，则 $\lim\limits_{x\to+\infty}y=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_{x_0}^{x}\left(1-\frac{1}{t}\right)^t\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}t}\mathrm{d}t+C}{\mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(1-\frac{1}{x}\right)^x\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}{\mathrm{e}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{e}x}}=\dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$.

故 $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$，选 (D).

例 15.10 设 $a>0$，函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内连续有界 . 证明：微分方程 $y'+ay=f(x)$ 的解在 $[0,+\infty)$

内有界．

证明　$y=\mathrm{e}^{-\int a\mathrm{d}x}\left[\int f(x)\cdot\mathrm{e}^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-ax}\left[\int f(x)\cdot\mathrm{e}^{\int a\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]=\mathrm{e}^{-ax}\left[\int_0^x f(t)\mathrm{e}^{at}\mathrm{d}t+C\right]$，

由例 8.14 知 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内有界．

4. 伯努利方程（仅数学一）

形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)y^n(n\neq 0,1)$$

的方程叫作伯努利方程，其中 $p(x)$，$q(x)$ 为已知的连续函数．其解法为

①先变形为 $y^{-n}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y^{1-n}=q(x)$；

②令 $z=y^{1-n}$，得 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-n)y^{-n}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，则 $\frac{1}{1-n}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+p(x)z=q(x)$；

③解此一阶线性微分方程即可．

例 15.11　求 $y\mathrm{d}x=(1+x\ln y)x\mathrm{d}y(y>0)$ 的通解．

解　方程变形为 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}-\frac{1}{y}x=\frac{\ln y}{y}x^2$，这是以 y 为自变量，x 为未知函数的伯努利方程（如果以 x 为自变量，y 为未知函数来解方程，是极其困难的，所以当我们遇到困难时，要学会“换位思考”——x 与 y 谁作为自变量，谁作为未知函数是可以互换的）．

①两边同时除以 x^2，并令 $z=x^{-1}$，有 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，于是方程化为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}+\frac{1}{y}z=-\frac{\ln y}{y}$．

②应用一阶线性微分方程的通解公式，得

$$\frac{1}{x}=z=\mathrm{e}^{-\ln y}\left[\int\left(-\frac{\ln y}{y}\mathrm{e}^{\ln y}\right)\mathrm{d}y+C\right]=\frac{1}{y}[y(1-\ln y)+C],$$

故通解为 $\frac{1}{x}=1-\ln y+\frac{C}{y}(y>0,C$ 为任意常数）．

5. 二阶可降阶微分方程（用换元法化为一阶方程）（仅数学一、数学二）

(1) $y''=f(x,y')$ 型（方程中不显含未知函数 y）．

$p=p(x)$　　　　　　　　　　赶尽杀绝y

①令 $y'=p$，$y''=p'$，则原方程变为一阶方程 $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(x,p)$；

②若求得其通解为 $p=\varphi(x,C_1)$，即 $y'=\varphi(x,C_1)$，则原方程的通解为 $y=\int\varphi(x,C_1)\mathrm{d}x+C_2$．

(2) $y''=f(y,y')$ 型（方程中不显含自变量 x）．

$p=p(y)$　　　　　　　　新草除根x

①令$y'=p$，$\underline{y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p}$，则原方程变为一阶方程$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$；

若$y'=p$，$y''=p'$，则$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=f(y,p)$，会增加方程的复杂性.

②若求得其通解为$p=\varphi(y,C_1)$，则由$p=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$可得$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\varphi(y,C_1)$，分离变量得$\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=\mathrm{d}x$；

③两边积分得$\int\frac{\mathrm{d}y}{\varphi(y,C_1)}=x+C_2$，即可求得原方程的通解.

(3) $y''=f(y')$型.

此类型既不显含y，又不显含x，按 (1) 的办法，即不显含y来处理.

例 15.12　求微分方程$y''=y'[1+(y')^2]$满足$y(0)=0$，$y'(0)=1$的特解.

解　令$y'=p$，则$y''=p'$，代入题干微分方程得

$$p'=p(1+p^2),$$

分离变量得

$$\frac{\mathrm{d}p}{p(1+p^2)}=\mathrm{d}x,$$

两边积分得

$$\ln\frac{p^2}{1+p^2}=2x+\ln C_1(C_1>0).$$

由题意有$y'(0)=1$，即当$x=0$时$p=1$，代入上式得$C_1=\frac{1}{2}$，于是有

$$y'=p=\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}}},$$

两边积分得

$$y=\int\frac{\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}\right)^2}}\mathrm{d}x=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}+C_2.$$

由题意有$y(0)=0$，代入上式得$C_2=-\frac{\pi}{4}$，所以$y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$.

例 15.13　求微分方程$yy''-\frac{2}{3}(y')^2=0$满足$y(0)=0$的解.

解　令$y'=p$，则$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p$，于是$y\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\cdot p-\frac{2}{3}p^2=0$，分离变量，得$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\frac{2}{3}\frac{\mathrm{d}y}{y}$，两边积分得

$$\ln|p|=\frac{2}{3}\ln|y|+\ln C_0,$$

即

$$|p|=C_0|y|^{\frac{2}{3}},$$

$$p=\pm C_0y^{\frac{2}{3}}=C_1y^{\frac{2}{3}},$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{y^{\frac{2}{3}}}=C_1\mathrm{d}x$，两边积分，得 $3y^{\frac{1}{3}}=C_1x+C_2$.

由 $y(0)=0$，得 $C_2=0$，故 $y=C_3x^3$.

又 $C_3=0$ 时，$y\equiv0$，满足题意，故 $y=Cx^3$，其中 C 为任意常数 .

三、高阶线性微分方程的求解

1. 二阶常系数齐次线性微分方程

(1) 概念 .

方程 $y''+py'+qy=0$ 称为二阶常系数齐次线性微分方程，其中 p, q 为常数 .

(2) 解的结构 .

若 $y_1(x), y_2(x)$ 是 $y''+py'+qy=0$ 的两个解，且 $\frac{y_1(x)}{y_2(x)}\neq C$（常数），则称 $y_1(x), y_2(x)$ 是该方程的两个**线性无关的解**，且 $y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$ 是方程 $y''+py'+qy=0$ 的通解 .

(3) 通解 .

对于 $y''+py'+qy=0$，其对应的特征方程为 $r^2+pr+q=0$.

①若 $p^2-4q>0$，设 r_1, r_2 是特征方程的两个不等实根，即 $r_1\neq r_2$，可得其通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{r_1x}+C_2\mathrm{e}^{r_2x}.$$

②若 $p^2-4q=0$，设 r_1,r_2 是特征方程的两个相等的实根，即二重根，令 $r_1=r_2=r$，可得其通解为

$$y=(C_1+C_2x)\mathrm{e}^{rx}.$$

③若 $p^2-4q<0$，设 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 是特征方程的一对共轭复根，可得其通解为

$$y=\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x).$$

例 15.14 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y''+y'-2y=0$ 的解，且在 $x=0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3，则 $y(x)=$ ______.

解 应填 $\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}$.

这是二阶常系数齐次线性微分方程，其特征方程为

$$r^2+r-2=0,$$

可知特征根为$r_1=-2, r_2=1$，故通解为$y(x)=C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x}$．

由于在$x=0$处$y(x)$取得极值3，可知$y(0)=C_1+C_2=3$，且

$$y'(x)=-2C_1\mathrm{e}^{-2x}+C_2\mathrm{e}^{x},\ y'(0)=-2C_1+C_2=0,$$

因此$C_1=1, C_2=2$．故$y(x)=\mathrm{e}^{-2x}+2\mathrm{e}^{x}$．

例 15.15 设函数$y=f(x)$满足微分方程$y''+2y'+5y=0$，且$f(0)=1, f'(0)=-1$，则$f(x)=$______.

解 应填$\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$．

$$r_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times5}}{2}=-1\pm2\mathrm{i}$$

特征方程为$r^2+2r+5=0$，$\underline{r_{1,2}=-1\pm2\mathrm{i}}$，故通解为

$$y=C_1\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+C_2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x,$$

由$f(0)=1, f'(0)=-1$，得$C_1=1, C_2=0$，即$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$．

2. 二阶常系数非齐次线性微分方程

(1) 概念．

方程$y''+py'+qy=f(x)(f(x)\neq0)$称为二阶常系数非齐次线性微分方程，其中$p, q$为常数，$f(x)$为已知的连续函数，叫作自由项．

(2) 解的结构．

①若$y_1^*(x)$是$y''+py'+qy=f_1(x)$的解，$y_2^*(x)$是$y''+py'+qy=f_2(x)$的解，则$y_1^*(x)+y_2^*(x)$是$y''+py'+qy=f_1(x)+f_2(x)$的解．

②设y_1^*, y_2^*都是$y''+py'+qy=f(x)$的特解，则$y_1^*-y_2^*$是对应齐次方程的解．

(3) 特解的设定．

对于$y''+py'+qy=f(x)$，《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》规定我们需要会求以下两种情况下的特解．

设$P_n(x), P_m(x)$分别为x的n次、m次多项式．

①当自由项$f(x)=P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$时，特解要设为$y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}Q_n(x)x^k$，其中

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha x}\text{照抄},\\ Q_n(x)\text{为}x\text{的}n\text{次多项式},\\ k=\begin{cases}0, & \alpha\text{不是特征根},\\ 1, & \alpha\text{是单特征根},\\ 2, & \alpha\text{是二重特征根}.\end{cases}\end{cases}$$

【注】 $y''+py'+qy=P_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}$.

设 $y^*=Q_n(x)\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot x^k$，

自由项中的 α

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha x}\text{照抄}, \\ P_n(x)\text{写成}Q_n(x)\text{，为}x\text{的}n\text{次多项式}, \\ \boxed{\text{一看}}, \boxed{\text{二算}}, \boxed{\text{三比较}}, \quad r_{1,2} \\ k=\begin{cases}0, \alpha\neq r_{1,2}, \\ 1, \alpha=r_1\text{或}\alpha=r_2(r_1\neq r_2), \\ 2, \alpha=r_1=r_2.\end{cases}\end{cases}$$

$y''-2y'+5y=\underline{1}\cdot\underline{\mathrm{e}^x}$.

设 $y^*=\underline{a}\underline{\mathrm{e}^x}\cdot x^{\textcircled{0}}$

$$\begin{cases}\alpha=1 \\ r_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i} \\ \alpha\neq r_{1,2}\end{cases}$$

$=a\mathrm{e}^x$，

代回方程 $\Rightarrow a\mathrm{e}^x-2a\mathrm{e}^x+5a\mathrm{e}^x=\mathrm{e}^x\Rightarrow 4a=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$,

则 $y^*=\dfrac{1}{4}\mathrm{e}^x$，故通解为

$$y=\mathrm{e}^x(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+\frac{1}{4}\mathrm{e}^x$$

（C_1，C_2 为任意常数）.

②当自由项 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\left[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x\right]$ 时，特解要设为

$$y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k,$$

其中 $\begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l=\max\{m,n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x)\text{分别为}x\text{的两个不同的}l\text{次多项式}, \\ k=\begin{cases}0, & \alpha\pm\beta\mathrm{i}\text{不是特征根}, \\ 1, & \alpha\pm\beta\mathrm{i}\text{是特征根}.\end{cases}\end{cases}$

【注1】 $y''+py'+qy=\mathrm{e}^{\alpha x}[P_m(x)\cos\beta x+P_n(x)\sin\beta x]$.

设 $y^*=\mathrm{e}^{\alpha x}[Q_l^{(1)}(x)\cos\beta x+Q_l^{(2)}(x)\sin\beta x]x^k$，

自由项中的 α，β

$$\begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha x}\text{照抄}, \\ l=\max\{m,n\}, Q_l^{(1)}(x), Q_l^{(2)}(x)\text{分别为}x\text{的} \\ \text{两个不同的}l\text{次多项式}, \\ \boxed{\text{一看}}, \boxed{\text{二算}}, \boxed{\text{三比较}}, \quad r_{1,2} \\ k=\begin{cases}0, \alpha\pm\beta\mathrm{i}\neq r_{1,2}, \\ 1, \alpha\pm\beta\mathrm{i}=r_{1,2}.\end{cases}\end{cases}$$

$y''-2y'+5y=\underline{-\mathrm{e}^x\cos 2x}$.

$=\underline{\mathrm{e}^{1\cdot x}}[\underline{(-1)}\cos 2x+\underline{0}\sin 2x]$

设 $y^*=\underline{\mathrm{e}^x}(\underline{A}\cos 2x+\underline{B}\sin 2x)x^{\textcircled{1}}$.

一看：$\alpha\pm\beta\mathrm{i}=1\pm 2\mathrm{i}$

二算：$r_{1,2}=1\pm 2\mathrm{i}$

由英国物理学家海威塞德在19世纪末提出，“D”由他引入，使微分方程变为形式上的代数方程. 许多数学家批评此方法不全面，不严谨. 这让我又想起另一位物理学家，诺贝尔物理学奖得主费曼，他经常在积分号中求导，也被数学家批评不严谨甚至错误，但很多棘手的积分（甚至著名的积分，如Γ函数）在他“荒唐”的方法下，却可轻易得到正确结果，这在第9讲已经讲过了.

【注2】 特解还可用微分算子法来求解.

约定：$\mathrm{D}=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，$\mathrm{D}y=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$\mathrm{D}^2=\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}$，$\mathrm{D}^2y=\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$，于是微分方程 $y''+py'+qy=f(x)$ 即可写成 $(\mathrm{D}^2+p\mathrm{D}+q)y=f(x)$，进一步记 $\mathrm{D}^2+p\mathrm{D}+q=F(\mathrm{D})$，称为算子多项式，它满足普通多项式的运算规则，如因式分解等，则上述微分方程即可写成 $F(\mathrm{D})y=f(x)$，此时它的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}f(x).$$

在约定“D”表示求导的条件下，约定“$\frac{1}{\mathrm{D}}$”表示积分，如 $\mathrm{D}\sin x=\cos x$，$\frac{1}{\mathrm{D}}\sin x=-\cos x$（取 $C=0$）.

①$\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\alpha x}$ 型.

若 $F(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}\neq 0$，有 $y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}}\mathrm{e}^{\alpha x}$.

若 $F(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}=0$，而 $F'(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}\neq 0$，有 $y^*=x\frac{1}{F'(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}}\mathrm{e}^{\alpha x}$.

若 $F(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}=0, F'(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}=0$，而 $F''(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}\neq 0$，有

$$y^*=x^2\frac{1}{F''(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}=\alpha}}\mathrm{e}^{\alpha x}.$$

注例 1 已知 $y''+y'-2y=2$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2}2\mathrm{e}^{0x}$，由 $(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2)\big|_{\mathrm{D}=0}\neq 0$，得

$$y^*=\frac{1}{(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2)\big|_{\mathrm{D}=0}}2\mathrm{e}^{0x}=\frac{1}{-2}\cdot 2=-1.$$

注例 2 已知 $y''+y'-2y=\mathrm{e}^x$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2}\mathrm{e}^x$，由 $(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2)\big|_{\mathrm{D}=1}=0, (\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2)'\big|_{\mathrm{D}=1}\neq 0$，得

$$y^*=x\frac{1}{(\mathrm{D}^2+\mathrm{D}-2)'\big|_{\mathrm{D}=1}}\mathrm{e}^x=x\cdot\frac{1}{3}\mathrm{e}^x=\frac{1}{3}x\mathrm{e}^x.$$

注例 3 已知 $y''-2y'+y=\mathrm{e}^x$，求 y^*.

解 $y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1}\mathrm{e}^x$，由

$$(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1)\big|_{\mathrm{D}=1}=0, (\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1)'\big|_{\mathrm{D}=1}=0, (\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1)''\big|_{\mathrm{D}=1}\neq 0,$$

得
$$y^*=x^2\frac{1}{(\mathrm{D}^2-2\mathrm{D}+1)''\big|_{\mathrm{D}=1}}\mathrm{e}^x=x^2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^x=\frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^x.$$

②a. $\frac{1}{\mathrm{D}^2+q}\cos\beta x$ 或 $\frac{1}{\mathrm{D}^2+q}\sin\beta x$ 型.

若$(\mathrm{D}^2+q)\big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}\neq 0$，有$y^*=\dfrac{1}{(\mathrm{D}^2+q)\big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}}\cos\beta x$，$y^*=\dfrac{1}{(\mathrm{D}^2+q)\big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}}\sin\beta x$.

若$(\mathrm{D}^2+q)\big|_{\mathrm{D}=\beta\mathrm{i}}=0$，有$y^*=x\dfrac{1}{(\mathrm{D}^2+q)'}\cos\beta x$，$y^*=x\dfrac{1}{(\mathrm{D}^2+q)'}\sin\beta x$.

b. $\dfrac{1}{F(\mathrm{D})}\cos\beta x$或$\dfrac{1}{F(\mathrm{D})}\sin\beta x$型 .

若$F(\mathrm{D})=\mathrm{D}^2+p\mathrm{D}+q$，则取

$$F(\mathrm{D})\big|_{\mathrm{D}^2=(\beta\mathrm{i})^2}=p\mathrm{D}+q-\beta^2\ ,$$

$$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}\bigg|_{\mathrm{D}^2=(\beta\mathrm{i})^2}\cos\beta x=\frac{p\mathrm{D}-(q-\beta^2)}{p^2\mathrm{D}^2-(q-\beta^2)^2}\bigg|_{\mathrm{D}^2=(\beta\mathrm{i})^2}\cos\beta x=\frac{p\mathrm{D}-(q-\beta^2)}{-p^2\beta^2-(q-\beta^2)^2}\cos\beta x\ .$$

$\dfrac{1}{F(\mathrm{D})}\sin\beta x$同理 .

注例 4 已知$y''-y=\sin x$，求y^* .

解 $y^*=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2-1}\sin x$，由$(\mathrm{D}^2-1)\big|_{\mathrm{D}=\mathrm{i}}\neq 0$，得

$$y^*=\frac{1}{(\mathrm{D}^2-1)\big|_{\mathrm{D}=\mathrm{i}}}\sin x=-\frac{1}{2}\sin x\ .$$

注例 5 已知$y''+4y=\sin 2x$，求y^* .

解 $y^*=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2+4}\sin 2x$，由$(\mathrm{D}^2+4)\big|_{\mathrm{D}=2\mathrm{i}}=0$，得

$$y^*=x\frac{1}{(\mathrm{D}^2+4)'}\sin 2x=x\frac{1}{2\mathrm{D}}\sin 2x=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{\mathrm{D}}\sin 2x=-\frac{1}{4}x\cos 2x\ .$$

注例 6 已知$y''-3y'+2y=-\dfrac{1}{2}\cos 2x$，求$y^*$.

解 $y^*=\dfrac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\left(-\dfrac{1}{2}\cos 2x\right)$，此为$\dfrac{1}{F(\mathrm{D})}\cos\beta x$型，于是

$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\frac{1}{-4-3\mathrm{D}+2}\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3\mathrm{D}+2}\cos 2x\\&=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{D}-2}{9\mathrm{D}^2-4}\cos 2x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3\mathrm{D}-2}{-40}\cos 2x=-\frac{1}{80}(3\mathrm{D}-2)\cos 2x\\&=-\frac{1}{80}(3\mathrm{D}\cos 2x-2\cos 2x)=-\frac{1}{80}(-6\sin 2x-2\cos 2x)\\&=\frac{1}{40}(3\sin 2x+\cos 2x)\ .\end{aligned}$$

③ $\dfrac{1}{F(\mathrm{D})}(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)$型 .

$$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)=Q_k(\mathrm{D})(x^k+a_1x^{k-1}+\cdots+a_{k-1}x+a_k)\ .$$

常借助$\frac{1}{1-x}$的k次泰勒多项式$1+x+x^2+\cdots+x^k$

这里$Q_k(\mathrm{D})$是将$\frac{1}{F(\mathrm{D})}$展开为k次泰勒多项式，即$b_0+b_1\mathrm{D}+b_2\mathrm{D}^2+\cdots+b_k\mathrm{D}^k$，得$Q_k(\mathrm{D})$.

注例 7 已知$y''+y'=x^2+1$，求y^*.

解
$$y^*=\frac{1}{\mathrm{D}^2+\mathrm{D}}(x^2+1)=\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot\frac{1}{1+\mathrm{D}}(x^2+1)\ .$$

下面将$\frac{1}{1+\mathrm{D}}$作D的2次展开：

$$\frac{1}{1+\mathrm{D}}=1-\mathrm{D}+\mathrm{D}^2+\cdots,$$

于是

$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot(1-\mathrm{D}+\mathrm{D}^2)(x^2+1)=\left(\frac{1}{\mathrm{D}}-1+\mathrm{D}\right)(x^2+1)\\&=\frac{1}{\mathrm{D}}(x^2+1)-(x^2+1)+\mathrm{D}(x^2+1)\\&=\frac{1}{3}x^3+x-x^2-1+2x=\frac{1}{3}x^3-x^2+3x-1\ .\end{aligned}$$

④$\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\alpha x}v(x)$型.

$y^*=\frac{1}{F(\mathrm{D})}\mathrm{e}^{\alpha x}v(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}\cdot\frac{1}{F(\mathrm{D}+\alpha)}v(x)$，这里$v(x)$是实函数.

注例 8 已知$y''+4y'+5y=\mathrm{e}^{-2x}\sin x$，求$y^*$.

解
$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}^2+4\mathrm{D}+5}\mathrm{e}^{-2x}\sin x=\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{(\mathrm{D}-2)^2+4(\mathrm{D}-2)+5}\sin x\\&=\mathrm{e}^{-2x}\cdot\frac{1}{\mathrm{D}^2+1}\sin x=\mathrm{e}^{-2x}\cdot x\frac{1}{(\mathrm{D}^2+1)'}\sin x\\&=\mathrm{e}^{-2x}\cdot x\frac{1}{2\mathrm{D}}\sin x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\cdot x(-\cos x)=-\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\cos x\ .\end{aligned}$$

注例 9 已知$y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$，求$y^*$.

解
$$\begin{aligned}y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}2x\mathrm{e}^x=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{(\mathrm{D}+1)^2-3(\mathrm{D}+1)+2}x=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{D}^2-\mathrm{D}}x\\&=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot\frac{1}{\mathrm{D}-1}x=2\mathrm{e}^x\cdot\frac{1}{\mathrm{D}}\cdot(-1-\mathrm{D})x=2\mathrm{e}^x\cdot\left(-\frac{1}{\mathrm{D}}-1\right)x\end{aligned}$$

$$=2\mathrm{e}^{x}\cdot\left(-\frac{1}{2}x^{2}-x\right)=-x(x+2)\mathrm{e}^{x}\ .$$

(4) 通解．

若$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$是$y''+py'+qy=0$的通解，$y^*(x)$是

$$y''+py'+qy=f(x)$$

的一个特解，则$y(x)+y^*(x)$是$y''+py'+qy=f(x)$的通解．

例 15.16　求$y''-3y'+2y=2\mathrm{e}^{-x}\cos x$的通解．

解　特征方程为$r^2-3r+2=0$，其解为$r_1=2,\ r_2=1$，因此对应的齐次微分方程的通解是

$$\overline{y}=C_1\mathrm{e}^{x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

下面用两种方法求特解．

方法一　方程的一个特解可设为$y^*=\mathrm{e}^{-x}(A\cos x+B\sin x)$，求得

$$y^{*\prime}=\mathrm{e}^{-x}[(B-A)\cos x-(A+B)\sin x],$$

$$y^{*\prime\prime}=\mathrm{e}^{-x}(-2B\cos x+2A\sin x),$$

代入方程解得$A=\frac{1}{5}$，$B=-\frac{1}{5}$，即$y^*=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{5}(\cos x-\sin x)$．

方法二　微分算子法．

$$\begin{aligned}
y^*&=\frac{1}{\mathrm{D}^2-3\mathrm{D}+2}2\mathrm{e}^{-x}\cos x\\
&=2\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{(\mathrm{D}-1)^2-3(\mathrm{D}-1)+2}\cos x\\
&=2\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{\mathrm{D}^2-5\mathrm{D}+6}\cos x\\
&=2\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{-5\mathrm{D}+5}\cos x\\
&=-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}\frac{1}{\mathrm{D}-1}\cos x\\
&=-\frac{2}{5}\mathrm{e}^{-x}\frac{\mathrm{D}+1}{\mathrm{D}^2-1}\cos x\\
&=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(\mathrm{D}+1)\cos x\\
&=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(-\sin x+\cos x)\ .
\end{aligned}$$

从而原方程的通解为

$$y=\overline{y}+y^*=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{5}\mathrm{e}^{-x}(\cos x-\sin x),$$

$\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$ 不是对应齐次方程的解的结构，故只能是 $\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x$ 是对应齐次方程的解的结构.

其中 C_1, C_2 为任意常数 .

$=\underline{\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x}+x\mathrm{e}^x$

例 15.17 设二阶常系数线性微分方程 $y''+\alpha y'+\beta y=\gamma \mathrm{e}^x$ 的一个特解为 $y^*=\mathrm{e}^{2x}+(1+x)\mathrm{e}^x$. 确定常数 α, β, γ，并求该方程的通解 .

解 由 $f(x)=\gamma \mathrm{e}^x$ 可知 $\mathrm{e}^{ax}(a\neq 1)$ 不可能是非齐次方程的特解，故 e^{2x} 不可能是非齐次方程的特解，又因为 $y=\mathrm{e}^{2x}+\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x$ 是非齐次方程的解，所以 e^{2x} 必是对应齐次方程的解，故微分方程有一个特征根 $r_1=2$.

若 e^x 是非齐次方程的解，则 $x\mathrm{e}^x$ 就是齐次方程的解，此时 $r_1=r_2=1$ ，与上述 $r_1=2$ 矛盾，于是 e^x 也必是齐次方程的解，此时 $r_2=1$. 所以特征方程为 $(r-1)(r-2)=0$ ，即

$$r^2-3r+2=0,$$

于是 $\alpha=-3, \beta=2$.

为确定 γ，只需将特解 $y^*=x\mathrm{e}^x$ 代入方程，得

$$(x+2)\mathrm{e}^x-3(x+1)\mathrm{e}^x+2x\mathrm{e}^x=\gamma \mathrm{e}^x,$$

解得 $\gamma=-1$.

原方程的通解为 $y=C_1\mathrm{e}^x+C_2\mathrm{e}^{2x}+x\mathrm{e}^x$ ，其中 C_1, C_2 为任意常数 .

3. $n\ (n>2)$ 阶常系数齐次线性微分方程

①若 r 为单实根，写 $C\mathrm{e}^{rx}$;

②若 r 为 k 重实根，写

$$(C_1+C_2x+C_3x^2+\cdots+C_kx^{k-1})\mathrm{e}^{rx};$$

③若 r 为单复根 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ ，写

$$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x);$$

④若 r 为二重复根 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ ，写

$$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x+C_3x\cos\beta x+C_4x\sin\beta x).$$

这是反求方程的理论基础

【注】(1) 如果解中含特解 e^{rx} ，则 r 至少为单实根;

(2) 如果解中含特解 $x^{k-1}\mathrm{e}^{rx}$ ，则 r 至少为 k 重实根;

(3) 如果解中含特解 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ ，则 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 至少为单复根;

(4) 如果解中含特解 $\mathrm{e}^{\alpha x}x\cos\beta x$ 或 $\mathrm{e}^{\alpha x}x\sin\beta x$ ，则 $\alpha\pm\beta\mathrm{i}$ 至少为二重复根 .

例 15.18 已知某四阶常系数齐次线性微分方程有特解 $y_1(x)=\mathrm{e}^x\cos 2x$，$y_2(x)=x$，且方程中 $y^{(4)}$ 前的系数为 1，该方程为______.

解 应填 $y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0$.

该方程有解 $y_1(x)=\mathrm{e}^x\cos 2x$，必有另一解 $y_3(x)=\mathrm{e}^x\sin 2x$，可知对应的特征根为 $1\pm 2\mathrm{i}$；该方程有解 $y_2(x)=x$，必有另一解 $y_4(x)=C$（C 为常数），可知 $r=0$ 为二重根 . 由以上分析可知，原微分方程的特征方程有 4 个特征根：$1\pm 2\mathrm{i}$，0（二重），故特征方程为

$$[r-(1+2\mathrm{i})][r-(1-2\mathrm{i})]r^2=0,$$

即

$$r^4-2r^3+5r^2=0,$$

所以满足条件的微分方程为

$$y^{(4)}-2y^{(3)}+5y''=0 .$$

4. 能写成 $x^2y''+pxy'+qy=f(x)$（欧拉方程）(仅数学一)

形如 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+px\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+qy=f(x)$ 的方程称为**欧拉方程**，其中 p 与 q 为常数，$f(x)$ 为已知的连续函数 . 欧拉方程有固定的解法 .

①当 $x>0$ 时，令 $x=\mathrm{e}^t$，则 $t=\ln x$，$\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{x}$，于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2},$$

方程化为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+(p-1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+qy=f(\mathrm{e}^t),$$

即可求解（最后结果别忘了用 $t=\ln x$ 回代成 x 的函数）.

②当 $x<0$ 时，令 $x=-\mathrm{e}^t$，同理可得 .

例 15.19 欧拉方程 $x^2\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+4x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0(x>0)$ 的通解为______.

解 应填 $y=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$，$C_1$，$C_2$ 为任意常数 .

由题设，$x>0$，令 $x=\mathrm{e}^t$，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x^2}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right),$$

代入原方程，得

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}+3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+2y=0,$$

解此方程得通解为$y=C_1\mathrm{e}^{-t}+C_2\mathrm{e}^{-2t}=\dfrac{C_1}{x}+\dfrac{C_2}{x^2}$，$C_1$，$C_2$为任意常数．

四、微分方程的几何应用

在第 3 讲中，我们讲了切线——那把极速切过曲线上某点的锋利无比的刀，它是一个强大的工具，在几何上常常用来建立微分方程并求解运动轨迹．先看一张图（见图 15-1）．

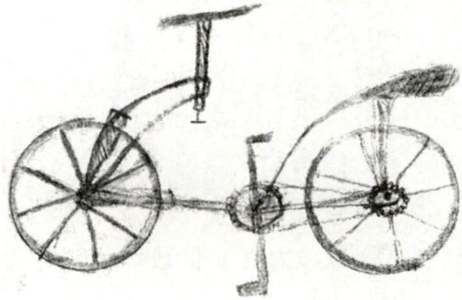


图 15-1

这是达·芬奇所画的最初的自行车，与现在的自行车几乎无异．若某嫌疑人（你以为我又要讲福尔摩斯了吗？不，这里他犯了错误）骑车逃跑时在地面上留下了前后轮的局部运动轨迹（见图 15-2）．福尔摩斯犯难了，嫌疑人是向左逃跑还是向右逃跑了呢？首先，你得确定L_1，L_2哪一条轨迹是前轮留下的．事实上，对切线概念的深刻理解可以让你迅速得出答案．轨迹上每一点的切线方向都代表此刻轮子的前进方向．所以若一条曲线上存在一个点（如点A）处的切线不会与此处另一条曲线相交，前者就是前轮的轨迹，因为它是前轮，前轮前进的方向可以没有后轮经过，但后轮每一刻的前进方向必然都指向前轮此刻的位置．好，那么L_2是前轮轨迹，L_1是后轮轨迹，我们可以确定了．接下来是最关键的问题了，车是向左还是向右行驶？达·芬奇手稿中的自行车告诉我们，前后轮的轨迹连线必然是连接前后车轮轮毂的装置的投影，它是长度不变的．

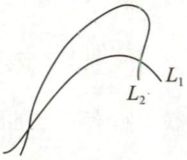


图 15-2

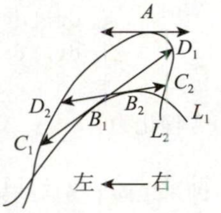


图 15-3

如图 15-3 所示，由于$|B_2C_2|$明显不等于$|B_1D_1|$，即自行车不会向右行驶，故是从右往左行驶的．

例 15.20 设自行车前轮和后轮与地面的接触点分别为P和Q，并设$|PQ|=1$，初始时刻P在原点，Q在$(1,0)$点，若前轮沿y轴的正方向前进，求Q点的运动轨迹．

解 如图 15-4 所示，当P点沿着y轴向上移动时，记Q点的轨迹形成曲线$y=y(x)$．并设曲线上Q点的坐标为(x,y)，P点坐标为$(0,Y)$，由$|PQ|=1$，得

$$x^2+(y-Y)^2=1，即\ y-Y=-\sqrt{1-x^2}\ .$$

$Y>y$，故取负值

由题意知，QP的方向就是曲线$y=y(x)$在(x,y)点的切线方向，故

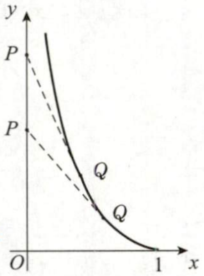


图 15-4

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-Y}{x}=-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x},$$

两边积分得

$$y=-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x\ .$$

令 $x=\sin t$，则

$$\begin{aligned}y&=-\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=-\int\frac{1-\sin^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=-\int\csc t\mathrm{d}t+\int\sin t\mathrm{d}t\\&=-\ln\left|\csc t-\cot t\right|-\cos t+C\\&=-\ln\left|\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\sqrt{1-x^2}+C\\&=\ln\left|\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\sqrt{1-x^2}+C\\&=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}+C\ .\end{aligned}$$

由 $x=1$ 时，$y=0$，可得 $C=0$．故 Q 点的轨迹方程为

$$y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}-\sqrt{1-x^2}\ .$$

五、微分方程的物理应用（仅数学一、数学二）

例 15.21　飞机在机场降落时，为了减少滑行距离，在触地的瞬间，飞机尾部张开减速伞，以增大阻力，使飞机迅速减速并停下．

现有一质量为 m 的飞机，着陆时的水平速度为 $v(0)$．经测试，减速伞打开后，飞机所受的总阻力与飞机的速度成正比．比例系数为 k，$k>0$．从飞机接触跑道开始计时，设 t 时刻飞机的滑行距离为 $x(t)$，速度为 $v(t)$，则飞机滑行的位移方程为（　　）．

(A) $x(t)=\frac{m}{k}[v(0)-v(t)]$　　(B) $x(t)=\frac{m}{k}[v(t)-v(0)]$

(C) $x(t)=km[(v(0)-v(t)]$　　(D) $x(t)=km[v(t)-v(0)]$

分析　本题是标准的牛顿第二定律的应用题，列出关系式后再解微分方程即可．

解 应选 (A).

根据牛顿第二定律，得 $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=-kv$，又 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，可得 $\mathrm{d}x=-\frac{m}{k}\mathrm{d}v$，积分得

$$x(t)=-\frac{m}{k}v(t)+C\ .$$

由 $x(0)=0$，得 $C=\frac{m}{k}v(0)$，从而

$$x(t)=\frac{m}{k}[v(0)-v(t)]\ .$$

【注】 此题中，加速度 $a=\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=v\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$，这是因为选项均为 x 与 v 的关系式，故用相关变化率的手段写成上述表达形式．

例 15.22 已知高温物体置于低温介质中，t 时刻物体温度 $T(t)$ ℃对时间（单位：min）的变化率与 t 时刻物体和介质的温差 $T-T_0$ 成正比 $(T>T_0)$，比例系数为 k，$k>0$ ．现将一初始温度为 120 ℃的物体在 20 ℃恒温介质中冷却，30 min 后该物体温度降至 30 ℃，则 $T(t)=$______.

解 应填 $100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20$ ．

由题意得

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-20),$$

解得

$$T=C\mathrm{e}^{-kt}+20\ .$$

将初始条件 $T(0)=120$ 代入上式，解得 $C=100$，故

$$T=100\mathrm{e}^{-kt}+20\ .$$

将 $t=30, T=30$ 代入上式得 $k=\frac{\ln 10}{30}$，所以

$$T(t)=100\mathrm{e}^{-\frac{\ln 10}{30}t}+20\ .$$

【注】"t 时刻物体温度 $T(t)$ ℃对时间的变化率与 t 时刻物体和介质的温差 $T-T_0$ 成正比 $(T>T_0)$"，应写成 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-T_0)$，负号代表 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}<0$（温度随着时间的增加而降低）.

六、一阶常系数线性差分方程（仅数学三）

1. 函数差分的定义

函数$y_t=f(t)$，$t=0,\pm1,\pm2,\cdots$．函数$f(t)$在t时刻的**一阶差分**定义为

$$\Delta y_t=y_{t+1}-y_t=f(t+1)-f(t);$$

函数$f(t)$在t时刻的**二阶差分**定义为

$$\Delta^2 y_t=\Delta\left(\Delta y_t\right)=\Delta y_{t+1}-\Delta y_t=y_{t+2}-2y_{t+1}+y_t\ .$$

2. 一阶常系数线性差分方程及其求解

(1) 一阶常系数线性差分方程．

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1}+ay_t=f(t), \qquad ①$$

其中$f(t)$为已知函数，a为非零常数．

当$f(t)\equiv0$时，方程①变为

$$y_{t+1}+ay_t=0, \qquad ②$$

我们称$f(t)\neq0$时的①为**一阶常系数非齐次线性差分方程**，②为其对应的**一阶常系数齐次线性差分方程**．

(2) 齐次差分方程的通解．

通过迭代，并由数学归纳法可得②的通解为

$$y_C(t)=C\bullet(-a)^t,$$

这里C为任意常数．

(3) 非齐次差分方程的解．

定理 1 若y_t^*是非齐次差分方程①的一个特解，$y_C(t)$是齐次差分方程②的通解，则非齐次差分方程①的通解为

$$y_t=y_C(t)+y_t^*\ .$$

定理 2 若$\overline{y}_t$与$\tilde{y}_t$分别是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)$$

和

$$y_{t+1}+ay_t=f_2(t)$$

的解，则

$$y_t=\overline{y}_t+\tilde{y}_t$$

是差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=f_1(t)+f_2(t)$$

的解 .

非齐次差分方程①的特解 y_t^* 形式的设定见下表 .

①中 $f(t)$ 的形式	取待定特解的条件	试取特解的形式
$f(t)=d^t\cdot P_m(t)$ d 为非零常数	$a+d\neq 0$	$y_t^*=d^t\cdot Q_m(t)$
	$a+d=0$	$y_t^*=t\cdot d^t\cdot Q_m(t)$
$f(t)=b_1\cos\omega t+b_2\sin\omega t$ $\omega\neq 0$ 且 b_1, b_2 为不同时为零的常数	$D=\begin{vmatrix}a+\cos\omega & \sin\omega\\ -\sin\omega & a+\cos\omega\end{vmatrix}\neq 0$	$y_t^*=\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t$ α, β 为待定常数
	$D=0$	$y_t^*=t(\alpha\cos\omega t+\beta\sin\omega t)$

例 15.23 差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为 $y_t=$______.

解 应填 $\frac{1}{2}t(t-1)+C$ (C 为任意常数).

齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=0$ 的特征根为 $r=1$，其通解为 $y=C$.

设非齐次差分方程 $y_{t+1}-y_t=t$ 的一个特解为 $y^*=t(a+bt)$，代入方程并整理，得 $a+b+2bt=t$，所以 $b=\frac{1}{2}$，$a=-\frac{1}{2}$，故差分方程 $\Delta y_t=t$ 的通解为

$$y_t=\frac{1}{2}t(t-1)+C\ (C\text{ 为任意常数 }).$$

例 15.24 求一阶差分方程 $y_{t+1}-y_t=4\cos\frac{\pi}{3}t$ 的通解 .

解 对应齐次差分方程的通解为 $y_A(t)=A$. 由于

$$D=\begin{vmatrix}-1+\cos\frac{\pi}{3} & \sin\frac{\pi}{3}\\ -\sin\frac{\pi}{3} & -1+\cos\frac{\pi}{3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

故设非齐次差分方程的特解为

$$y_t^*=B_0\cos\frac{\pi}{3}t+B_1\sin\frac{\pi}{3}t,$$

代入原方程后可求得 $B_0=-2,B_1=2\sqrt{3}$. 于是原方程的通解为

$$y_t=A-2\cos\frac{\pi}{3}t+2\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3}t(A\text{ 为任意常数 }).$$

基础习题精练

习 题

15.1 微分方程$y''-4y'+4y=x^2+8e^{2x}$的一个特解应具有的形式为(其中a，b，c，d为常数)(　　).

(A) $ax^2+bx+ce^{2x}$　　(B) $ax^2+bx+c+dx^2e^{2x}$

(C) $ax^2+bx+cxe^{2x}$　　(D) $ax^2+(bx^2+cx)e^{2x}$

15.2 已知$y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^x-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$是某二阶常系数非齐次微分方程的 3 个解，则该方程满足$y(0)=0$，$y'(0)=1$的特解为______.

15.3 微分方程$y'\tan x=y\ln y$的通解是______.

15.4 微分方程$\left(x\dfrac{dy}{dx}-y\right)\arctan\dfrac{y}{x}=x$的通解为______.

15.5 微分方程$y'+1=e^{-y}\sin x$的通解为______.

15.6 (仅数学一、数学二)微分方程$xy''+3y'=0$的通解为______.

15.7 微分方程$y''-4y=e^{2x}$的通解为______.

15.8 (仅数学一)方程$x^2\dfrac{d^2y}{dx^2}-2y=x^2$的通解为______.

15.9 已知$y_1=xe^x+e^{-x}$是某二阶非齐次线性微分方程的特解，$y_2=(x+1)e^x$是对应二阶齐次线性微分方程的特解，求此非齐次线性微分方程.

15.10 设函数$f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且满足方程$f(t)=e^{4\pi t^2}+\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2}f\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy$，求$f(t)$.

15.11 设四阶常系数齐次线性微分方程$y^{(4)}-y'''+y''-y'=0$.

(1) 求上述微分方程的通解$y(x)$；

(2) 求在$x\to 0$时是x的三阶无穷小的解$y(x)$.

15.12 (仅数学一、数学二)设函数$y(x)$具有二阶导数，且曲线l: $y=y(x)$与直线$y=x$相切于原点.记α为曲线l在点(x,y)处切线的倾角，若$\dfrac{d\alpha}{dx}=\dfrac{dy}{dx}$，求$y(x)$的表达式.

15.13 (仅数学一、数学二)设函数$f(x)$可导，且$f'(x)>0$.曲线$y=f(x)(x\geqslant 0)$经过坐标原点O，其上任意一点M处的切线与x轴交于T，又MP垂直x轴于点P.已知由曲线$y=f(x)$，直线MP以及x

轴所围图形的面积与$\triangle MTP$的面积之比恒为$3:2$，求满足上述条件的曲线的方程 .

15.14 （仅数学三）求一阶非齐次线性差分方程$\Delta y_x=3$满足初始条件$y_0=2$的特解 .

15.15 （仅数学三）求方程$y_{t+1}-3y_t=2^t-1$，$y_0=1$的特解 .

解答

15.1 (B) **解** 原微分方程所对应齐次方程的特征方程为$r^2-4r+4=0$，特征根$r_{1,2}=2$. 而$f_1(x)=x^2$，$\lambda_1=0$非特征根，故$y_1^*=ax^2+bx+c$. 又$f_2(x)=8\mathrm{e}^{2x}$，$\lambda_2=2$是二重特征根，所以$y_2^*=dx^2\mathrm{e}^{2x}$. $y_1^*+y_2^*$就是特解的形式，选 (B).

15.2 $y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{2x}$ **解** 记$\overline{y}_1=y_1-y_3=\mathrm{e}^{3x}$，$\overline{y}_2=y_2-y_3=\mathrm{e}^x$，则$\overline{y}_1$，$\overline{y}_2$是题设二阶常系数非齐次线性微分方程对应的齐次方程的两个解，且$\overline{y}_1$和$\overline{y}_2$线性无关 . 由此可得题设微分方程的通解是

$$y=C_1\overline{y}_1+C_2\overline{y}_2+y_3,$$

即

$$y=C_1\mathrm{e}^{3x}+C_2\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{2x},$$

代入初始条件$y|_{x=0}=0$，$y'|_{x=0}=1$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\3C_1+C_2-1=1,\end{cases}$$

解得$C_1=1$，$C_2=-1$，故所求特解为$y=\mathrm{e}^{3x}-\mathrm{e}^x-x\mathrm{e}^{2x}$.

15.3 $\ln y=C\sin x$或$y=\mathrm{e}^{C\sin x}$，其中C为任意常数 **解** 原方程分离变量，有$\dfrac{\mathrm{d}y}{y\ln y}=\dfrac{\cos x}{\sin x}\mathrm{d}x$，积分得

$$\ln|\ln y|=\ln|\sin x|+C_1,$$

故通解为$\ln y=C\sin x$或$y=\mathrm{e}^{C\sin x}$，其中C为任意常数 .

15.4 $C\sqrt{x^2+y^2}=\mathrm{e}^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}}$，其中$C$为任意正常数 **解** 所求微分方程为齐次型微分方程，只要作代换$u=\dfrac{y}{x}$解之即可 .

将方程变形为$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{\arctan\dfrac{y}{x}}+\dfrac{y}{x}$，令$u=\dfrac{y}{x}$，则有$\arctan u\mathrm{d}u=\dfrac{\mathrm{d}x}{x}$，两边积分，得

$$u\arctan u-\int\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{\mathrm{d}x}{x},$$

所以有$u\arctan u-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)=\ln|x|+\ln C$，即$u\arctan u=\ln(C\cdot|x|\sqrt{1+u^2})$．

回代$u=\frac{y}{x}$，得$\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}=\ln(C\sqrt{x^2+y^2})$，即得原方程的通解$C\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}\arctan\frac{y}{x}}$，其中$C$为任意正常数．

15.5 $e^y=e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right]$，其中$C$为任意常数 **解** 将方程$y'+1=e^{-y}\sin x$变形为$(e^y)'+e^y=\sin x$，这是关于$e^y$的一阶线性微分方程．利用一阶非齐次线性微分方程的通解公式，得

$$e^y=e^{-\int dx}\left(\int \sin x\cdot e^{\int dx}dx+C\right)=e^{-x}\left(\int e^x\sin x dx+C\right)$$

$$=e^{-x}\left[\frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C\right]，其中 C 为任意常数．$$

【注】变量代换是求解微分方程问题的重要方法．

15.6 $y=C_1+\frac{C_2}{x^2}$（C_1，C_2为任意常数） **解** 这是$y''=f(x, y')$型的可降阶微分方程．令$p=y'$，则

$$p'+\frac{3}{x}p=0,\ p=Cx^{-3},$$

因此，

$$y=\int Cx^{-3}dx=C_1-\frac{C}{2}x^{-2}=C_1+\frac{C_2}{x^2}（C_1，C_2为任意常数）.$$

15.7 $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数 **解** 对应的齐次方程为$y''-4y=0$，

特征方程 $r^2-4=0$，

特征根 $r_1=-2, r_2=2$，

故齐次方程的通解为 $Y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}$．

由于$f(x)=e^{2x}$，$\lambda=2$为特征方程的单根，可设原方程特解$y^*=Axe^{2x}$，代入原方程可求得

$$A=\frac{1}{4},$$

因此

$$y^*=\frac{1}{4}xe^{2x},$$

原方程通解为$y=C_1e^{-2x}+C_2e^{2x}+\frac{1}{4}xe^{2x}$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数．

15.8 $y=C_1x^2+\frac{C_2}{|x|}+\frac{1}{3}x^2\ln|x|$，其中$C_1$，$C_2$为任意常数 **解** 此为欧拉方程，按解欧拉方程的办法

解之．

当$x>0$时，令$x=e^t$，有$t=\ln x$，经计算化原方程为$\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}-2y=e^{2t}$，其特征方程为$r^2-r-2=0$，特征根$r_1=2$，$r_2=-1$，则其齐次方程的通解为$Y=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}$．设特解$y^*=Ate^{2t}$，可得$A=\frac{1}{3}$．从而得通解为

$$y=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}+\frac{1}{3}te^{2t}=C_1x^2+\frac{C_2}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln x\ .$$

当$x<0$时，令$x=-u$，原方程化为y关于u的方程

$$u^2\frac{d^2y}{du^2}-2y=u^2,$$

得通解

$$y=C_3u^2+\frac{C_4}{u}+\frac{1}{3}u^2\ln u=C_3x^2-\frac{C_4}{x}+\frac{1}{3}x^2\ln(-x)\ .$$

合并两种情形得原方程的通解为

$$y=C_1x^2+\frac{C_2}{|x|}+\frac{1}{3}x^2\ln|x|，\text{其中 } C_1，C_2 \text{ 为任意常数}．$$

15.9　解　由于$y_2=(x+1)e^x$为二阶齐次线性微分方程的特解，由解的结构可知，$y=e^x$与$y=xe^x$都为该齐次方程的解．故$r=1$为二重特征根，特征方程为

$$(r-1)^2=r^2-2r+1=0,$$

则对应齐次方程为

$$y''-2y'+y=0\ .$$

又由于$y_1=xe^x+e^{-x}$为非齐次方程的特解，$y=xe^x$为对应齐次方程的解，可知$y_1-xe^x=e^{-x}=y^*$也为该非齐次方程的特解．设所求方程为

$$y''-2y'+y=f(x),$$

将$y^*=e^{-x}$代入上面的方程，可得$f(x)=4e^{-x}$，因此所求方程为$y''-2y'+y=4e^{-x}$．

15.10　解　显然$f(0)=1$，由于

$$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 4t^2} f\left(\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{2t}f\left(\frac{1}{2}r\right)rdr=2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr,$$

可见

$$f(t)=e^{4\pi t^2}+2\pi\int_0^{2t}rf\left(\frac{1}{2}r\right)dr，f'(t)=8\pi te^{4\pi t^2}+8\pi tf(t)\ .$$

解上述关于$f(t)$的一阶非齐次线性微分方程，得

$$f(t)=\left(\int 8\pi t\mathrm{e}^{4\pi t^2}\mathrm{e}^{-\int 8\pi t\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{\int 8\pi t\mathrm{d}t}=\left(8\pi\int t\mathrm{d}t+C\right)\mathrm{e}^{4\pi t^2}=(4\pi t^2+C)\mathrm{e}^{4\pi t^2},$$

将$f(0)=1$代入，得$C=1$．因此$f(t)=(4\pi t^2+1)\mathrm{e}^{4\pi t^2}$．

15.11　解　(1) 由$r^4-r^3+r^2-r=0$，即$r^3(r-1)+r(r-1)=0$，也即$r(r-1)(r^2+1)=0$，得$r_1=0$，$r_2=1$，$r_{3,4}=\pm\mathrm{i}$，于是通解$y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\cos x+C_4\sin x$，其中$C_1$，$C_2$，$C_3$，$C_4$是任意常数．

(2) 要想在$x\to 0$时保证y是x的三阶无穷小，最简单的办法就是对y作泰勒展开，

$$y=C_1+C_2\mathrm{e}^x+C_3\cos x+C_4\sin x=C_1+C_2\left[1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]+$$

$$C_3\left[1-\frac{1}{2}x^2+0x^3+o(x^3)\right]+C_4\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)\right]$$

$$=C_1+C_2+C_3+(C_2+C_4)x+\left(\frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{2}\right)x^2+\left(\frac{C_2}{6}-\frac{C_4}{6}\right)x^3+o(x^3),$$

于是必须$C_1+C_2+C_3=0,\ C_2+C_4=0,\ \frac{C_2}{2}-\frac{C_3}{2}=0,\ \frac{C_2}{6}-\frac{C_4}{6}\neq 0$，解得$C_2=C_3=-C_4=-\frac{C_1}{2}$，且$C_1\neq 0$，记$C_1=2C$，则

$$y=2C-C\mathrm{e}^x-C\cos x+C\sin x,\ 其中C\neq 0\ .$$

15.12　解　由导数的几何意义，有$y'=\tan\alpha$，即$\alpha=\arctan y'$，所以

$$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{y''}{1+(y')^2}\ .$$

由题意$\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，得$\frac{y''}{1+(y')^2}=y'$，即

$$y''=y'[1+(y')^2],$$

因为曲线l与直线$y=x$相切于原点，所以$y(0)=0,\ y'(0)=1$，由例15.12可知，$y=\arcsin\frac{\mathrm{e}^x}{\sqrt{2}}-\frac{\pi}{4}$．

15.13　解　曲线$y=f(x)(x\geqslant 0)$上点$M(x,y)$处的切线MT的方程为

$$Y-y=y'(X-x),$$

T点坐标为$\left(x-\frac{y}{y'},0\right)$，由题意得

$$\frac{1}{2}\frac{y^2}{y'}=\frac{2}{3}\int_0^x y\mathrm{d}t,$$

两端对x求导，有

$$\frac{2y(y')^2-y^2y''}{2(y')^2}=\frac{2}{3}y,\ 即\ yy''-\frac{2}{3}(y')^2=0\ .$$

因为曲线过坐标原点，所以$y(0)=0$，由例 15.13，且因$x\geqslant 0$，$f'(x)>0$，故所求曲线的方程为$y=Cx^3(C>0)$. $\longrightarrow$ 此处因$x\geqslant 0$，$f'(x)>0$，故有$C>0$

15.14 解 因为原方程可化为$y_{x+1}-y_x=3$，相应的齐次方程为$y_{x+1}-y_x=0$，所以其特征方程为$r-1=0$，特征根为$r=1$，故相应的齐次方程的通解为$Y_x=C$.

因为$P_n(x)b^x=3$，即已知多项式为$P_n(x)=3$是零次的，而$b=1$是特征根，所以设特解为$y_x^*=Ax$，则$y_{x+1}^*=A(x+1)$，代入原方程$y_{x+1}-y_x=3$，得$A=3$，所以$y_x^*=3x$，故原方程的通解为

$$y_x=Y_x+y_x^*=C+3x\text{，其中 }C\text{ 为任意常数}.$$

将$y_0=2$代入通解，得$C=2$，故满足初始条件的特解为$y_x=2+3x$.

15.15 解 相应的齐次方程为$y_{t+1}-3y_t=0$，其特征方程为$r-3=0$，得$r=3$，故相应的齐次方程的通解为$Y_t=A\cdot 3^t$. 由于$y_{t+1}-3y_t=2^t$的特解为-2^t，而$y_{t+1}-3y_t=-1$的特解为$\frac{1}{2}$. 由叠加原理可得，原方程的通解为

$$y_t=A\cdot 3^t-2^t+\frac{1}{2},$$

代入定解条件$y_0=1$，可求得$A=\frac{3}{2}$，故原方程的特解为

$$y_t=\frac{1}{2}\cdot 3^{t+1}-2^t+\frac{1}{2}.$$

第16讲 无穷级数（仅数学一、数学三）

基础知识结构

- 常数项级数的概念与性质
  - 引例
  - 概念及其敛散性
  - 性质
- 级数敛散性的判别方法
  - 正项级数及其敛散性判别
    - 收敛原则
    - 比较判别法
    - 比较判别法的极限形式
    - 比值判别法
    - 根值判别法
    - 积分判别法
  - 交错级数及其敛散性判别
    - 莱布尼茨判别法
  - 任意项级数及其敛散性判别
    - 绝对收敛
    - 条件收敛
- 幂级数及其收敛域
  - 概念
  - 阿贝尔定理
  - 收敛半径
  - 收敛域的求法
- 幂级数求和函数
  - 概念
  - 运算法则
  - 恒等变形方式
  - 性质
  - 重要展开式
- 函数展开成幂级数
  - 概念
  - 求法
    - 直接法
    - 间接法
- 傅里叶级数（仅数学一）

基础内容精讲

一、常数项级数的概念与性质

1. 引例

古希腊数学家芝诺曾经讲了一个有趣的悖论：一个人从 A 点走到 B 点，先走完路程的 $\frac{1}{2}$，然后走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$，再走完剩下路程的 $\frac{1}{2}$……依次类推，一直走下去，永远走不到终点 .

我们不妨将芝诺的文字描述写成如下的数学表达式 .

假设此人匀速前进走完路程的 $\frac{1}{2}$ 要用半个小时，则按照芝诺的描述，从 A 点到 B 点所用的总时间 T 可以写成

$$T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots .$$

这便出现了无穷多项相加的式子，且越往后的项越小，这“无穷多个越来越小的项加起来”的表达式合理吗？芝诺认为不对，其核心问题就在于以前人们所接触的都是**有限项相加**，项数再多，也加得完；现在出现了无穷多项相加，用所谓的加法是永远加不到尽头的 . 接下来，我们就要开始研究这个总时间 T 的表达式到底是什么，该如何处理它 .

2. 概念及其敛散性

给定一个无穷数列 $u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$，将其各项用加号连起来得到**记号** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

叫作**无穷级数**，简称**级数**，其中 u_n 叫作该级数的**通项** . 若 u_n 是常数，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为**常数项无穷级数**，简称**常数项级数** . 如在引例中写出的总时间 $T=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$，这里的通项 $u_n=\frac{1}{2^n}$. 之所以称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为一个记号，是因为这种相加只是**形式上**的 . 既然无穷多项是不可能逐一相加求和的，那么该如何处理“无穷多项相加”呢？

现将级数中的各项逐一相加，得到下面这些和：

$$S_1=u_1,\ S_2=u_1+u_2,\ S_3=u_1+u_2+u_3,\ \cdots,\ S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,\ \cdots,$$

方法：

①写 $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$；

②求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$

这称为级数的**部分和**，$\{S_n\}$ 就是级数的**部分和数列**．显然，我们愿意去研究当 $n \to \infty$ 时所发生的事情，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，这便道出了无穷多项相加的方法：用极限工具来处理．若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$（一个存在的有限数），则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 S 为该收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**和**；若 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**．雅各布·伯努利曾在自己的文章中这样写道："末项消逝的无穷级数之和**有时有限**而**有时无限或不定**．"这里的"有限"与"无限或不定"就分别对应着"收敛"与"发散"．

研究一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 是收敛还是发散，也可以简单说成研究级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的**敛散性**．

如判别**几何级数**（也叫**等比级数**）

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

的敛散性，其中 $a \neq 0$．

在公比 q 满足 $|q| < 1$ 的情形下，初等数学知识告诉我们，部分和

$$S_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q},$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，因此 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \dfrac{a}{1-q}$，这个极限是存在的，故当 $|q| < 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 收敛．

反之，当 $|q| \geqslant 1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$ 是发散的，这是因为

若 $q > 1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = +\infty$，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在；

若 $q = 1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + a + \cdots + a + \cdots$（无穷多个 a 相加），$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 亦不存在；

（读者可轻易看出，当 $q \geqslant 1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为 $\pm\infty$，到底是 $+\infty$ 还是 $-\infty$，由 a 的正负决定）

若 $q = -1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + (-a) + a + (-a) + \cdots$，这是一个十分著名且有趣的级数，欧拉、莱布尼茨都在这个级数的敛散性判别上犯了错误，今天的我们当然可以清晰地给出正确答案，部分和 $S_1 = a$，$S_2 = 0$，$S_3 = a$，$S_4 = 0$，…，它们交错着等于 a 和 0，显然 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在（不唯一，自然不存在）；

若 $q < -1$，$\lim\limits_{n\to\infty} q^n$ 不存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 不存在．

综上所述，当$|q|\geqslant 1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$均不存在，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$发散．于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}\begin{cases}\text{发散，} & |q|\geqslant 1,\\ \text{收敛，其和为}\dfrac{a}{1-q}\text{，} & |q|<1,\end{cases}\quad \text{其中}\ a\neq 0\ .$$

【注】显然，在引例中提出的芝诺的问题是几何级数的特例，$T=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，其首项$a=\dfrac{1}{2}$，公比$q=\dfrac{1}{2}$，是$|q|<1$的情况，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}=\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$．事实上，此人将恰好用一个小时从$A$点走到$B$点．

3. 性质

性质 1　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均收敛，则任给常数$a,b$，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)$也收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n\pm bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm b\sum_{n=1}^{\infty}v_n\ .$$

【注】(1) 收敛 ± 发散 = 发散；(2) 发散 ± 发散 = 不一定．

性质 2　改变级数任意有限项，不会改变该级数的敛散性． 级数的敛散性取决于$n\to\infty$时的情况.

性质 3　收敛级数的项任意加括号后所得的新级数仍收敛，且其和不变．

【注】根据性质 3，有如下两个结论需要注意．

(1) 若加括号后得到的新级数发散，则原级数必然发散（逆否命题）．

(2) 若加括号后得到的新级数收敛，不能断言原级数一定收敛．如级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a$，其中常数$a\neq 0$，若从第一项起，两项两项地加括号，可得$(a-a)+(a-a)+\cdots=0$收敛，但原级数是发散的．

性质 4　若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．

【注】此性质是**级数收敛的必要条件**．其逆否命题：若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$必发散，且即使$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，也不能保证$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，见例 16.13.

例 16.1　证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在．

证明　$S_n=(u_2-u_1)+(u_3-u_2)+\cdots+(u_{n+1}-u_n)=u_{n+1}-u_1$，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n+1}-u_n)$收敛$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}S_n$存在$\Leftrightarrow\lim\limits_{n\to\infty}u_n$存在.

例 16.2　记$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n$，若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$（或$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$），证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$.

证明　由于$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}u_{2n+1}=0$．结合$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=S$，有

$$\lim_{n\to\infty}S_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}+u_{2n+1})=\lim_{n\to\infty}S_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=S+0=S,$$

故$\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n+1}=S$．所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$，即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=S$.

二、级数敛散性的判别方法

1. 正项级数及其敛散性判别

若通项$u_n\geqslant0$，$n=1,2,\cdots$，则称$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为**正项级数**.

(1) 收敛原则.

正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$有界.

【注】由于$\{S_n\}$单调不减，故$\lim\limits_{n\to\infty}S_n$只有两种可能的结果：若$\{S_n\}$有界，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$（有限数）；若$\{S_n\}$无界，则$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=+\infty$．除此之外，再无其他结果.

例 16.3　判别级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$的敛散性.

解　其部分和S_{n+1}满足

$$\begin{aligned}0<S_{n+1}&=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant1+1+\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\\&=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3,\end{aligned}$$

即$\{S_{n+1}\}$有界，由收敛原则，有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$收敛.

【注】 这个级数的和是著名的欧拉数e．可在$\mathrm{e}^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$中，令$x=1$，则有$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}=\mathrm{e}$．

(2) 比较判别法．

给出两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，如果从某项起有$u_n\leqslant v_n$成立，则

①若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

②若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$也发散．

有人通俗地念成：**两个正项级数，若大的收敛，则小的必收敛；若小的发散，则大的必发散**．对于记忆来讲，这种念法未尝不可．

例 16.4 以下结论，正确的是（　　）．

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$收敛　　(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$收敛　　(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散

解　应选 (D).

当$x>0$时，有$x>\ln(1+x)>0$，所以对任意的正整数n，显然也有$\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$．我们可以先研究$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$的敛散性，若发散，可用比较判别法得出结论．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+1}{n},$$

其部分和

$$S_n=\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}=(\ln 2-\ln 1)+(\ln 3-\ln 2)+\cdots+[\ln(n+1)-\ln n]=\ln(n+1)\ .$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n+1)=+\infty$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$发散，根据正项级数的比较判别法，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散．选 (D).

【注 1】 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$，这个级数从第二项起，每项都是其左右两个相邻项的**调和平均数**．所谓数c是数a与数b的调和平均数就是指它们之间满足下面这个式子：

$$\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right).$$

于是，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 叫作**调和级数**．

【注 2】$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 叫作 p **级数**，调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是 p 级数中 $p=1$ 时的特殊情况．这里不加证明地给出重要结论：

$$p\text{级数}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{发散}, & p\leqslant 1,\\ \text{收敛}, & p>1.\end{cases}$$

对比记忆 p 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x\begin{cases}\text{发散}, & p\leqslant 1,\\ \text{收敛}, & p>1.\end{cases}$

这个结论十分重要，在以后的多种场合都会派上用场，读者需牢记．

例 16.5　设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛．

证明　由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，即当 $n\to\infty$时，$a_n<M$（极限的有界性），于是 $a_n^2=a_n\cdot a_n<Ma_n$，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛．

【注】本题的结论应当记住，如下例就用到了它．同样的方法可以证明 $\sum a_n^3$，$\sum a_{2n}$，$\sum a_{2n+1}$ 都收敛．

例 16.6　(1) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是正项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，且 $\{u_n\}$ 单调减少，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都收敛，证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛．

证明　(1) 由 $\{u_n\}$ 单调减少可得 $u_{n+1}\leqslant u_n$，进而可得 $u_{n+1}^2\leqslant u_nu_{n+1}$，于是 $u_{n+1}\leqslant\sqrt{u_nu_{n+1}}$．因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$ 收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛．

(2) 由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n^2$ 收敛，且 $u_nv_n\leqslant\frac{1}{2}(u_n^2+v_n^2)$，故由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 收敛．

例 16.7　设有方程 $x^n+nx-1=0$，其中 n 为正整数．证明此方程存在唯一的正实根 x_n，并证明当 $a>1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^a$ 收敛．

证明　由例 6.18 知，此方程存在唯一的正实根 x_n，且 $0<x_n<1$．

因为 $x_n^n+nx_n-1=0$，且 $0<x_n<1$，所以

$$0<x_n=\frac{1-x_n^n}{n}<\frac{1}{n},$$

当$a>1$时，有
$$0<x_n^a<\left(\frac{1}{n}\right)^a.$$

又当$a>1$时，正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^a}$收敛，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n^a$收敛．

【注】记$f_n(x)=x^n+nx-1$，若是观察到$f_n\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)^n>0$，则此时$0<x_n<\frac{1}{n}$，进而有$0<x_n^a<\frac{1}{n^a}$，这样更简单．

(3) 比较判别法的极限形式．

给出两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$v_n\neq 0(n=1, 2, \cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$.

①若$A=0$，则当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

②若$A=+\infty$，则当$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散；

③若$0<A<+\infty$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$有相同的敛散性．

例 16.8 设$\alpha>0$，级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sin(n^{-\alpha}\ln n)$收敛，则（　　）．

(A) $\alpha\leqslant 1$　　(B) $\alpha<1$　　(C) $\alpha\geqslant 1$　　(D) $\alpha>1$

解 应选 (D).

对任意给定的$\alpha>0$, $n^{-\alpha}\ln n$在n足够大时，有$0<n^{-\alpha}\ln n<\frac{\pi}{2}$，故$n$足够大时，$\sin(n^{-\alpha}\ln n)>0$，则目标级数为正项级数．

考虑到$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin(n^{-\alpha}\ln n)}{n^{-\alpha}\ln n}=1$，故原级数与$\sum\limits_{n=2}^{\infty}n^{-\alpha}\ln n$敛散性相同．

①当$0<\alpha\leqslant 1$，且n充分大时，有$\frac{\ln n}{n^\alpha}>\frac{1}{n^\alpha}>0$，而$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$发散，故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$发散．

②当$\alpha>1$时，总存在充分小的ε，使$\alpha-\varepsilon>1$，此时$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\varepsilon}=0$．由于$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha-\varepsilon}}$收敛，故$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha}$收敛．

综上所述，当$0<\alpha\leqslant 1$时，原级数发散，当$\alpha>1$时，原级数收敛．选 (D).

对比例8.18

【注】懂得了以上道理，形如$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\mathrm{e}^{n^{-\alpha}\ln n}-1)$，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln(1+n^{-\alpha}\ln n)$等均可作为上例的变体形式出现在试卷中．

例 16.9　设 $a_n>0$，$p>1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}[n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$，若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 p 的取值范围是______.

解　应填 $(2,+\infty)$.

因为当 $n\to\infty$ 时，$\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1$ 与 $\frac{1}{n}$ 是等价无穷小，所以由 $\lim\limits_{n\to\infty}[n^p(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)a_n]=1$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{\frac{1}{n^{p-1}}}=1$.

又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{p-1}}$ 收敛，因此 $p>2$.

例 16.10　设数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 满足 $0<a_n<\frac{\pi}{2}$，$0<b_n<\frac{\pi}{2}$，$\cos a_n-a_n=\cos b_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛 . 证明：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$；

(2) 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛 .

证明　(1) 由例 2.11 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

(2) 由例 2.11 可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{a_n}{b_n}}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n^2}=\dfrac{1}{2}$，又级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 收敛 .

(4) 比值判别法（也叫达朗贝尔判别法）.

给出一正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\rho$，那么

①若 $\rho<1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

②若 $\rho>1$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散 .

达朗贝尔

（1717—1783）

【注】(1) 需要指出，若 $\rho=1$，无法用此法判定 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性 . 比如对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$，$u_n=\dfrac{1}{n}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{n+1}=1$；对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$，$u_n=\dfrac{1}{n^2}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^2=1$. 你看，前者发散，后者收敛，但都有 $\rho=1$.

(2) 由 (1)，若 ρ 不存在或 $\rho=1$，无法用比值判别法 . 但若 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}<k<1,\ n>N>0$，则 $u_{n+1}<ku_n<$

$k^2u_{n-1}<\cdots<k^{n-N}u_{N+1}$，$N$为某已知常数，由于$\sum\limits_{n=N}^{\infty}k^{n-N}u_{N+1}$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛．若$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1(n>N>0)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不等于0，不必取极限，就可推知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

$u_{n+1}\geqslant u_n$，即$\{u_n\}$为单调不减的正项数列，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$.

例 16.11 设$a>0$，则下列对级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}$的敛散性说法正确的是（　　）.

(A) 当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数收敛；当$a\geqslant\mathrm{e}$时，原级数发散

(B) 当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数发散；当$a\geqslant\mathrm{e}$时，原级数收敛

(C) 当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数收敛；当$a\geqslant\mathrm{e}$时，原级数收敛

(D) 当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数发散；当$a\geqslant\mathrm{e}$时，原级数发散

解 应选 (A).

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{n+1}\cdot(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{a^n\cdot n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{a}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}=\frac{a}{\mathrm{e}},$$

这里$\rho=\dfrac{a}{\mathrm{e}}$，显然当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数收敛；当$a>\mathrm{e}$时，原级数发散；当$a=\mathrm{e}$时，由于当$n\to\infty$时，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$单调增加且趋向于e，从而知$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，由级数收敛的必要条件，知原级数发散．

综上所述，当$0<a<\mathrm{e}$时，原级数收敛；当$a\geqslant\mathrm{e}$时，原级数发散．选 (A).

柯西

（1789—1857）

(5) 根值判别法 (也叫柯西判别法).

给出一正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，如果$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$，那么

①若$\rho<1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

②若$\rho>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

【注】(1) 同样要指出，若$\rho=1$，根值判别法也会失效．如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散，有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}=\rho=1$；$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$收敛，也有$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}}=\rho=1$．

(2) $\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim u_n$ 不等于 0，不必取极限，就可推知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散．

例 16.12　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\mathrm{e}^{\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}}+\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}-1\right]$（　　）．

(A) 收敛　　(B) 发散　　(C) 敛散性与 α 有关　　(D) 无法判断

解　应选 (A).

对级数 $I_1=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}}-1\right)$，可判断其为正项级数．当 $n\to\infty$时，$\mathrm{e}^{\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}}-1$ 等价于 $\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}$，而 $\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}$ 满足 $0<\frac{\sin^2\alpha n}{n^2}<\frac{1}{n^2}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而 I_1 收敛．

对级数 $I_2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$，其亦为正项级数，用根值判别法，结合例 2.8 知 I_2 收敛．

综上，I_1+I_2 收敛，选 (A).

(6) 积分判别法．

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数，若存在 $[1,+\infty)$ 上单调减少的非负连续函数 $f(x)$，使得 $u_n=f(n)$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与反常积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性相同．

例 16.13　判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 的敛散性．

解　令 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$，由于 $f(x)=\frac{1}{x\ln x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上非负连续且单调减少，故级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 与反常积分 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x$ 敛散性相同．因为 $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}\mathrm{d}x=\ln(\ln x)\Big|_2^{+\infty}$ 发散，故原级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散．

2. 交错级数及其敛散性判别

若级数**各项正负相间**出现，则称这样的级数为**交错级数**，一般写为

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

其中 $u_n>0(n=1,2,\cdots)$，以使各项的正负号明显地呈现出来，从而表达出各项依次正负相间的独特规律．

显然，交错级数在形式上比正项级数复杂，那么它的敛散性判别是否也同样复杂呢？莱布尼茨回答了这个问题．1714 年，在写给约翰·伯努利的信件中，莱布尼茨给出了下面这个定理，后被称为**莱布尼茨判别法**．

给出一交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$，$u_n>0$，$n=1,2,\cdots$，若①$\{u_n\}$ **单调不增**；②$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，则该级数收敛．

【注】(1) 若 $u_n=f(n)$，且 $f(\cdot)$ 可导，则可连续化为 $f(x)$，通过 $f'(x)$ 的正负，判别 u_n 的单调性．

(2) 莱布尼茨判别法只是充分条件，不是必要条件．

例如，交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$ 的各项依次为 $-\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2^2},-\dfrac{1}{2^3},\dfrac{3}{2^4},\cdots$，其中 $u_n=\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}$，于是

$$u_{n+1}-u_n=\frac{2+(-1)^{n+1}-4-2\cdot(-1)^n}{2^{n+1}}=\frac{-2+3\cdot(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}.$$

当 n 为偶数时，$u_{n+1}-u_n=-\dfrac{5}{2^{n+1}}<0$；当 n 为奇数时，$u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{2^{n+1}}>0$，不满足①，但交错级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2+(-1)^n}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1+(-1)^n\cdot 2}{2^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}}\right]$ 为两个收敛级数之和，故交错级数收敛．

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+u_{2n-1}-u_{2n}+\cdots\overset{(*)}{=\!=}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$，(*)处成立的条件来自"一、3. 性质3"．

例 16.14 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$ 的敛散性．

解 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}+\cdots$，其中 $u_n=\dfrac{1}{n}$．

显然有 $\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{n+1}$，即 $u_n>u_{n+1}$，则 $\{u_n\}$ 单调不增，且有 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，故由莱布尼茨判别法知，该级数收敛．

【注】级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$ 叫作**交错调和级数**，这是一个经典且常用的例子，请读者知悉．

例 16.15 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}-\ln n}$ 的敛散性．

解 令 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}-\ln x}$，由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}-\ln x}=0$，且

$$f'(x)=\frac{-\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}\right)}{(\sqrt{x}-\ln x)^2}=\frac{-(\sqrt{x}-2)}{2x(\sqrt{x}-\ln x)^2}<0(x>4),$$

故由莱布尼茨判别法知，原级数收敛．

例 16.16　判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ 的敛散性.

解　一般项 $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\dfrac{(-1)^n\left[\sqrt{n}-(-1)^n\right]}{n-1}=(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}-\dfrac{1}{n-1}$，其中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 是交错级数，显然 $u_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}\to 0(n\to\infty)$. 令 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$，则 $f'(x)=\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(x-1)-\sqrt{x}}{(x-1)^2}=\dfrac{-1-x}{2\sqrt{x}(x-1)^2}<0(x\geqslant 2)$，于是 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ 发散，故原级数发散.

【注】 此题 $\left\{u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n}\right\}$ 亦是不单调的，将原级数“拆”开，瓦解敌人，各个击破，不失为好的办法.

3. 任意项级数及其敛散性判别

若级数各项可正、可负、亦可为零，则称这样的级数为任意项级数，写为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$. 任意项级数是按下述方式研究敛散性的.

给任意项级数的每一项加上绝对值，写成 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$，这样就使得 $|u_n|\geqslant 0$ 成了正项级数，它叫作原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的**绝对值级数**.

绝对值级数就自然站到了正项级数的队伍中，前面讲过的六种正项级数的敛散性判别法均可派上用场了. 绝对值级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 与原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性有何关系呢？看下面的定义.

定义 1　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **绝对收敛**.

定义 2　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为任意项级数，若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **条件收敛**.

【注 1】 再次考查级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$，它是条件收敛还是绝对收敛？

解　$\left|(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}\right|=\dfrac{1}{n}$，且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的；而由例 16.14 可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\dfrac{1}{n}$ 是收敛的. 故此级数条件收敛.

【注 2】 (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛（即任意项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛），则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 必收敛.

引入级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，其一般项

$$v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)=\begin{cases}u_n, & u_n>0,\\0, & u_n\leqslant 0.\end{cases}$$

可见级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是把级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中的负项换成0而得到的，也就是级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中的全体正项所构成的级数，类似可知，令

$$w_n=\frac{1}{2}(|u_n|-u_n)=\begin{cases}-u_n & u_n<0,\\0, & u_n\geqslant 0\end{cases}=\begin{cases}|u_n|, & u_n<0,\\0, & u_n\geqslant 0,\end{cases}$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$中全体负项的绝对值所构成的级数．如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$都收敛；如果级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$条件收敛（即$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散），那么级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$都发散．

特别地，若交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$（全体正项构成的级数）和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-u_{2n})$（全体负项构成的级数）都发散，此时自然也有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$发散．

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均绝对收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$绝对收敛．

证明 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均绝对收敛，且$0\leqslant|u_n\pm v_n|\leqslant|u_n|+|v_n|$，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$绝对收敛．

(3) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$条件收敛．

证明 假设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$绝对收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$绝对收敛，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$必绝对收敛，这与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$条件收敛矛盾，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$条件收敛．

(4) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均条件收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$收敛（可能绝对收敛，也可能条件收敛）．

证明 因为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$均条件收敛，所以$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$必收敛．

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$可能绝对收敛，如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n^2}-(-1)^n\frac{1}{n}\right]$均是条件收敛，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$绝对收敛；

$$\begin{cases}n=2k+1\Rightarrow\left|\frac{1}{n^2}-(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2},\\ n=2k\Rightarrow\left|\frac{1}{n^2}-(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}.\end{cases}$$故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^2}-(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2}$$

（发散＋收敛＝发散）

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也可能条件收敛，如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$ 均是条件收敛，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ 条件收敛 .

(5) 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散，我们不能断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散 . 但是，如果我们是用比值判别法或根值判别法根据 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\rho>1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\rho>1$ 而判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散的，那么我们可以断定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也必定发散 . 这是因为从 $\rho>1$ 可推知 $\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|\neq 0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的 .

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，若记 $u_n=\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{\mathrm{e}}{2}>1$，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$ 发散 .

(6) 交错 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\begin{cases}\text{绝对收敛，} p>1, \\ \text{条件收敛，} 0<p\leqslant 1 .\end{cases}$

例 16.17　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛，$u_n>0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n}-2u_{2n-1})$（　　）.

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 敛散性无法判断

解　应选 (A).

由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 条件收敛，可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$ 发散，且由“二、2. 注 (3)”知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n}-2u_{2n-1})=\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(u_{2n}-u_{2n-1})-u_{2n-1}]$ 发散 . 选 (A).

例 16.18　级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)$（$k$ 为常数）（　　）

(A) 绝对收敛　(B) 条件收敛

(C) 发散　(D) 敛散性与 k 有关

解　应选 (A).

方法一　$\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}=\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n(n+1)}}=\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\leqslant\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$，

因而原级数绝对收敛，选 (A).

方法二 $\left|\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)\sin(n+k)\right|\leqslant\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

设 $u_n=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，且

$$\begin{aligned}S_{2n}&=\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n}}-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\\&=1-\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\to1(n\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=1$，即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ 收敛，故原级数绝对收敛 . 选 (A).

例 16.19 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nu_n$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛，则（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 条件收敛

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散

解 应选 (B).

因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{v_n}{n}$ 条件收敛，故由级数收敛的必要条件知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{v_n}{n}=0$，从而数列 $\left\{\frac{v_n}{n}\right\}$ 有界，即存在 $M>0$，对于任意的正整数 n，有 $\left|\frac{v_n}{n}\right|\leqslant M$.

因为

$$|u_nv_n|=\left|nu_n\cdot\frac{v_n}{n}\right|\leqslant M|nu_n|,$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|nu_n|$ 收敛，故根据比较判别法可得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_nv_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nv_n$ 绝对收敛，应选 (B).

若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{n^3}$, $v_n=\frac{(-1)^n}{\ln(n+1)}$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 收敛；若取 $u_n=\frac{(-1)^n}{n^3}$, $v_n=(-1)^n$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ 发散 . 故排除选项 (C)，(D).

例 16.20 如果数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则以下级数中必收敛的是（　　）.

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$

(C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})$

解 应选 (D).

解析详见下面“注”中的“(5)”“(7)”“(10)”“(11)”.

【注】很多同学在复习数项级数的判敛问题时感觉摸不着头脑，尤其对于这种抽象的问题，更是害怕.我想做题时的“总结不足”可能是一个重要的原因——有些同学说，我已经做了很多题，可是为什么做新的练习题时还是不会呢？答：很可能是你做题的质量不高，为了做题而做题，做完一题扔一题，只追求数量，这肯定不行.做完一题，就要停下来总结一下这道题你能学到什么技巧，容易错在哪里，有什么值得借鉴的；做完同一知识点下的几道题，就要停下来好好琢磨这几道题之间有没有什么联系，考虑能从哪些角度去解决这类问题.这种总结做多了，你的做题质量和效率就会越来越高.

下面给大家做一个示范，做了很多题目以后，对于抽象的数项级数的判敛问题，有如下总结.

设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$是任意项级数（$\sum$的上标都是$\infty$，而下标并非总是1).

(1) 设a，b，c为**非零**常数，且$au_n+bv_n+cw_n=0$，则在$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$中只要有两个级数是收敛的，另一个必收敛.

(2) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散.

(3) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{u_n}{n}$绝对收敛（提示：$\left|\dfrac{u_n}{n}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left(u_n^2+\dfrac{1}{n^2}\right)$).

(4) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$不定（反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散).

(5) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n^2$不定（反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散).

(6) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$不定（反例：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{n}$收敛，但$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散).

(7) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{u_n}{n}$不定（反例：$\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\dfrac{1}{\ln n}$收敛，但$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$发散).

(8) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n}$（偶数项），$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{2n-1}$（奇数项）不定（反例：$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n}$收敛，但是其奇数项和偶数项都发散).

(9) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛（收敛级数任意加括号所得的新级数仍收敛，且和不变).

(10) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}-u_{2n})$不定（反例：$u_1+u_2+u_3+u_4+u_5+u_6+\cdots=1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}+\cdots$收敛，但$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\cdots$发散).

(11) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+u_{n+1})\text{ 收敛}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n+\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}\text{ 收敛}\right), \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})\text{ 收敛}\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n-\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+1}\text{ 收敛}\right). \end{cases}$

(12) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_nu_{n+1}$ 不定（反例：$u_n=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}$，$u_nu_{n+1}=(-1)^n\dfrac{1}{\sqrt{n}}\cdot(-1)^{n+1}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}=-\dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$，级数发散）.

例 16.21 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}$ 条件收敛，则 p 的取值范围为______.

解 应填 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$.

令 $a_n=\dfrac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^p}(>0)$，则当 $n\to\infty$ 时，

$$a_n=\frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})n^p}=\frac{1}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)n^p}\sim\frac{1}{2n^{p+\frac{1}{2}}},$$

故当 $p+\dfrac{1}{2}>1$，即 $p>\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则原级数绝对收敛；当 $p+\dfrac{1}{2}\leqslant1$，即 $p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则原级数非绝对收敛.

当 $0<p+\dfrac{1}{2}\leqslant1$，即 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，显然 $a_n\to0(n\to\infty)$. 令

$$f(x)=x^p(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(x>0),$$

由于

$$f'(x)=x^{p-1}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})\left(p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right),$$

且 $x^{p-1}>0,\sqrt{x+1}+\sqrt{x}>0$，而

$$\lim_{x\to+\infty}\left(p+\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{x+1}}\right)=p+\frac{1}{2}>0,$$

所以当 x 充分大时，$f(x)$ 单调增加，于是当 n 充分大时，$a_n=\dfrac{1}{f(n)}$ 单调减少，故由莱布尼茨判别法知，当 $-\dfrac{1}{2}<p\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时，原级数条件收敛；当 $p+\dfrac{1}{2}\leqslant0$，即 $p\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，a_n 不趋于 $0(n\to\infty)$，故当 $p\leqslant-\dfrac{1}{2}$ 时，原级数发散.

三、幂级数及其收敛域

1. 概念

(1) 函数项级数.

设函数列$\{u_n(x)\}$定义在区间I上，称

$$u_1(x)+u_2(x)+u_3(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$$

为定义在区间I上的**函数项级数**，记为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，当$x$取确定的值$x_0$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$成为常数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$.

(2) 幂级数.

若$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$的一般项$u_n(x)$是$x$的$n$次幂函数，则称$\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n(x)$为**幂级数**，它是一种特殊且常用的函数项级数，其一般形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots;$$

其标准形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots,$$

其中$a_n(n=0,1,2,\cdots)$为**幂级数的系数**.

(3) 收敛点与发散点.

若给定$x_0\in I$，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$收敛，则称点$x_0$为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**收敛点**；若给定$x_0\in I$，有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x_0)$发散，则称点$x_0$为函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的**发散点**.

(4) 收敛域.

函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$的所有收敛点的集合称为它的**收敛域**.

要研究幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，首要任务是判别其何时收敛，因为只有收敛才有继续讨论的意义.具体来说，将某个x_0代入级数可得$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx_0^n$，判别此数项级数是否收敛，若收敛，就找到一个收敛点.我们的目标当然是找到所有收敛点的集合，即收敛域.但问题来了，有多少个收敛点呢？如果有无穷多个收敛点，

难道要一个一个地去验证么？显然，那样做是不可能的．正当人们为此一筹莫展时，一位年轻人提出了一个重要定理，请看下文．

2. 阿贝尔定理

→在区间端点处的敛散性需单独判别

阿贝尔

（1802—1829）

当幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=x_1(x_1\neq 0)$处收敛时，对于满足$\underline{|x|<|x_1|}$的一切$x$，幂级数**绝对收敛**；当幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$在点$x=x_2(x_2\neq 0)$处发散时，对于满足$\underline{|x|>|x_2|}$的一切$x$，幂级数**发散**．

→$(-|x_1|,|x_1|)$区间内

→$[-|x_2|,|x_2|]$区间外

多么伟大的阿贝尔，多么给力的办法！只是，不得不告诉大家，这样一个天才数学家生于1802年，一生的工作不为世人所重视，穷困潦倒，卒于1829年，仅仅活了27年，太遗憾了！

3. 收敛半径

定义 3　若$R\geqslant 0$满足条件：①当$|x|<R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$绝对收敛；②当$|x|>R$时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$发散．则称$R$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径，区间$(-R,R)$称为$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间．

【注】根据阿贝尔定理，已知$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$在某点$x_1(x_1\neq x_0)$的敛散性，确定该幂级数的收敛半径可分为以下三种情况．

(1) 若在x_1处收敛，则收敛半径$R\geqslant|x_1-x_0|$．

(2) 若在x_1处发散，则收敛半径$R\leqslant|x_1-x_0|$．

(3) 若在x_1处条件收敛，则$R=|x_1-x_0|$．【重要考点】

4. 收敛域的求法

(1) 对于不缺项幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$．

①收敛半径的求法．

若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\rho$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$，则$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$R$的表达式为

$$R=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}, & \rho\neq 0,\ \rho\neq+\infty,\\ +\infty, & \rho=0,\\ 0, & \rho=+\infty.\end{cases}$$

②收敛区间与收敛域．

区间$(-R,R)$为幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛区间；单独考查幂级数在$x=\pm R$处的敛散性就可以确定其收

敛域为$(-R, R)$或$[-R, R)$或$(-R, R]$或$[-R, R]$.

【注】注例1　求幂级数

$$1+x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛域.

解　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0,$$

所以收敛半径$R=+\infty$，从而收敛域是$(-\infty, +\infty)$.

注例2　求幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}n!x^n$的收敛半径（规定$0!=1$）.

解　因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=+\infty,$$

所以收敛半径$R=0$，即级数仅在点$x=0$处收敛.

(2) 对于缺项幂级数或一般函数项级数$\sum u_n(x)$.

①加绝对值，即写成$\sum|u_n(x)|$.

②用正项级数的比值（或根值）判别法.

令$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|}$（或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n(x)|}$）$<1$，求出收敛区间$(a, b)$.

③单独讨论$x=a$，$x=b$时$\sum u_n(x)$的敛散性，从而确定收敛域.

【注1】上述(1)，(2)的方法只是充分的，即当$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径存在时，极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$或$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$可能不存在.

如$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}x^n$，记$a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$不存在，$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[3+(-1)^{n+1}]^{n+1}}{[3+(-1)^n]^n}$亦不存在，但是此级数的收敛半径是存在的，怎么求呢？见习题16.12.

【注2】已知$\sum a_n(x-x_1)^n$的敛散性，讨论$\sum b_n(x-x_2)^m$的敛散性.

(1) $(x-x_1)^n$ 与 $(x-x_2)^m$ 的转化一般通过初等变形来完成，包括①“平移”收敛区间；②提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$ 等．

(2) a_n 与 b_n 的转化一般通过微积分变形来完成，包括①对级数逐项求导；②对级数逐项积分等．

(3) 以下三种情况，级数的收敛半径不变，收敛域要具体问题具体分析．

①对级数提出或者乘以因式 $(x-x_0)^k$，或者作平移等，收敛半径不变．

②对级数逐项求导，收敛半径不变，收敛域可能缩小．

③对级数逐项积分，收敛半径不变，收敛域可能扩大．

例 16.22 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为______.

解 应填 1.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}\ .$$

由习题 2.6 知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=1\ ,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

例 16.23 幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为______.

解 应填 $[-1,1]$．

记 $u_n(x)=\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}x^2=x^2$，故

当 $|x|<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 收敛；

当 $|x|>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 发散；

当 $x=\pm1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(\pm1)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$，根据莱布尼茨判别法知此级数收敛．

综上，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域为 $[-1,1]$．

例 16.24 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的收敛域分别为（　　）．

(A) $(-1,1),(-1,1)$　(B) $(-1,1),[-1,1)$　(C) $[-1,1),(-1,1)$　(D) $[-1,1),[-1,1)$

解　应选 (B).

对于$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1=\rho,$$

所以收敛半径$R=1$，故收敛区间为$(-1,1)$．又当$x=\pm1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\pm1)^n$发散，故收敛域为$(-1,1)$．

对于$g(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，因为

$$g(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}t^n\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{b_{n+1}}{b_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}=1,$$

所以收敛半径$R=1$．当$x=1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}$发散；当$x=-1$时，级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}(-1)^{n+1}$收敛，故收敛域为$[-1,1)$．

综上，选 (B).

例 16.25　已知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}\mathrm{e}^{-nx}$的收敛域为$(a,+\infty)$，则$a=$______

解　应填 -1.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\mathrm{e}^{-(n+1)x}\cdot\frac{n^n}{n!}\mathrm{e}^{nx}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\mathrm{e}^{-x}\right|=\mathrm{e}^{-x-1},$$

所以当$\mathrm{e}^{-x-1}<1$，即$x>-1$时，级数收敛，当$\mathrm{e}^{-x-1}>1$，即$x<-1$时级数发散，所以$a=-1$．

【**注**】(1) 当$x=-1$时，$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$，分母单调增加，且$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\to\mathrm{e}(n\to\infty)$，故$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}$，故$\frac{u_{n+1}}{u_n}>1$，且$u_n>0$，故$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，即当$x=-1$时级数发散．

(2) 对于一般函数项级数的收敛域，可以不是对称区间，也没有“收敛半径”这一概念．

例 16.26　设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$在点$x=1$处条件收敛，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$在点$x=2$处（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性不确定

解　应选 (A).

根据“三、3. 注 (3)”，由 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x+1)^n$ 在点 $x=1$ 处条件收敛，知

$$R=|x_1-x_0|=|1-(-1)|=2,$$

且收敛区间为 $(-3, 1)$；

根据“三、4.(2) 注 2(1) 和 (3)”，将 $(x+1)^n$ 转化为 $(x-1)^n$，也就是把级数的中心点由 -1 转移到 1，即将收敛区间平移到 $(-1, 3)$，得 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$，收敛半径不变；

根据“三、4.(2) 注 2(1)，(2) 和 (3)”，对 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 逐项求导，得 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^{n-1}$，再乘以 $(x-1)$ 得 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$，收敛半径不变 .

故 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的收敛区间为 $(-1, 3)$，因为 $x=2$ 在收敛区间内部，所以在该点处级数绝对收敛，答案选择 (A).

例 16.27 幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{n\ln n}+\frac{1}{2^n}\right)x^n$ 的收敛域为______.

解 应填 $[-1, 1)$.

对于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}x^n$，$\frac{1}{R_1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)}=1$.

当 $x=1$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散；当 $x=-1$ 时，由莱布尼茨判别法，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n}$ 收敛，所以其收敛域为 $[-1, 1)$.

对于 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot x^n$，$R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}}=2$.

当 $x=2$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}1$ 发散；当 $x=-2$ 时，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}\cdot(-2)^n=\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n$ 发散，所以其收敛域为 $(-2, 2)$.

综上所述，原级数的收敛域为 $[-1, 1)$.

四、幂级数求和函数

1. 概念

在收敛域上，记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$，并称 $S(x)$ 为 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的和函数 .

2. 运算法则

若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 $R_b(R_a\neq R_b)$，则有

① $k\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}ka_nx^n$，$|x|<R_a$，$k$ 为常数；

② $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n\pm b_n)x^n$，$|x|<R=\min\{R_a,R_b\}$.

【注】 当 $R_a=R_b$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\pm\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ 的收敛半径 $R\geqslant\min\{R_a,R_b\}$.

例如，对于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1+2^n)x^n$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-2^n)x^n$，可求得

$$R_a=\lim_{n\to\infty}\frac{1+2^n}{1+2^{n+1}}=\frac{1}{2},\ R_b=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1-2^n}{1-2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2},$$

而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}[(1+2^n)x^n+(1-2^n)x^n]=2\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$ 的收敛半径 $R=1$，即

$$R>\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right\}.$$

③ $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum\limits_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\sum\limits_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n$.

如何理解并记住此公式呢？由

$(a_0+a_1x+a_2x^2)(b_0+b_1x+b_2x^2)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+(a_1b_2+a_2b_1)x^3+a_2b_2x^4$，

根据归纳法，可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}\underline{\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n}.$$

即 $(a_0b_n+a_1b_{n-1}+\cdots+a_nb_0)x^n$

收敛半径 $R\geqslant\min\{R_a,R_b\}$.

3. 恒等变形方式

(1) 通项、下标一起变 .

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=k+l}^{\infty}a_{n-l}x^{n-l},$$

其中 l 为整数，可正可负可为 0.

(2) 只变下标，不变通项 .

$$\sum_{n=k}^{\infty}a_nx^n=a_kx^k+a_{k+1}x^{k+1}+\cdots+a_{k+l-1}x^{k+l-1}+\sum_{n=k+l}^{\infty}a_nx^n.$$

(3) 只变通项，不变下标．

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n x^n = x^l \sum_{n=k}^{\infty} a_n x^{n-l}.$$

例如，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} x^{2n+2} = a_0 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{2n} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) x^{2n}.$$

4. 性质

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上连续．

【注】 如果幂级数在收敛区间的端点 $x=R$（或 $x=-R$）处收敛，则和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R]$（或 $[-R, R)$）上连续，即 $\lim\limits_{x\to R^-} S(x) = S(R)$（或 $\lim\limits_{x\to -R^+} S(x) = S(-R)$）.

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛域 I 上可积，且有逐项积分公式

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} (x \in I),$$

逐项积分后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径，但收敛域可能扩大．

(3) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在其收敛区间 $(-R, R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} (|x| < R),$$

逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径，但收敛域可能缩小．

5. 重要展开式

(1) $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty$．

(2) $\frac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1$．

(3) $\frac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1$．

(4) $\ln(1+x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \cdots, -1 < x \leqslant 1$．

(5) $\sin x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

$$=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty .$$

(6) $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

$$=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots,\ -\infty<x<+\infty .$$

(7) $$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots,\ \begin{cases}x\in(-1,1),\text{当}\alpha\leqslant-1\text{时},\\ x\in(-1,1],\text{当}-1<\alpha<0\text{时},\\ x\in[-1,1],\text{当}\alpha>0\text{且}\alpha\notin\mathbf{N}_+\text{时},\\ x\in(-\infty,+\infty),\text{当}\alpha\in\mathbf{N}_+\text{时}.\end{cases}$$

【注】(1)～(6) 右端 x 的取值范围是指收敛域，而对于 (7)，问题比较复杂，其收敛区间的端点是否收敛与 α 的取值有关，可以证明（这里不证）：

当 $\alpha\leqslant-1$ 时，收敛域为 $(-1,1)$；

当 $-1<\alpha<0$ 时，收敛域为 $(-1,1]$；

当 $\alpha>0$ 且 $\alpha\notin\mathbf{N}_+$ 时，收敛域为 $[-1,1]$；

当 $\alpha\in\mathbf{N}_+$ 时，收敛域为 $(-\infty,+\infty)$.

比如，当 $\alpha=-1$ 时，得到

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+\cdots,\ -1<x<1 ;$$

当 $\alpha=-\frac{1}{2}$ 时，得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\times3}{2\times4}x^2-\frac{1\times3\times5}{2\times4\times6}x^3+\cdots,\ -1<x\leqslant1 .$$

例 16.28　求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$ 的和函数 .

解

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)x^{n+1}$$

$$=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}\right)x^n$$

$$=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot1+\cdots+\frac{1}{n+1}\cdot1\right)x^n$$

$$=x\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}\overset{a_i}{\frac{1}{i+1}}\cdot\overset{b_{n-i}}{1}\right)x^n$$

$$=x\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}\right)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

$$=[-\ln(1-x)]\cdot\frac{1}{1-x}(-1<x<1).$$

例 16.29 设函数 $y=f(x)$ 满足 $y''+2y'+5y=0$，且 $f(0)=1,\ f'(0)=-1$.

(1) 求 $f(x)$ 的表达式；

(2) 设 $a_n=\int_{n\pi}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$.

解 (1) 由例 15.15 可知，$f(x)=\mathrm{e}^{-x}\cos 2x$.

(2) 由于 $\int f(x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-x}\cos 2x\mathrm{d}x=\dfrac{\begin{vmatrix}(\mathrm{e}^{-x})' & (\cos 2x)' \\ \mathrm{e}^{-x} & \cos 2x\end{vmatrix}}{(-1)^2+2^2}+C=\dfrac{-\mathrm{e}^{-x}\cos 2x+2\mathrm{e}^{-x}\sin 2x}{5}+C$，因此 $a_n=\dfrac{\mathrm{e}^{-n\pi}}{5}$，

故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\dfrac{\mathrm{e}^{-\pi}}{5(1-\mathrm{e}^{-\pi})}=\dfrac{1}{5(\mathrm{e}^{\pi}-1)}$.

例 16.30 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$ 的和函数 .

解 设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n}$，逐项求导，得 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{x^n}{n}\right)'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x},|x|<1$，然后两边积分，得 $S(x)-S(0)=\int_0^x\dfrac{\mathrm{d}t}{1-t}=-\ln(1-x)$. 又因为 $S(0)=0$，且当 $x=-1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ 收敛，故和函数 $S(x)=-\ln(1-x)+S(0)=-\ln(1-x),\ x\in[-1,1)$.

例 16.31 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$ 的和函数 .

解 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，则原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)$.

对 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$ 两边积分，得 $\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x nt^{n-1}\mathrm{d}t=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\dfrac{x}{1-x},|x|<1$. 再两边求导，得 $\left[\int_0^x S(t)\mathrm{d}t\right]'=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1}{(1-x)^2}$，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n=xS(x)=\dfrac{x}{(1-x)^2},|x|<1$.

【注】(1) 幂级数求和函数的突破口：

①当 $(an+b)^c$ 在分母上时，先导后积，见例 16.30.

②当 $(an+b)^c$ 在分子上时，先积后导，见例 16.31.

(2) 对于先积后导、先导后积的处理办法：

①先积后导：$\left[\int S(x)\mathrm{d}x\right]'=S(x)$.

②先导后积．由于 $\int_a^x S'(t)\mathrm{d}t=S(t)\Big|_a^x=S(x)-S(a)$，故 $S(x)=\int_a^x S'(t)\mathrm{d}t+S(a)$.

又由于当 a 为中心点时，$\begin{cases}\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n \overset{x=0}{=\!=\!=} a_0,\\ \sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \overset{x=x_0}{=\!=\!=} a_0\end{cases}$ 都收敛，故下限通常取中心点．

(3) 在解题过程中始终不要忘记标注收敛域．

(4) 建议大家记住由这两个例题所得到的结果．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=-\ln(1-x),\ -1\leqslant x<1;\ \sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2},\ -1<x<1\ .$$

利用这两个公式可直接得到如下常数项级数的和．

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n=-\ln\left(1-\frac{1}{2}\right)=\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2\ .$$

例 16.32　求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的和函数．

解　由例 16.23 知该级数的收敛域为 $[-1,1]$.

设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}(-1\leqslant x\leqslant 1)$，由于 $S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=\frac{1}{1+x^2}$，且 $S(0)=0$，所以 $S(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}+S(0)=\arctan x$，从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=xS(x)=x\arctan x(-1\leqslant x\leqslant 1)\ .$$

例 16.33　设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1,\ (n+1)a_{n+1}=\left(n+\frac{1}{2}\right)a_n$，证明：当 $|x|<1$ 时，幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 收敛，并求其和函数．

解　由条件可知，$a_n\neq 0$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{2}}{n+1}=1\text{，}$$

所以幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为 1，从而当$|x|<1$时，幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$收敛．

当$|x|<1$时，设$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，逐项求导得

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\\&=1+xS'(x)+\frac{1}{2}S(x)\text{，}\end{aligned}$$

所以
$$S'(x)-\frac{1}{2(1-x)}S(x)=\frac{1}{1-x}\text{．}$$

根据一阶线性微分方程的通解公式得

$$S(x)=\mathrm{e}^{\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)}}\left[C+\int\mathrm{e}^{-\int\frac{\mathrm{d}x}{2(1-x)}}\cdot\frac{1}{1-x}\mathrm{d}x\right]=\frac{C}{\sqrt{1-x}}-2\text{．}$$

由题设知$S(0)=0$，得$C=2$，所以$S(x)=2\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}-1\right)$，$|x|<1$．

例 16.34 设$a_n=\int_0^1x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x$，$b_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\mathrm{d}t$，$n=1, 2, \cdots$，计算$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{b_n}$．

解
$$a_n\xlongequal{x=\sin t}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\cos^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t=b_n-b_{n+2}\text{．}$$

由华里士公式，知$b_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}b_n$，故$a_n=b_n-\frac{n+1}{n+2}b_n=\frac{1}{n+2}b_n$．于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+2}\text{．}$$

当$|x|<1$时，令$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+2}}{n+2}$，则

$$\begin{aligned}S'(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{n+1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n\\&=x\cdot\frac{-x}{1+x}=-\frac{x^2}{1+x}\text{．}\end{aligned}$$

于是

$$S(x)=S(0)+\int_0^x\left(-\frac{t^2}{1+t}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{1-t^2-1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^x(1-t)\mathrm{d}t-\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t$$

$$=x-\frac{x^2}{2}-\ln(1+x)\ .$$

当$x=1$时，根据莱布尼茨判别法，知$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n+2}$收敛，故

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{a_n}{b_n}=\lim_{x\to1^-}S(x)=\frac{1}{2}-\ln2\ .$$

五、函数展开成幂级数

1. 概念

如果函数$f(x)$在点$x=x_0$处存在任意阶导数，则称

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为函数$f(x)$在x_0处的**泰勒级数**，若收敛，则$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$.

特别地，当$x_0=0$时，称

$$f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

为函数$f(x)$的**麦克劳林级数**，若收敛，则$f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.

它们都被称为函数展开成幂级数 .

2. 求法

方法一（直接法）　逐个计算$a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(n=0,1,\cdots)$，并代入

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots\ .$$

但是直接法太麻烦了，我们一般都不用 .

方法二（间接法）　利用已知的幂级数展开式，通过变量代换、四则运算、逐项求导、逐项积分和待定系数法等方法得到函数的展开式 .

例 16.35 设$f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n^2+2}$，当$x\to 0$时，$f(x)$是$g(x)$的（　）.

(A) 高阶无穷小　　　　(B) 低阶无穷小

(C) 等价无穷小　　　　(D) 同阶非等价无穷小

解 应选 (C).

$g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{2n+1}}{n^2+2}=\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{6}+\cdots\sim\dfrac{x^3}{3}\ (x\to 0)$，于是

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{\frac{x^3}{3}}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cdot\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}=1\ .$$

【注】 当$x\to 0$时，用$\sin(\sin^2 x)\sim\sin^2 x\sim x^2$较简单，也可将$\sin(\sin^2 x)$直接展开，较麻烦，但第一项仍为$x^2$，虽然后面的展开项不同了，但最终结果不变.

例 16.36 函数$f(x)=\ln(1-x+x^2)$关于x的幂级数展开式为______.

解 应填$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{3n}-x^n}{n}\ (-1<x\leqslant 1)$.

由于$\ln(1-x+x^2)=\ln\dfrac{1+x^3}{1+x}=\ln\left|1+x^3\right|-\ln\left|1+x\right|$，且

$$\ln\left|1+x^3\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^3)^n}{n}\ \left(-1<x^3\leqslant 1，即-1<x\leqslant 1\right),$$

$$\ln\left|1+x\right|=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}\ \left(-1<x\leqslant 1\right),$$

于是

$$\ln(1-x+x^2)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x^3)^n}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{3n}-x^n}{n}(-1<x\leqslant 1).$$

例 16.37 将函数$f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$展开为$x$的幂级数.

解
$$f'(x)=\left(\arctan\frac{1+x}{1-x}\right)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n},\ -1<x<1\ .$$

对$f'(x)$逐项积分，下限取在$x_0=0$处的变上限定积分，得

$$\begin{aligned}\int_0^x f'(x)\mathrm{d}x&=\int_0^x\left[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right]\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x x^{2n}\mathrm{d}x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1<x<1\ ,\end{aligned}$$

则$f(x)=f(0)+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}=\frac{\pi}{4}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$，$-1<x<1$.

在$x=1$处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$虽然收敛，但函数$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$无定义，所以成立范围不能扩大到$x=1$.

在$x=-1$处，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$收敛，所以和函数在$x=-1$处右连续，而$f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$在$x=-1$处也右连续，于是

$$f(-1)=\lim_{x\to-1^+}f(x)=\lim_{x\to-1^+}\left[\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}\right]=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}\ . \tag{*}$$

所以有

$$\arctan\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1},\ -1\leqslant x<1\ .$$

【注】(1) 展开式在收敛区间内部可以逐项求导、逐项积分．但由此得到的新的展开式在收敛区间的端点处是否成立？要检查两点：**若端点处级数收敛，并且被展开的函数在该端点单侧连续**（左端点处右连续，右端点处左连续），像本例这样，则此展开式在端点处也成立．在具体做题时，(*)式可以不写．考试中常有涉及端点处展开式是否成立的问题，读者应按这个注的办法处理之．

(2) 小结．

① $\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n}$，$-1<x\leqslant1$.　　$[\ln(1+x)]'=\frac{1}{1+x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n$，$-1<x<1$

② $\frac{1}{2}\ln(1+x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{2n}$，$-1<x\leqslant1$.

③ $\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$，$-1\leqslant x\leqslant1$.　　$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}$，$-1<x<1$

④ $e^x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$，$-\infty<x<+\infty$.

⑤ $\frac{e^x+e^{-x}}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$-\infty<x<+\infty$.

⑥ $\cos x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!}$，$-\infty<x<+\infty$.

⑦ $\frac{e^x-e^{-x}}{2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$-\infty<x<+\infty$.

⑧ $\sin x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$，$-\infty<x<+\infty$.

常用上述 8 个公式来考一些简单的数项级数的和，如 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n)!}=\frac{\mathrm{e}+\mathrm{e}^{-1}}{2}$，再如

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{2n+2}{(2n+1)!}&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{(2n+1)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n+1)!}\\&=\cos 1+\sin 1\ .\end{aligned}$$

六、傅里叶级数（仅数学一）

1. 周期为 $2l$ 的傅里叶级数

定义 4 设函数 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的周期函数，且在 $[-l, l]$ 上可积，则称

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=0,1,2,\cdots),$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n=1,2,3,\cdots)$$

为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶系数 . 称级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

为 $f(x)$ 的以 $2l$ 为周期的傅里叶级数，记作

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right).$$

2. 狄利克雷收敛定理

设 $f(x)$ 是以 $2l$ 为周期的可积函数，如果在 $[-l, l]$ 上 $f(x)$ 满足：

①连续或只有有限个第一类间断点；

②至多只有有限个极值点 .

则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-l, l]$ 上处处收敛 . 记其和函数为 $S(x)$，则

$$S(x)=\begin{cases}f(x), & x\text{为连续点},\\ \frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}, & x\text{为间断点},\\ \frac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}, & x=\pm l.\end{cases}$$

3. 正弦级数和余弦级数

①当 $f(x)$ 为奇函数时，其展开式是正弦级数

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},\ b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n = 1,\ 2,\ \cdots .$$

②当$f(x)$为偶函数时，其展开式是余弦级数

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\mathrm{d}x,\ a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n = 1,\ 2,\ \cdots .$$

4. 只在$[0, l]$上有定义的函数的正弦级数和余弦级数展开

若$f(x)$是定义在$[0, l]$上的函数，首先用周期延拓，使其扩展为定义在$(-\infty, +\infty)$上的周期函数$F(x)$．在得到$F(x)$的傅里叶展开式后，再将其自变量限制在$[0, l]$上，就得到$f(x)$在$[0, l]$上的傅里叶级数展开式．《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》中只要求周期奇延拓和周期偶延拓．

(1) 周期奇延拓与正弦级数展开．

①周期奇延拓．

设$f(x)$定义在$[0, l]$上，令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x \leqslant l, \\ -f(-x), & -l \leqslant x < 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

再令$F(x)$为以$2l$为周期的周期函数．

②正弦级数展开．

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x,\ x \in [0,\ l],$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) .$$

(2) 周期偶延拓与余弦级数展开．

①周期偶延拓．

设$f(x)$定义在$[0, l]$上，令

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ f(-x), & -l \leqslant x < 0, \end{cases}$$

再令$F(x)$为以$2l$为周期的周期函数．

②余弦级数展开．

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi}{l}x,\ x \in [0,\ l],$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots) .$$

例 16.38 设$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2-2x, & \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1, \end{cases}$ $S(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\pi x, -\infty<x<+\infty$，其中

$$a_n=2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\cdots),$$

则$S\left(-\dfrac{5}{2}\right)=$______.

解 应填$\dfrac{3}{4}$.

由余弦级数$S(x)$为函数$f(x)$作周期偶延拓的傅里叶级数，知$S(x)$以 2 为周期且为偶函数，故

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-2-\frac{1}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right).$$

又$x=\dfrac{1}{2}$为$f(x)$的第一类间断点，故由狄利克雷收敛定理，得

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{f\left(\frac{1}{2}-0\right)+f\left(\frac{1}{2}+0\right)}{2}=\frac{\frac{1}{2}+\left(2-2\times\frac{1}{2}\right)}{2}=\frac{3}{4}.$$

例 16.39 将函数$f(x)=1-x^2(0\leqslant x\leqslant \pi)$展开成余弦级数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}$.

解 将$f(x)$延拓成$[-\pi,\pi]$上的偶函数，则$b_n=0, n=1,2,\cdots$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(1-x^2)\mathrm{d}x=2\left(1-\frac{\pi^2}{3}\right),$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^{\pi}\cos nx\mathrm{d}x-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(0-\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x\right)=\frac{-2}{\pi}\left(\frac{x^2\sin nx}{n}\bigg|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{2x\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2\pi\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}=\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}, n=1,2,\cdots,$$

故 $$1-x^2=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx=1-\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}\cos nx(0\leqslant x\leqslant \pi).$$

取$x=0$，得$1=1-\dfrac{\pi^2}{3}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{4\cdot(-1)^{n+1}}{n^2}$，于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{12}$.

基础习题精练

习题

16.1　有以下命题：

(1) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{2n-1}+u_{2n})$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

(2) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n+100}$收敛；

(3) 若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n}>1$，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散；

(4) 若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$收敛，则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$都收敛 .

则其中正确的是（　　）.

(A)(1)(2)　　(B)(2)(3)　　(C)(3)(4)　　(D)(1)(4)

16.2　当级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$都收敛时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$（　　）.

(A) 条件收敛　　(B) 绝对收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性不确定

16.3　设$a_n>0(n=1, 2, \cdots)$，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，常数$\lambda>0$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\sin\dfrac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$（　　）.

(A) 绝对收敛　　(B) 条件收敛　　(C) 发散　　(D) 敛散性与λ有关

16.4　若级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[\sin\dfrac{1}{n}-k\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\right]$收敛，则$k=$（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C) -1　　(D) -2

16.5　已知级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$绝对收敛，则$p$的取值范围是______.

16.6　若y满足微分方程$y'=x+y$及$y(0)=1$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[y\left(\dfrac{1}{n}\right)+k-\dfrac{1}{n}\right]$收敛，则$k$ =______.

16.7　幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}(x-1)^n$的收敛域为______.

16.8　（仅数学一）设$f(x)=\begin{cases}x^2, & -\pi\leqslant x<0,\\ -5, & 0\leqslant x<\pi,\end{cases}$则其以$2\pi$为周期的傅里叶级数在$x=\pm\pi$处收敛

于______.

16.9 判别下列正项级数的敛散性．

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n}{3n+2}\right)^{n}$；

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{\frac{1}{n}}\dfrac{\sqrt{x}}{1+x^{2}}\mathrm{d}x$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$．

16.10 判别 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}2^{\frac{\ln n}{n^{\alpha}}}$ 的敛散性 $(\alpha>0)$．

16.11 判别级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\ln\left[1+\dfrac{(-1)^{n}}{\sqrt{n}}\right]$ 的敛散性．

16.12 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{[3+(-1)^{n}]^{n}}{n}\cdot x^{n}$ 的收敛域．

16.13 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n}$ 在区间 $(-1,1)$ 内的和函数 $S(x)$．

16.14 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n}(n^{2}-n+1)}{2^{n}}$ 的和．

16.15 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^{2}-3x+2}$ 展开成 x 的幂级数，并指出其收敛区间．

16.16 设 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_{n}}{n!}x^{n}$，且满足 $\begin{cases}f''(x)-f'(x)-2f(x)=0,\\ f(0)=0,\ f'(0)=1.\end{cases}$ 求：(1) $f(x)$；(2) a_{n}．

16.17 将幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 的和函数展开成 $(x-1)$ 的幂级数．

16.18 (仅数学一) 将函数 $f(x)=2+|x|\,(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，并由此求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2}}$ 的和．

解 答

16.1 (B) **解** 由级数收敛的性质可知，加括号的级数收敛，原级数未必收敛，所以命题 (1) 不正确．若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_{n}+v_{n})$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_{n}$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_{n}$ 未必收敛，可知命题 (4) 不正确．也可取反例，对于命题 (1)，令 $u_{n}=(-1)^{n-1}$；对于命题 (4)，令 $u_{n}=(-1)^{n-1}$，$v_{n}=(-1)^{n}$．

由级数去掉前面有限项，不改变级数收敛性的性质，可知命题 (2) 正确 .

若级数满足 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$ 存在且大于 1，则级数发散，可知命题 (3) 正确 .

综上可知，应选 (B).

16.2　(B)　**解**　因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ 都为正项级数且收敛，又 $|a_nb_n|=\sqrt{a_n^2\cdot b_n^2}\leqslant\frac{a_n^2+b_n^2}{2}$，故由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|$ 收敛，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 绝对收敛 . 选 (B).

16.3　(A)　**解**　由题设知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数且收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛 .

记 $u_n=\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}$，$v_n=a_{2n}$，由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}}{a_{2n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\sin\frac{\lambda}{n}\right|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\lambda}{n}}{\frac{1}{n}}=\lambda>0,$$

故由正项级数比较判别法的极限形式知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 的敛散性相同 . 又 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}$ 收敛，故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|n\sin\frac{\lambda}{n}\right|a_{2n}$ 收敛，从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(n\sin\frac{\lambda}{n}\right)a_{2n}$ 绝对收敛 . 故选 (A).

16.4　(C)　**解**　利用泰勒展开式

$$\begin{aligned}\sin\frac{1}{n}-k\ln\left(1-\frac{1}{n}\right)&=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right)+\frac{k}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\\&=\frac{1+k}{n}+\frac{k}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right).\end{aligned}$$

若级数收敛，则 $1+k=0$，即 $k=-1$，应选 (C).

16.5　(1, +∞)　**解**

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}&=\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot\frac{1}{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]^p}\\&=\frac{(-1)^n}{n^p}\left[1-p\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right]\\&=\frac{(-1)^n}{n^p}-p\frac{1}{n^{p+1}}+\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot o\left(\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

由于原级数绝对收敛，故 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{p+1}}$ 绝对收敛，$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}\cdot o\left(\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛，故 $p>1$.

16.6 -1 **分析** 一个自然的想法是求出$y(x)$（这是可以的），但借助微分方程$y'=x+y$及$y(0)=1$求出$y'(0)$和$y''(0)$，再利用泰勒公式确定$u_n=y\left(\frac{1}{n}\right)+k-\frac{1}{n}$关于$\frac{1}{n}$的阶数会更简单．

解 由$y'=x+y$，$y(0)=1$可得$y'(0)=1$，且由$y''=1+y'$可得$y''(0)=2$，于是

$$y(x)=y(0)+y'(0)x+\frac{1}{2}y''(0)x^2+o(x^2)=1+x+x^2+o(x^2),$$

故$u_n=y\left(\frac{1}{n}\right)+k-\frac{1}{n}=\frac{1}{n^2}+1+k+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，当$k=-1$时，$u_n=\frac{1}{n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)$，即$u_n=y\left(\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n^2}\ (n\to\infty)$，故收敛．

16.7 $(-2,4)$ **解** 用比值判别法，因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{(n+1)(x-1)^{n+1}}{3^{n+1}}}{\frac{n(x-1)^n}{3^n}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3n}|x-1|=\frac{1}{3}|x-1|,$$

所以当$\frac{1}{3}|x-1|<1$，即$|x-1|<3$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$绝对收敛；当$\frac{1}{3}|x-1|>1$，即$|x-1|>3$时，幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}(x-1)^n$发散．

根据收敛半径的定义可知收敛半径$R=3$，收敛区间为$(-2,4)$．

又因为当$x=4$时，幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，发散；当$x=-2$时，幂级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$，发散，所以收敛域为$(-2,4)$．

16.8 $\frac{\pi^2-5}{2}$ **解** 由狄利克雷收敛定理可知，$f(x)$在$x=\pm\pi$处的傅里叶级数收敛于$\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$．

因为$f(\pi^-)=-5$，$f(-\pi^+)=x^2\big|_{x=-\pi}=\pi^2$，故$S(\pm\pi)=\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\pi^2-5}{2}$．

16.9 **解** (1) 显然，$0<\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n<\left(\frac{n}{3n}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$收敛，则由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$收敛．

(2) 因为$\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{\frac{1}{n}}\sqrt{x}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\frac{1}{n^{3/2}}$，又$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$收敛，故由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{1}{n}}\frac{\sqrt{x}}{1+x^2}\mathrm{d}x$收敛．

(3) 因为$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$，所以$\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}=\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}\geqslant\frac{1}{3\sqrt[3]{(n+1)^2}}$，又

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{2/3}}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{2/3}}$ 发散，故由比较判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$ 发散．

16.10　解　$\prod\limits_{n=2}^{\infty}2^{\frac{\ln n}{n^{\alpha}}}=2^{\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}}$，根据指数函数的连续性可知 $\prod\limits_{n=2}^{\infty}2^{\frac{\ln n}{n^{\alpha}}}$ 与 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^{\alpha}}$ 同敛散．

以下同例 16.8.

16.11　分析　这是交错级数，但不易判别 $\{|u_n|\}$ 的单调性，因此不能使用莱布尼茨判别法．为了能掌握一般项 $u_n=\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]$ 的阶数，需使用泰勒公式．

解　由泰勒公式得，$\quad\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right]=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)$，

由比较判别法，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}-o\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}$，而级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 是（条件）收敛的，故原级数发散．

16.12　分析　$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3+(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$ 不存在．

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[3+(-1)^{n+1}]^{n+1}}{n+1}\cdot\frac{n}{[3+(-1)^n]^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[3+(-1)^{n+1}]^n}{[3+(-1)^n]^n}\cdot[3+(-1)^{n+1}]\cdot\frac{n}{n+1}$ 不存在（因为当 n 为奇数，且 $n\to\infty$ 时 $\frac{n}{n+1}\to1$，$\frac{[3+(-1)^{n+1}]^n}{[3+(-1)^n]^n}\to+\infty$，$[3+(-1)^{n+1}]\to4$）．

但 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ 都不存在，并不能判定原级数的收敛半径一定不存在．

解　现考虑原级数的奇、偶项级数．

由于 $a_n=\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}=\begin{cases}\frac{4^n}{n}, & n\text{为偶数},\\ \frac{2^n}{n}, & n\text{为奇数},\end{cases}$ 故原级数的奇、偶项级数分别为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}\cdot x^{2k-1}$ 与 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}\cdot x^{2k}$．

①由比值判别法求出级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2^{2k-1}}{2k-1}\cdot x^{2k-1}$ 的收敛半径 $R_1=\frac{1}{2}$，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{4^{2k}}{2k}\cdot x^{2k}$ 的收敛半径 $R_2=\frac{1}{4}$，则原级数的收敛半径 $R=\min\{R_1, R_2\}=\frac{1}{4}$．

②当 $x=\frac{1}{4}$ 时，原级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}$，且 $\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}=\begin{cases}\frac{1}{(2k-1)\cdot2^{2k-1}}, & n=2k-1,\\ \frac{1}{2k}, & n=2k.\end{cases}$

由于$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}$收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$发散，因此$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{1}{4^n}$发散 .

③当$x=-\frac{1}{4}$时，原级数为$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{4^n}$，且

$$\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{4^n}=\begin{cases}-\dfrac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{2k}, & n=2k.\end{cases}$$

由于$-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)\cdot 2^{2k-1}}$收敛，$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}$发散，故$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[3+(-1)^n]^n}{n}\cdot\frac{(-1)^n}{4^n}$发散 .

综上，幂级数的收敛域为$\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right)$.

16.13　解　设

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}-1\right)x^{2n},\ S_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{2n+1},\ S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n},$$

则

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x),\ x\in(-1,1)\ .$$

由于

$$S_2(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},$$

$$[xS_1(x)]'=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2n}=\frac{x^2}{1-x^2},\ x\in(-1,1),$$

因此

$$xS_1(x)=\int_0^x\frac{t^2}{1-t^2}\mathrm{d}t=-x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\ .$$

又由于

$$S_1(0)=0,$$

故

$$S_1(x)=\begin{cases}-1+\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

因此

$$S(x)=S_1(x)-S_2(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2x}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{1-x^2}, & |x|\in(0,1),\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

16.14　解

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{1+\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

设$S(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}=\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^n\right)''=\frac{2}{(1-x)^3}$，$|x|<1$，则

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^n=\frac{2x^2}{(1-x)^3},\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\frac{4}{27},$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n^2-n+1)}{2^n}=\frac{4}{27}+\frac{2}{3}=\frac{22}{27}.$$

16.15　解　$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2-x}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x}{2}},$$

由麦克劳林展开式知

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1},\ x\in(-1,\ 1),$$

$$\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{x}{2}\right)^n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1},\ x\in(-2,\ 2),$$

从而有

$$f(x)=\frac{1}{x^2-3x+2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)x^{n-1},\ x\in(-1,\ 1).$$

16.16　解　(1) 特征方程为$r^2-r-2=0$，得$r_1=-1,\ r_2=2$，故通解为

$$f(x)=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{2x}.$$

由$f(0)=0,\ f'(0)=1$，得

$$\begin{cases}C_1+C_2=0,\\-C_1+2C_2=1,\end{cases}$$

故$C_1=-\frac{1}{3},\ C_2=\frac{1}{3}$，所以

$$f(x)=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}.$$

(2)　$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n!}x^n=-\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2x)^n}{n!}$$

$$=-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^n}{n!}+\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n\cdot x^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{3}\right)(-1)^n+\frac{2^n}{3}\right]\frac{x^n}{n!},$$

故 $a_n=\frac{1}{3}[(-1)^{n+1}+2^n]$.

16.17 解 令 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n-1}=2\sin\frac{x}{2}$，$-\infty<x<+\infty$，利用三角函数公式展开，得

$$S(x)=2\sin\frac{x}{2}=2\sin\frac{1+x-1}{2}=2\left(\sin\frac{1}{2}\cos\frac{x-1}{2}+\cos\frac{1}{2}\sin\frac{x-1}{2}\right)$$

$$=2\sin\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}+2\cos\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n+1},\ -\infty<x<+\infty.$$

【注】本题用幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!2^{2n-2}}x^{2n-1}$ 来包装函数 $2\sin\frac{x}{2}$，这种包装要能识别出来.

16.18 解 由于 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是偶函数，因此

$$a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,$$

$$a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\mathrm{d}x=\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2},\ n=1,2,\cdots,$$

$$b_n=0,\ n=1,2,\cdots.$$

因为所给函数在区间 $[-1,1]$ 上满足狄利克雷的充分条件，故

$$2+|x|=\frac{5}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(\cos n\pi-1)}{n^2\pi^2}\cos n\pi x=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(2n+1)\pi x}{(2n+1)^2}.$$

当 $x=0$ 时，$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}$，从而 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$. 又

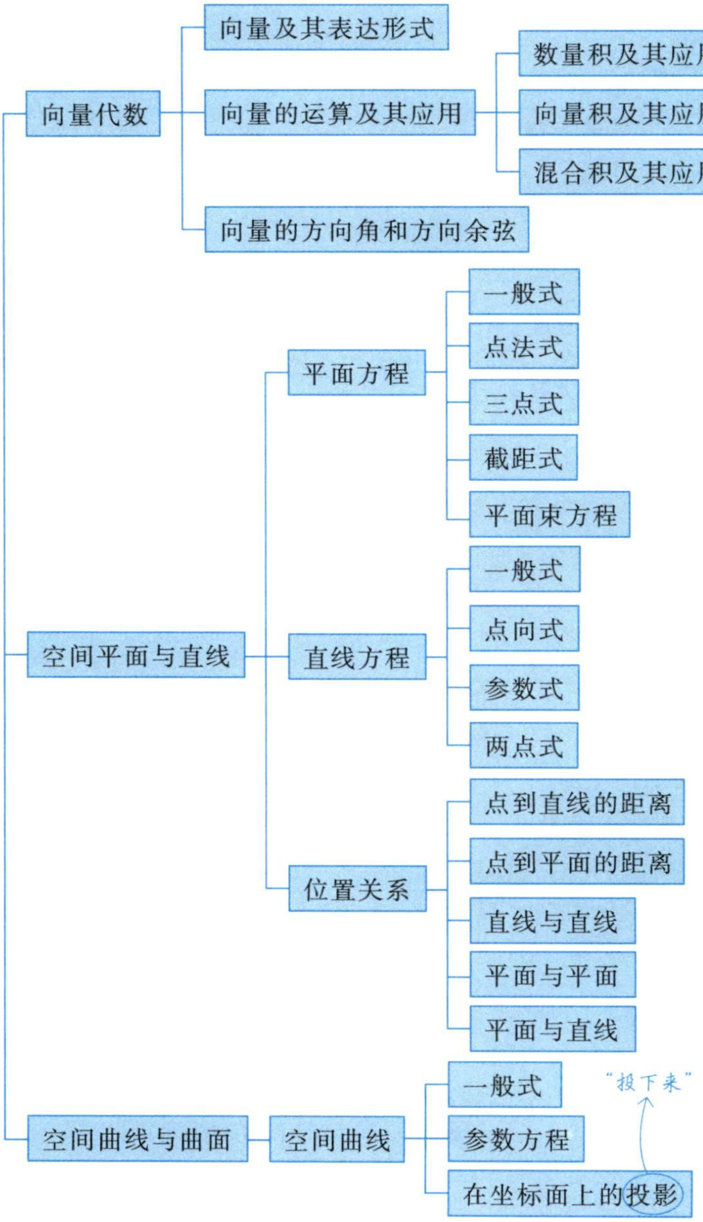
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

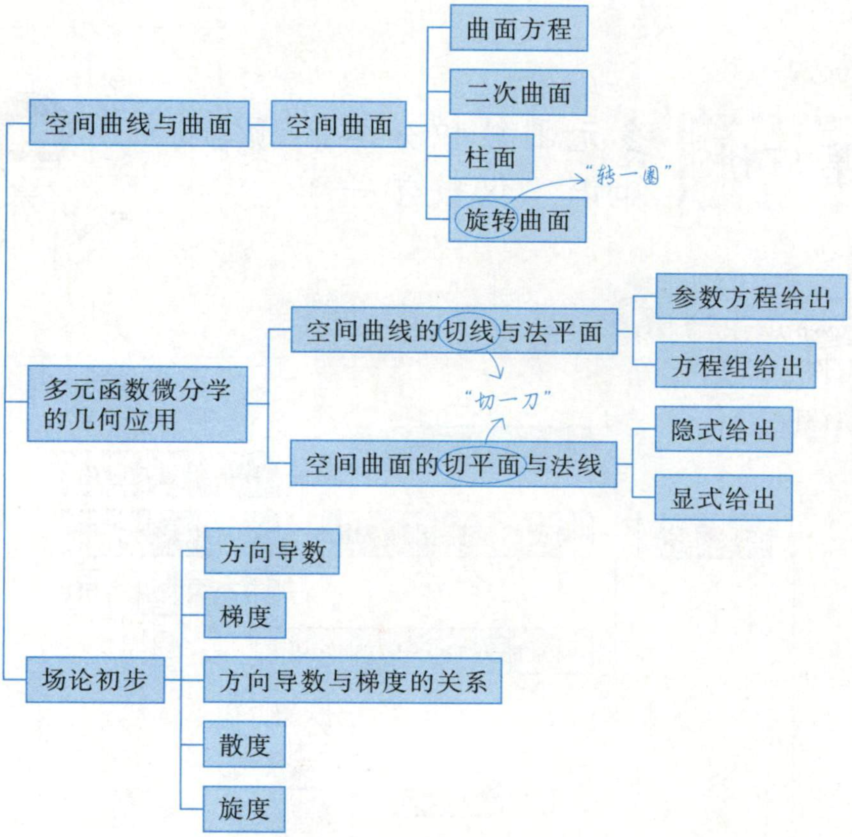
故

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

第17讲 多元函数积分学的预备知识（仅数学一）

基础知识结构





基础内容精讲

一、向量代数

1. 向量及其表达形式

既有大小又有方向的量称为**向量**.

【**注**】两个向量，只要它们的大小相等、方向相同，它们就是相等的向量，与它们在空间中的位置无关(这也称为**向量的自由性**).

向量的表达形式为 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$.

2. 向量的运算及其应用

设 $\boldsymbol{a}=(a_x, a_y, a_z)$, $\boldsymbol{b}=(b_x, b_y, b_z)$, $\boldsymbol{c}=(c_x, c_y, c_z)$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ 均是非零向量 .

(1) 数量积 (内积、点积) 及其应用 .

①$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z)=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$.

②$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta$，则 $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，其中 θ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 .

→定"位置关系"

③$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\theta=0\Leftrightarrow a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z=0$.

④$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}$，称为 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的**投影** .

(2) 向量积 (外积、叉积) 及其应用 .

①$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\end{vmatrix}$，其中 $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\theta$，用右手规则确定方向 (转向角不超过 π)，θ 为 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的夹角 .

②$\boldsymbol{a}\,/\!/\,\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\theta=0$ 或 $\pi\Leftrightarrow\dfrac{a_x}{b_x}=\dfrac{a_y}{b_y}=\dfrac{a_z}{b_z}$.

(3) 混合积及其应用 .

①$[\boldsymbol{abc}]=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}$.

②$\begin{vmatrix}a_x&a_y&a_z\\b_x&b_y&b_z\\c_x&c_y&c_z\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow$ 三向量共面 .

3. 向量的方向角和方向余弦

(1) 非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 x 轴、y 轴和 z 轴正向的夹角 α，β，γ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的**方向角** .

(2) $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦，且 $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\boldsymbol{a}|}$，$\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\boldsymbol{a}|}$.

(3) $\boldsymbol{a}^{\circ}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的**单位向量** (表示方向的向量).

(4) 任意向量 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}=(r\cos\alpha, r\cos\beta, r\cos\gamma)=r(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$，其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦，r 为 $\boldsymbol{r}$ 的模，$\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$，$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

例 17.1 设函数$f(x, y)$在点$(0, 0)$处可微，$f(0, 0)=0$，$\boldsymbol{n}=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\right|_{(0, 0)}$，则

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x, y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=\underline{\qquad}.$$

解 应填0.

因为$f(x, y)$在点$(0, 0)$处可微，且$f(0, 0)=0$，所以

$$f(x, y)=f(x, y)-f(0, 0)=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}(x-0)+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}(y-0)+o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right),$$

故$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y-f(x, y)=o\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$，即

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y-f(x, y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

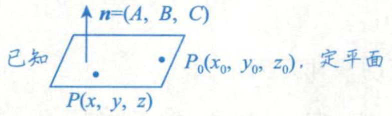
因为$\boldsymbol{n}=\left.\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)\right|_{(0, 0)}$，所以$\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x, y))=\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0, 0)}{\partial y}y-f(x, y)$，从而

$$\lim_{(x, y)\to(0, 0)}\frac{\boldsymbol{n}\cdot(x, y, f(x, y))}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

二、空间平面与直线

1. 平面方程

以下假设平面的法向量$\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.



①一般式：$Ax+By+Cz+D=0$.

②点法式：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

③三点式：$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ x-x_3 & y-y_3 & z-z_3 \end{vmatrix}=0$（平面过不共线的三点$P_i(x_i, y_i, z_i), i=1, 2, 3$）.

④截距式：$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$（平面过$(a, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, c)$三点）.

⑤平面束方程：设π_i：$A_ix+B_iy+C_iz+D_i=0, i=1, 2$. A_1, B_1, C_1与A_2, B_2, C_2不成比例，则过L：$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$的平面束方程为

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0\ (\text{不含}\ \pi_2),$$

或 $$A_2x+B_2y+C_2z+D_2+\lambda(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)=0\ (\text{不含 }\pi_1).$$

2. 直线方程

以下假设直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$.

①一般式：$\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\ \boldsymbol{n}_1=(A_1,B_1,C_1),\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0,\boldsymbol{n}_2=(A_2,B_2,C_2),\end{cases}$ 其中 $\boldsymbol{n}_1$ 不平行于 $\boldsymbol{n}_2$.

【注】其几何背景很直观，是两个平面的交线，且该直线的方向向量 $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_2$.

②点向式：$\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$.

③参数式：$\begin{cases}x=x_0+lt,\\ y=y_0+mt,\\ z=z_0+nt,\end{cases}$ $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为直线上的已知点，t 为参数 .

④两点式：$\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$（直线过不同的两点 $P_i(x_i,y_i,z_i)$, $i=1,2$ ）.

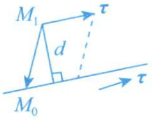
3. 位置关系

(1) 点到直线的距离 .

点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 到直线 $L:\dfrac{x-x_0}{l}=\dfrac{y-y_0}{m}=\dfrac{z-z_0}{n}$ 的距离

$$d=\frac{|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{M_1M_0}|}{|\boldsymbol{\tau}|}=\frac{\left\|\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ l & m & n\\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1\end{matrix}\right\|}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

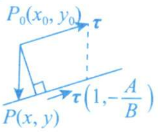
$\begin{cases}S_{\square}=|\boldsymbol{\tau}|\cdot d,\\ S_{\square}=|\boldsymbol{\tau}\times\overrightarrow{M_1M_0}|.\end{cases}$



其中向量 $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$, $M_0=(x_0,y_0,z_0)$, $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$.

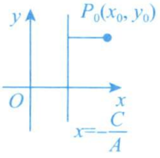
【注】更为简单的是平面的情形：设在二维平面上直线 L 的方程为 $Ax+By+C=0$，点 P_0 的坐标为 (x_0,y_0)，则点 P_0 到直线 L 的距离公式为 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

若 $B\neq0$，$\begin{cases}S_{\square}=|\overrightarrow{P_0P}\times\boldsymbol{\tau}|,\\ S_{\square}=|\boldsymbol{\tau}|\cdot d,\end{cases}$ 则 $d=\dfrac{\left\|\begin{matrix}x-x_0 & y-y_0\\ 1 & -\dfrac{A}{B}\end{matrix}\right\|}{\sqrt{1+\left(-\dfrac{A}{B}\right)^2}}=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.



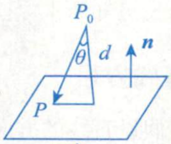
若 $A\neq0$, $B=0$，则 $Ax+C=0$, $x=-\dfrac{C}{A}$,于是

$$d=|x-x_0|=\left|x_0+\frac{C}{A}\right|=\frac{|Ax_0+0y_0+C|}{\sqrt{A^2+0^2}}.$$



综上，成立.

(2) 点到平面的距离 .



点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 的距离 $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

$$d=\frac{|\overrightarrow{P_0P}\cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}=\frac{|\overrightarrow{P_0P}||\boldsymbol{n}|\cos\theta}{|\boldsymbol{n}|}=|\overrightarrow{P_0P}|\cos\theta=\frac{|A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

(3) 直线与直线 .

设 $\boldsymbol{\tau}_1=(l_1, m_1, n_1)$, $\boldsymbol{\tau}_2=(l_2, m_2, n_2)$ 分别为直线 L_1, L_2 的方向向量 .

① $L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \perp \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$.

② $L_1 \,/\!/\, L_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}_1 \,/\!/\, \boldsymbol{\tau}_2 \Leftrightarrow \dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$.

③直线 L_1, L_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|}$，其中 $\theta=\min\{\widehat{(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)}, \pi-\widehat{(\boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2)}\}\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(4) 平面与平面 .

设平面 π_1, π_2 的法向量分别为 $\boldsymbol{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$, $\boldsymbol{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$.

① $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \perp \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

② $\pi_1 \,/\!/\, \pi_2 \Leftrightarrow \boldsymbol{n}_1 \,/\!/\, \boldsymbol{n}_2 \Leftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.

③平面 π_1, π_2 的夹角 $\theta=\arccos\dfrac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1||\boldsymbol{n}_2|}$，其中 $\theta=\min\{\widehat{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}, \pi-\widehat{(\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2)}\}\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

(5) 平面与直线 .

设直线 L 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(l, m, n)$，平面 π 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(A, B, C)$.

① $L \perp \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} \,/\!/\, \boldsymbol{n} \Leftrightarrow \dfrac{l}{A}=\dfrac{m}{B}=\dfrac{n}{C}$.

② $l \,/\!/\, \pi \Leftrightarrow \boldsymbol{\tau} \perp \boldsymbol{n} \Leftrightarrow Al+Bm+Cn=0$.

③直线 L 与平面 π 的夹角 $\theta=\arcsin\dfrac{|\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{\tau}||\boldsymbol{n}|}$，其中 $\theta=\left|\dfrac{\pi}{2}-\widehat{(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{n})}\right|\in\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

例 17.2 与两直线

$$\begin{cases} x=1, \\ y=-1+t, \\ z=2+t, \end{cases} \quad \frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$$

都平行，且过原点的平面方程为______.

解 应填 $x-y+z=0$.

所求平面法向量可取为

$$\boldsymbol{n}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k} .$$

由题设可知所求平面过原点，则所求平面方程为

$$-1\cdot(x-0)+1\cdot(y-0)-1\cdot(z-0)=0,$$

即

$$x-y+z=0.$$

例 17.3　已知直线 L 是直线 L_0：

$$\begin{cases}2x-z-3=0,\\ y-2z+4=0\end{cases}$$

在平面 $x+y-z=5$ 上的投影方程，求 L 的表达式．

解　设过直线 L_0 的平面束方程为 $(2x-z-3)+\lambda(y-2z+4)=0$，即

$$2x+\lambda y-(2\lambda+1)z+4\lambda-3=0,$$

其中 λ 为待定常数．此平面与平面 $x+y-z=5$ 垂直的条件是

$$2\cdot1+\lambda\cdot1-(2\lambda+1)\cdot(-1)=0,$$

解得 $\lambda=-1$，故直线 L 为

$$\begin{cases}2x-y+z-7=0,\\ x+y-z=5.\end{cases}$$

例 17.4　设有直线 L_1：$\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-5}{-2}=\dfrac{z+8}{1}$ 与 L_2：$\begin{cases}x-y=6,\\ 2y+z=3,\end{cases}$ 则 L_1 与 L_2 的夹角为（　　）．

(A) $\dfrac{\pi}{6}$　　(B) $\dfrac{\pi}{4}$　　(C) $\dfrac{\pi}{3}$　　(D) $\dfrac{\pi}{2}$

解　应选 (C).

直线 L_1 的方向向量为 $\boldsymbol{\tau}_1=(1,-2,1)$，直线 L_2 的方向向量为

$$\boldsymbol{\tau}_2=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

从而直线 L_1 和 L_2 的夹角 φ 的余弦为 $\cos\varphi=\dfrac{|\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2|}{|\boldsymbol{\tau}_1||\boldsymbol{\tau}_2|}=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{6}}=\dfrac{1}{2}$，因此 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}$．

三、空间曲线与曲面

1. 空间曲线

(1) 一般式 Γ：$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0.\end{cases}$

【**注**】其几何背景为两个曲面的交线．

(2) 参数方程 $\Gamma:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\ t\in[\alpha,\beta]\ .\\ z=\omega(t),\end{cases}$

【注】 在 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中选取某直角坐标变量为自变量（看作参数），解出其他两变量为此变量的函数，即得参数式 . 如曲线 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ y=0,\end{cases}$ 令 $x=t$，则可写成参数式方程：$\begin{cases}x=t,\\ y=0,\\ z=f(t,0).\end{cases}$ 当然，有时由于后两变量解出为第一变量的函数表达式带来多值或根式等麻烦事，或者甚至“解不出”，则一般用新的变量作参数再写参数方程，如下面的注；亦或题设直接给出参数方程，如例 17.6.

(3) 在坐标面上的投影 .

以求曲线 Γ 在 xOy 平面上的投影曲线为例 . 将 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 中的 z 消去，得到 $\varphi(x,y)=0$，则曲线 Γ 在 xOy 面上的投影曲线包含于曲线 $\begin{cases}\varphi(x,y)=0,\\ z=0.\end{cases}$

①往 xOy 面投影，消 z；往 xOz 面投影，消 y；往 yOz 面投影，消 x.
②联立方程，且令 $z=0$ 或 $y=0$ 或 $x=0$.

曲线 Γ 在其他平面上的投影曲线可类似求得 .

【注】 将 $\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0\end{cases}$ 消去某变量（例如消去 z），便得该曲线在 $z=0$ 平面上的投影曲线方程 $\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=0,\end{cases}$ 如果 $f(x,y)=0$ 能容易地写出它的参数式：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ t\in I,$$

其中 I 为某区间，则以 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 代入原曲线的方程中，若能解得单值的 $z=z(t)$，则得原曲线的参数式：

$$x=x(t),\ y=y(t),\ z=z(t),\ t\in I\ .$$

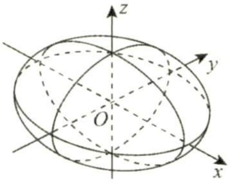
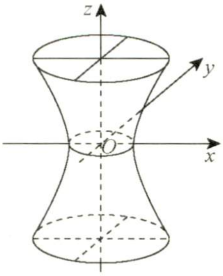
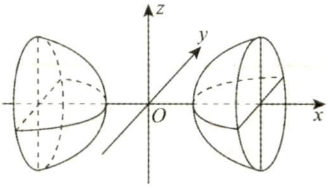
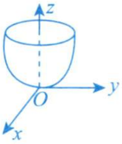
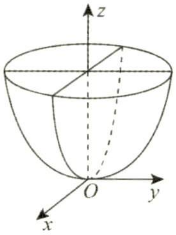
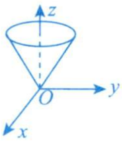
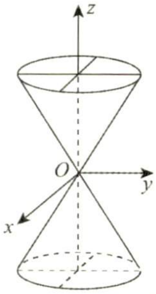
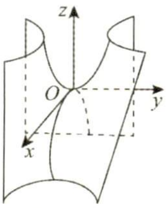
如将 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ z=x+y\end{cases}$ 的方程化为参数形式

$$\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\sin t,\qquad (0\leqslant t\leqslant 2\pi)\ .\\ z=\cos t+\sin t\end{cases}$$

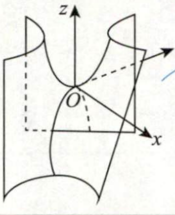
2. 空间曲面

(1) 曲面方程：$F(x,y,z)=0$.

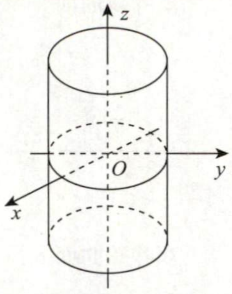
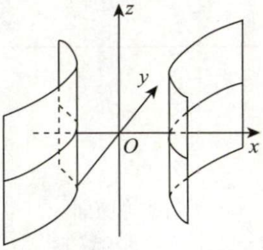
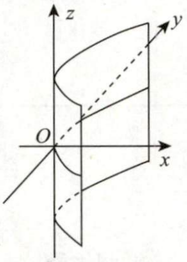
(2) 二次曲面 .

曲面名称	方程	图形
椭球面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	
单叶双曲面	两正一负 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
双叶双曲面	一正两负 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	
椭圆抛物面	$\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$ 旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ 	
椭圆锥面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$ $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 	
双曲抛物面（马鞍面）	$-\frac{x^2}{2p}+\frac{y^2}{2q}=z(p,q>0)$	

续表

曲面名称	方程	图形
双曲抛物面（马鞍面）	$z=xy$	 在上图的基础上，当 x 轴与 y 轴逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$.

(3) 柱面：动直线沿定曲线平行移动所形成的曲面 .

椭圆柱面	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	
双曲柱面	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	
抛物柱面	$y=ax^2(a>0)$	

(4) 旋转曲面：曲线 Γ 绕一条定直线旋转一周所形成的曲面 .

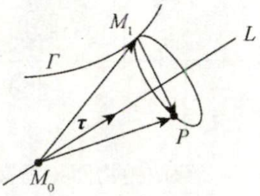


图 17-1

曲线 $\Gamma:\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 绕直线 $L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$ 旋转一周形成一个旋转曲面，旋转曲面方程的求法如下 .

如图 17-1 所示，设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，方向向量 $\boldsymbol{\tau}=(l,m,n)$. 在母线 Γ 上任取一点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$，则过 M_1 的纬圆上的任意一点 $P(x,y,z)$ 满足条件

$$\overrightarrow{M_1P}\perp\boldsymbol{\tau},\ |\overrightarrow{M_0P}|=|\overrightarrow{M_0M_1}|,$$

即
$$\begin{cases} l(x-x_1)+m(y-y_1)+n(z-z_1)=0, \\ (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2+(z_1-z_0)^2, \end{cases}$$

与方程$F(x_1, y_1, z_1)=0$和$G(x_1, y_1, z_1)=0$联立消去x_1，y_1，z_1，便可得到旋转曲面的方程 .

【注】 常考曲线Γ：$\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的旋转曲面的方程 .

如图 17-2 所示，在曲线Γ上任取一点$M_1(x_1, y_1, z_1)$，则过点M_1的纬圆上的任意一点$P(x, y, z)$满足条件$|\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OM_1}|$和$z=z_1$，即$x^2+y^2+z^2=x_1^2+y_1^2+z_1^2$且$z=z_1$，得

$$x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 .$$

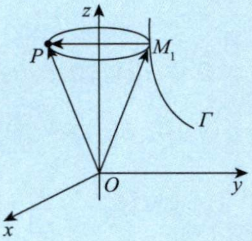


图 17-2

从方程组$\begin{cases} F(x_1, y_1, z)=0, \\ G(x_1, y_1, z)=0, \\ x^2+y^2=x_1^2+y_1^2 \end{cases}$中消去$x_1$和$y_1$，便得到旋转曲面的方程 .

如果能从方程组$\begin{cases} F(x, y, z)=0, \\ G(x, y, z)=0 \end{cases}$中解出$x=f_1(z)$和$y=f_2(z)$，则旋转曲面的方程为

$$x^2+y^2=[f_1(z)]^2+[f_2(z)]^2 .$$

如求$\begin{cases} y^2-(z-1)^2=1, \\ x=0 \end{cases}$绕$z$轴旋转一周而成的旋转曲面的方程，由方程组知$\begin{cases} x=0, \\ y^2=1+(z-1)^2, \end{cases}$则旋转曲面的方程为$x^2+y^2=0^2+1+(z-1)^2$，即$x^2+y^2-(z-1)^2=1$.

例 17.5　设Σ_1是由过点$(0, -1, 1)$与点$(0, 0, 0)$的直线L绕z轴旋转一周所得的旋转曲面位于$z \geqslant 0$的部分，Σ_2的方程为$z^2=2x$，则Σ_1与Σ_2的交线Γ在xOy面上的投影曲线方程为______.

解　应填$\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0. \end{cases}$

直线L的两点式方程为$\dfrac{x}{0}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$，参数方程为$\begin{cases} x=0, \\ y=-1+t, t\text{为参数}, \\ z=1-t, \end{cases}$即$\begin{cases} x=0, \\ y=-z, \end{cases}$由“三、2.(4)注”，得$\Sigma_1$的方程为$x^2+y^2=0^2+(-z)^2=z^2$，也即$z=\sqrt{x^2+y^2}$.

将$\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x \end{cases}$中的$z$消去，得$x^2+y^2=2x$，即得到投影曲线方程为$\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0. \end{cases}$曲线$\Gamma$和其在$xOy$面上的投影如图 17-3 所示 .

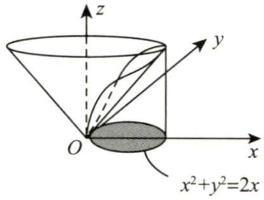


图 17-3

四、多元函数微分学的几何应用

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 用参数方程给出曲线：$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ t\in I.\\z=z(t),\end{cases}$

其中$x(t), y(t), z(t)$在I上可导，且三个导数不同时为0，则曲线在$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切向量$\boldsymbol{\tau}=(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$；

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}$.

法平面方程：$x'(t_0)(x-x_0)+y'(t_0)(y-y_0)+z'(t_0)(z-z_0)=0$.

(2) 用方程组给出曲线：$\begin{cases}F(x, y, z)=0,\\G(x, y, z)=0.\end{cases}$

当$\dfrac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial y} & \dfrac{\partial F}{\partial z}\\ \dfrac{\partial G}{\partial y} & \dfrac{\partial G}{\partial z}\end{vmatrix}\neq 0$时，可确定$\begin{cases}x=x,\\y=y(x),\\z=z(x).\end{cases}$

其在$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的切向量$\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\F'_x & F'_y & F'_z\\G'_x & G'_y & G'_z\end{vmatrix}_{P_0}=(A, B, C)$.

切线方程：$\dfrac{x-x_0}{A}=\dfrac{y-y_0}{B}=\dfrac{z-z_0}{C}$.

法平面方程：$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$.

2. 空间曲面的切平面与法线

(1) 用隐式方程给出曲面：$F(x, y, z)=0$，**其中F的一阶偏导数连续．**

其在$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的法向量$\boldsymbol{n}=(F'_x|_{P_0}, F'_y|_{P_0}, F'_z|_{P_0})$.

切平面方程：$F'_x|_{P_0}\cdot(x-x_0)+F'_y|_{P_0}\cdot(y-y_0)+F'_z|_{P_0}\cdot(z-z_0)=0$.

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{F'_x|_{P_0}}=\dfrac{y-y_0}{F'_y|_{P_0}}=\dfrac{z-z_0}{F'_z|_{P_0}}$.

(2) 用显式函数给出曲面：$z=f(x, y)\Rightarrow f(x, y)-z=0$，**其中$f$的一阶偏导数连续．**

其在$P_0(x_0, y_0, z_0)$处的法向量$\boldsymbol{n}=(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), \underline{-1})$.

若为正值，与z轴夹角为锐角，即法向量向上；若为负值，与z轴夹角为钝角，即法向量向下.

此法向量方向向下．

切平面方程：$f'_x(x_0, y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0, y_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0$．

法线方程：$\dfrac{x-x_0}{f'_x(x_0, y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f'_y(x_0, y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$．

例 17.6 空间曲线 Γ：$\begin{cases} x=\int_0^t \mathrm{e}^u\cos u\mathrm{d}u, \\ y=2\sin t+\cos t, \\ z=1+\mathrm{e}^{3t} \end{cases}$ 在 $t=0$ 处的切线方程为______．

解 应填 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$．

当 $t=0$ 时，$x=0, y=1, z=2$；由 $x'=\mathrm{e}^t\cos t$，$y'=2\cos t-\sin t$，$z'=3\mathrm{e}^{3t}$，得 $x'(0)=1$，$y'(0)=2$，$z'(0)=3$．于是，切线方程为 $\dfrac{x-0}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z-2}{3}$．

例 17.7 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 附近有定义，且 $f'_x(0, 0)=3$，则曲线 $\begin{cases} z=f(x, y), \\ y=0 \end{cases}$ 在点 $(0, 0, f(0, 0))$ 处的法平面方程为______．

解 应填 $x+3z-3f(0, 0)=0$．

曲线 $\begin{cases} z=f(x, y), \\ y=0 \end{cases}$ 可写成参数式：$\begin{cases} x=t, \\ y=0, \\ z=f(t, 0), \end{cases}$ 则

$$\boldsymbol{\tau}=(x'_t, y'_t, z'_t)\big|_{t=0}=(1, 0, f'_x(0, 0))=(1, 0, 3).$$

故所求法平面方程为 $x+3z-3f(0, 0)=0$．

例 17.8 曲面 $z-\mathrm{e}^z+2xy=3$ 在点 $(1, 2, 0)$ 处的切平面方程为______．

解 应填 $2x+y-4=0$.

令 $F(x, y, z)=z-\mathrm{e}^z+2xy-3$，则

$$F'_x\big|_{(1,2,0)}=2y\big|_{(1,2,0)}=4,\ F'_y\big|_{(1,2,0)}=2x\big|_{(1,2,0)}=2,\ F'_z\big|_{(1,2,0)}=(1-\mathrm{e}^z)\big|_{(1,2,0)}=0.$$

故切平面方程为 $4(x-1)+2(y-2)+0\cdot(z-0)=0$，即 $2x+y-4=0$．

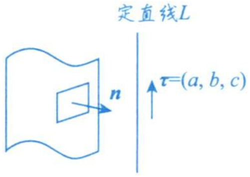
例 17.9 设 f 可微，则曲面 $\mathrm{e}^{2x-z}=f(\pi y-\sqrt{2}z)$ 是（　　）．

(A) 旋转抛物面　　(B) 双叶双曲面　　(C) 单叶双曲面　　(D) 柱面

解 应选 (D).

设 $F=f(\pi y-\sqrt{2}z)-\mathrm{e}^{2x-z}$，则曲面上任一点处的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-2\mathrm{e}^{2x-z}, \pi f', -\sqrt{2}f'+\mathrm{e}^{2x-z}).$$



设某定向量 $\boldsymbol{\tau}=(a,b,c)$（$a,b,c$ 不同时为零）与 $\boldsymbol{n}$ 垂直，即

$$\boldsymbol{n}\cdot(a,b,c)=-2a\mathrm{e}^{2x-z}+\pi bf'+(-\sqrt{2}f'+\mathrm{e}^{2x-z})c\equiv 0,$$

解得 $a=\dfrac{c}{2}, b=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}c$，令 $c=1$，则 $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{\sqrt{2}}{\pi}$，这样曲面上任一点处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 均与定向量 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{2}}{\pi},1\right)$ 垂直，这说明该曲面是柱面 .

五、场论初步

什么叫“场”？从数学上说，场就是空间区域 Ω 上的一种对应法则 .

(1) 如果 Ω 上的每一点 $M(x,y,z)$ 都对应着一个数量 u，则在 Ω 上就确定了一个数量函数 $u=u(x,y,z)$，它表示一个**数量场** . 数量场的例子很多，比如温度场，温度场只讲大小，不讲方向 .

(2) 如果 Ω 上的每一点 $M(x,y,z)$ 都对应着一个向量 $\boldsymbol{F}$，则在 Ω 上就确定了一个向量函数

$$\boldsymbol{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k},$$

它表示一个**向量场** . 向量场的例子也很多，比如引力场，引力场既讲大小，也讲方向 .

1. 方向导数

定义 设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 的某空间邻域 $U\subset\boldsymbol{R}^3$ 内有定义，l 为从点 P_0 出发的射线，$P(x,y,z)$ 为 l 上且在 U 内的任一点，则

$$\begin{cases}x-x_0=\Delta x=t\cos\alpha,\\ y-y_0=\Delta y=t\cos\beta,\\ z-z_0=\Delta z=t\cos\gamma.\end{cases}$$

以 $t=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}$ 表示 P 与 P_0 之间的距离，如图 17-4 所示，若极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{u(P)-u(P_0)}{t}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+t\cos\alpha,\ y_0+t\cos\beta,\ z_0+t\cos\gamma)-u(x_0,y_0,z_0)}{t}$$

存在，则称此极限为函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的**方向导数**，记作 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$.

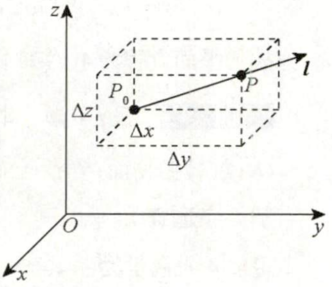


图 17-4

定理（方向导数的计算公式） 设三元函数 $u=u(x,y,z)$ 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处可微分，则 $u=u(x,y,z)$ 在点 P_0 处沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数都存在，且

$$\left.\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=\lim_{t\to 0^+}\frac{u(x_0+\Delta x,\ y_0+\Delta y,\ z_0+\Delta z)-u(x_0,y_0,z_0)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{u'_x(P_0)\Delta x+u'_y(P_0)\Delta y+u'_z(P_0)\Delta z+o(t)}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+(\Delta z)^2}}$$

$$=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma,$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为方向$\boldsymbol{l}$的方向余弦．

【注】二元函数$f(x,y)$的情况与三元函数类似．

2. 梯度

定义　设三元函数$u=u(x,y,z)$在点$P_0(x_0,y_0,z_0)$处具有一阶连续偏导数，则定义

$$\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))$$

为函数$u=u(x,y,z)$在点P_0处的**梯度**．

【注】$\textbf{grad}(u\pm v)=\textbf{grad}\,u\pm\textbf{grad}\,v$；

$\textbf{grad}(uv)=v\textbf{grad}\,u+u\textbf{grad}\,v$；

$\textbf{grad}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\textbf{grad}\,u-u\textbf{grad}\,v}{v^2}(v\neq 0)$．

3. 方向导数与梯度的关系

由方向导数的计算公式$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=u'_x(P_0)\cos\alpha+u'_y(P_0)\cos\beta+u'_z(P_0)\cos\gamma$与梯度的定义

$$\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0)),$$

可得到

$$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}=(u'_x(P_0),u'_y(P_0),u'_z(P_0))\cdot(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}\cdot\boldsymbol{l}^\circ$$

$$=\left|\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}\right|\,|\boldsymbol{l}^\circ|\cos\theta=\left|\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}\right|\cos\theta,$$

其中θ为$\textbf{grad}\,u\big|_{P_0}$与$\boldsymbol{l}^\circ$的夹角，当$\cos\theta=1$时，$\left.\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{l}}\right|_{P_0}$有最大值．

于是有重要结论：函数在某点的梯度是一个向量，它的方向与取得最大方向导数的方向一致，而它的模为方向导数的最大值，为

$$|\textbf{grad}\,u|=\sqrt{(u'_x)^2+(u'_y)^2+(u'_z)^2}\ .$$

4. 散度

定义　设向量场$\boldsymbol{A}(x,y,z)=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$，则

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

叫作向量场$\boldsymbol{A}$的**散度**.

5. 旋度

定义　设向量场$\boldsymbol{A}(x, y, z)=P(x, y, z)\boldsymbol{i}+Q(x, y, z)\boldsymbol{j}+R(x, y, z)\boldsymbol{k}$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

叫作向量场$\boldsymbol{A}$的**旋度**.

例 17.10　函数$f(x, y, z)=x^2y+z^2$在点$(1, 2, 0)$处沿向量$\boldsymbol{n}=(1, 2, 2)$的方向导数为（　　）.

(A) 12　　(B) 6　　(C) 4　　(D) 2

解　应选 (D).

因为函数可微分，且

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,2,0)}=2xy|_{(1,2,0)}=4,\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(1,2,0)}=x^2|_{(1,2,0)}=1,\ \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(1,2,0)}=2z|_{(1,2,0)}=0,$$

与$\boldsymbol{n}$同方向的单位向量为$\dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|}=\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}\right)$，所以所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,0)}=4\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}+0\times\frac{2}{3}=2\ .$$

例 17.11　设a, b为实数，函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3, 4)$处的方向导数中，沿方向$\boldsymbol{l}=-3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}$的方向导数最大，最大值为10. 则$a$, b的值分别为（　　）.

(A)−1，−1　　(B)−1，1　　(C)1，−1　　(D)1，1

解　应选 (A).

函数$z=2+ax^2+by^2$在点$(3, 4)$处的梯度为

$$\mathbf{grad}\,z|_{(3,4)}=6a\boldsymbol{i}+8b\boldsymbol{j}\ .$$

由题设条件，知$\begin{cases}6a=-3k,\\ 8b=-4k,\\ \sqrt{36a^2+64b^2}=10,\end{cases}$　其中$k>0$. 解得$a=-1, b=-1$.

例 17.12　已知函数$z=f(x, y)$可微，其在点$P_0(1, 2)$处沿从P_0到$P_1(2, 3)$的方向的方向导数为$2\sqrt{2}$，沿从P_0到$P_2(1, 0)$的方向的方向导数为-3，则z在点P_0处的最大方向导数为______.

解　应填$\sqrt{10}$.

如图 17-5 所示，$\boldsymbol{l}_1=\overrightarrow{P_0P_1}=(1, 1)$，$\boldsymbol{l}_2=\overrightarrow{P_0P_2}=(0, -2)$，且

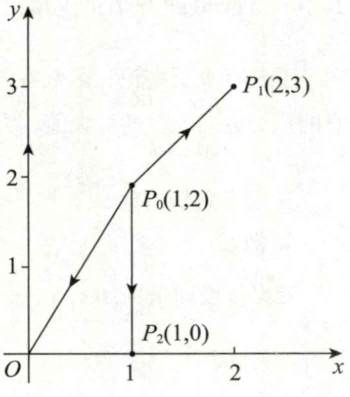


图 17-5

$$\boldsymbol{l}_1^{\circ}=(\cos\alpha_1, \cos\beta_1)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\boldsymbol{l}_2^{\circ}=(\cos\alpha_2, \cos\beta_2)=(0, -1).$$

由方向导数计算公式，有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2},$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot 0+\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot(-1)=-3,$$

解得 $z_x'(P_0)=1$, $z_y'(P_0)=3$，故 z 在点 P_0 处的最大方向导数为

$$\left|\mathbf{grad}\, z|_{P_0}\right|=\sqrt{[z_x'(P_0)]^2+[z_y'(P_0)]^2}=\sqrt{10}.$$

【注】 本题的问题可作如下推广：设 $z=f(x, y)$ 可微，记任意一点 $P_0(x_0, y_0)$，从 P_0 出发，沿两条不共线的方向 $\boldsymbol{l}_1^{\circ}=(\cos\alpha_1, \cos\beta_1)$ 与 $\boldsymbol{l}_2^{\circ}=(\cos\alpha_2, \cos\beta_2)$ 的方向导数分别为

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1^{\circ}}\right|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\cos\alpha_1+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\cos\beta_1,\\ \left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2^{\circ}}\right|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\cdot\cos\alpha_2+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\cdot\cos\beta_2,\end{cases}$$

其中 $\begin{vmatrix}\cos\alpha_1 & \cos\beta_1\\ \cos\alpha_2 & \cos\beta_2\end{vmatrix}\neq 0$.

(1) 若 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1^{\circ}}\right|_{P_0}$, $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2^{\circ}}\right|_{P_0}$ 不全为0，则该非齐次方程组有唯一解，如例17.12的解答过程.

(2) 若 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_1^{\circ}}\right|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}_2^{\circ}}\right|_{P_0}=0$，则该齐次方程组只有零解，即 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}=0$，故 $\mathrm{d}f|_{P_0}=\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}\mathrm{d}x+\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}\mathrm{d}y=0$. 由 P_0 的任意性，有 $\mathrm{d}f=0$，故 $f(x, y)$ 为一常数.

例 17.13　设 $\boldsymbol{F}(x, y, z)=xy\boldsymbol{i}-yz\boldsymbol{j}+zx\boldsymbol{k}$，则 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1, 1, 0)=$______.

解　应填 $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}$.

记三元向量函数 $\boldsymbol{F}(x, y, z)=(P, Q, R)$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(x, y, z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix},$$

这里$P=xy$, $Q=-yz$, $R=zx$ ，于是

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{F}(1,1,0)=\left.\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xy & -yz & zx\end{vmatrix}\right|_{(1,1,0)}=\left.(y\boldsymbol{i}-z\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{k})\right|_{(1,1,0)}=\boldsymbol{i}-\boldsymbol{k}\ .$$

基础习题精练

习题

17.1 设直线$L:\begin{cases}x+y-z+1=0,\\ x-y+3z+3=0,\end{cases}$平面$\Pi:x-2y-z+3=0$，则直线$L$（　　）.

(A) 平行于Π　(B) 在Π上　(C) 垂直于Π　(D) 与Π相交但不垂直

17.2 在曲线$x=t$, $y=-t^2$, $z=t^3$的所有切线中，与平面$x+2y+z=4$平行的切线（　　）.

(A) 只有 1 条　(B) 只有 2 条　(C) 至少有 3 条　(D) 不存在

17.3 已知曲面$z=4-x^2-y^2$上点P处的切平面平行于平面$2x+2y+z-1=0$，则点P的坐标是（　　）.

(A) $(1,-1,2)$　(B) $(-1,1,2)$　(C) $(1,1,2)$　(D) $(-1,-1,2)$

17.4 设$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，且$\boldsymbol{a}=(3,-5,8)$, $\boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，则$z=$______.

17.5 直线$L:\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-1}{-1}$在平面$\Pi:3x-y+3z=5$上的投影直线$L_0$的方程为______.

17.6 经过点$A(1,0,0)$与点$B(0,1,1)$的直线绕z轴旋转一周生成的曲面方程是______.

17.7 设u是由方程$\mathrm{e}^{z+u}-xy-yz-zu=0$所确定的$x, y, z$的隐函数，则$u=u(x,y,z)$在点$P(1,1,0)$处方向导数的最大值为______.

17.8 已知$\boldsymbol{F}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，则在点$(1,0,-1)$处的$\operatorname{div}\boldsymbol{F}$为______.

17.9 向量场$\boldsymbol{A}=(z,3x,2y)$的旋度$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=$______.

解答

17.1 (C) **解**　先将直线

$$L:\begin{cases}x+y-z+1=0, & ①\\ x-y+3z+3=0 & ②\end{cases}$$

化为点向式方程 .

由①＋②可得 $\dfrac{x+2}{-1}=z$；

由①－②可得 $\dfrac{y-1}{2}=z$.

因此所给直线化为

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1},$$

其方向向量为 $\boldsymbol{\tau}=(-1,2,1)$.

又所给平面的法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,-2,-1)$，有 $\boldsymbol{\tau}\,/\!/\,\boldsymbol{n}$，因此 $L\perp\Pi$，故选 (C).

17.2　(B)　**解**　曲线在 t_0 处的切向量为 $\boldsymbol{\tau}=(1,-2t_0,3t_0^2)$，该切线与平面 $x+2y+z=4$ 平行 $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\tau}$ 与该平面的法向量 $\boldsymbol{n}=(1,2,1)$ 垂直 $\Leftrightarrow \boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{n}=0\Leftrightarrow 1-4t_0+3t_0^2=0\Leftrightarrow t_0=1$ 或 $t_0=\dfrac{1}{3}$.

将 $t_0=1,\ t_0=\dfrac{1}{3}$ 代入曲线方程可得点 $(1,-1,1)$ 和点 $\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{9},\dfrac{1}{27}\right)$，再代入平面方程知两点均不在平面上，符合题意 . 故与平面平行的切线只有 2 条 .

17.3　(C)　**解**　设 P 点的坐标为 (x_0,y_0,z_0)，则曲面在 P 点的法向量为

$$\boldsymbol{n}=(-2x_0,-2y_0,-1),$$

又因为切平面平行于平面 $2x+2y+z-1=0$，则

$$\frac{-2x_0}{2}=\frac{-2y_0}{2}=\frac{-1}{1},$$

从而可得 $x_0=1,\ y_0=1$，代入曲面方程解得 $z_0=2$. 故选 (C).

17.4　1　**解**　由 $\boldsymbol{a}=(3,-5,8),\ \boldsymbol{b}=(-1,1,z)$，可知

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3-1,-5+1,8+z)=(2,-4,8+z),$$

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(3+1,-5-1,8-z)=(4,-6,8-z),$$

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+(8+z)^2}=\sqrt{20+(8+z)^2},$$

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{4^2+(-6)^2+(8-z)^2}=\sqrt{52+(8-z)^2},$$

由题设可知

$$\sqrt{20+(8+z)^2}=\sqrt{52+(8-z)^2},$$

可解得 $z=1$.

17.5 $\begin{cases}3x-y+3z=5,\\ x-3y-2z+1=0\end{cases}$ **解** 欲求直线L在已给平面Π上的投影直线L_0，应先求过L且与Π垂直的平面Π_1．为此先将L的方程化为一般式方程：

$$\begin{cases}x+z-2=0,\\ y+z-1=0,\end{cases}$$

则过L的平面束方程为

$$(x+z-2)+\lambda(y+z-1)=0,$$

其中与Π垂直的平面Π_1的法向量应满足

$$3\times 1+(-1)\lambda+3(1+\lambda)=0,$$

可解得$\lambda=-3$，则Π_1的方程为

$$x-3y-2z+1=0,$$

因此L在Π上的投影直线L_0的方程为

$$\begin{cases}3x-y+3z=5,\\ x-3y-2z+1=0.\end{cases}$$

17.6 $x^2+y^2-2z^2+2z-1=0$ **解** 由直线方程的两点式得直线AB的方程：

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z}{-1}.$$

写成参数式：

$$x=1+t,\ y=-t,\ z=-t,$$

得旋转曲面的方程：

$$x^2+y^2=(1-z)^2+z^2,\ \text{即}\ x^2+y^2-2z^2+2z-1=0\ .$$

17.7 $\sqrt{2}$ **解** 方向导数的最大值就是$\left|\mathbf{grad}\,u|_P\right|$．由所给方程两边对$x$求偏导数，$u$视为$x$，$y$，$z$的函数，有

$$\mathrm{e}^{z+u}\frac{\partial u}{\partial x}-y-z\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{y}{\mathrm{e}^{z+u}-z}\ .$$

当$x=1,\ y=1,\ z=0$时$u=0$，代入上式后，得$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=1$．类似可得$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=1,\ \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=0$．所以

$$\mathbf{grad}\,u|_P=(1,1,0),\ \left|\mathbf{grad}\,u|_P\right|=\sqrt{2}\ .$$

17.8 6 **解** 设向量场$\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则在点$M(x_0,y_0,z_0)$处

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{F}=\left.\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\right|_{M(x_0,\ y_0,\ z_0)}.$$

因为 $\frac{\partial(x^3)}{\partial x}=3x^2$，$\frac{\partial(y^3)}{\partial y}=3y^2$，$\frac{\partial(z^3)}{\partial z}=3z^2$，故

$$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=(3x^2+3y^2+3z^2)\big|_{(1,0,-1)}=6 .$$

17.9　$2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$　**解**　设向量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，则

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

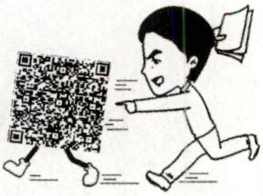
$$=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} .$$

因 $P=z$，$Q=3x$，$R=2y$，则

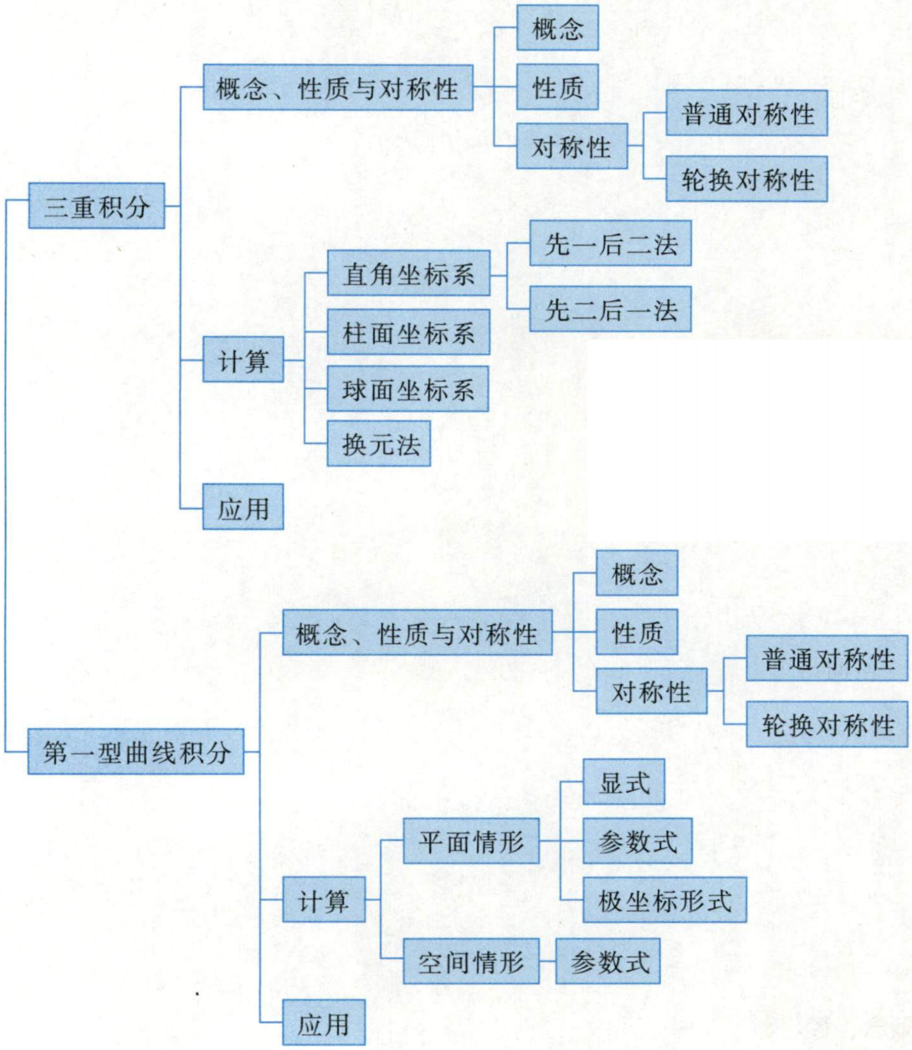
$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k} .$$

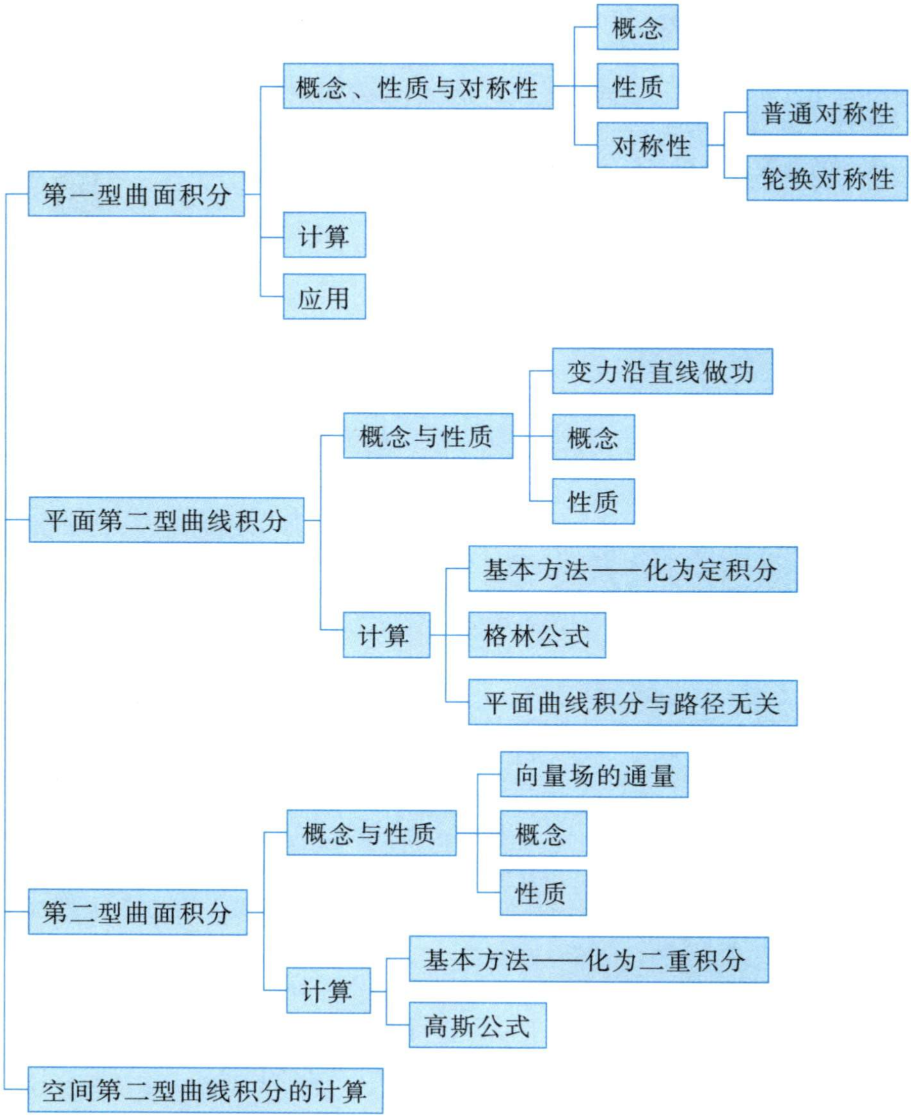
第18讲 多元函数积分学

（仅数学一）



基础知识结构





基础内容精讲

一、三重积分

（一）概念、性质与对称性

1. 概念

分割

设$f(x, y, z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数，将Ω任意分成n个小闭区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n,$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积．在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i)，作乘积

→近似　→求和

$f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i (i=1, 2, \cdots, n)$，并作和 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$．如果当各小闭区域直径中的最大值 λ

→取极限

趋于零时，这和的极限总存在（与 Δv_i 的分法及 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法均无关），则称此极限值为函数 $f(x, y, z)$ 在闭区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$，即

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i,$$

其中 $f(x, y, z)$ 称为被积函数，$f(x, y, z)\mathrm{d}v$ 称为被积表达式，$\mathrm{d}v$ 称为体积元素，x，y 与 z 称为积分变量，Ω 称为积分区域，$\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$ 称为积分和．

若 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上连续，则三重积分

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\,\mathrm{d}v$$

一定存在．

【注】 三重积分物理意义：设一物体占有 $Oxyz$ 上闭区域 Ω，在点 (x, y, z) 处的体密度为 $\rho(x, y, z)$，假定 $\rho(x, y, z)$ 在 Ω 上连续，则物体质量

$$M = \iiint\limits_{\Omega} \rho(x, y, z)\,\mathrm{d}v\ .$$

2. 性质

以下总假设 Ω 为空间有界闭区域．

性质 1(求空间区域的体积) $\iiint\limits_{\Omega} 1\,\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega} \mathrm{d}v = V$，其中 V 为 Ω 的体积．

性质 2(可积函数必有界) 设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积，则其在 Ω 上必有界．

性质 3(积分的线性性质) 设 k_1，k_2 为常数，则

$$\iiint\limits_{\Omega} [k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)]\,\mathrm{d}v = k_1\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v \pm k_2\iiint\limits_{\Omega} g(x, y, z)\mathrm{d}v\ .$$

性质 4(积分的可加性) 设 $f(x, y, z)$ 在 Ω 上可积，且 $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega$，$\Omega_1 \cap \Omega_2 = \varnothing$，则

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v = \iiint\limits_{\Omega_1} f(x, y, z)\mathrm{d}v + \iiint\limits_{\Omega_2} f(x, y, z)\mathrm{d}v\ .$$

性质 5(积分的保号性) 设 $f(x, y, z)$，$g(x, y, z)$ 在 Ω 上可积，且在 Ω 上 $f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$，则有

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v \leqslant \iiint\limits_{\Omega} g(x, y, z)\mathrm{d}v\ .$$

特殊地，有
$$\left|\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v\right| \leqslant \iiint_{\Omega}|f(x,y,z)|\,\mathrm{d}v .$$

性质6(三重积分的估值定理)　设M，m分别是$f(x,y,z)$在Ω上的最大值和最小值，V为Ω的体积，则有
$$mV \leqslant \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v \leqslant MV .$$

性质7(三重积分的中值定理)　设$f(x,y,z)$在Ω上连续，V为Ω的体积，则在Ω上至少存在一点(ξ,η,ζ)，使得
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = f(\xi,\eta,\zeta)V .$$

3. 普通对称性与轮换对称性

分析方法与二重积分完全一样.

(1) 普通对称性.

假设Ω关于xOz面对称（见图18-1），则
$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v = \begin{cases} 2\iiint_{\Omega_1} f(x,y,z)\mathrm{d}v, & f(x,y,z)=f(x,-y,z), \\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,-y,z), \end{cases}$$
其中Ω_1是Ω在xOz面右边的部分.

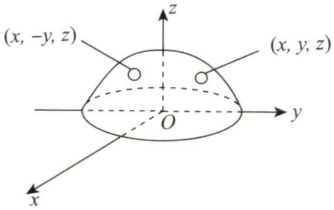


图 18-1

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2) 轮换对称性.

在直角坐标系下，若把x与y对调后，Ω不变，则$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(y,x,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，这就是**轮换对称性**.

关于其他情况与此类似.

如$\Omega=\left\{(x,y,z)\middle|x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\right\}$，则$\iiint_{\Omega} f(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega} f(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$可以化简计算.

具体应用见后面的例子.

（二）计算

(1) 直角坐标系 .

①先一后二法（先z后xy法，也叫**投影穿线法**）.

a. 适用场合 .

Ω有下曲面$z=z_1(x,y)$、上曲面$z=z_2(x,y)$，无侧面或侧面为柱面，如图 18-2 所示 .

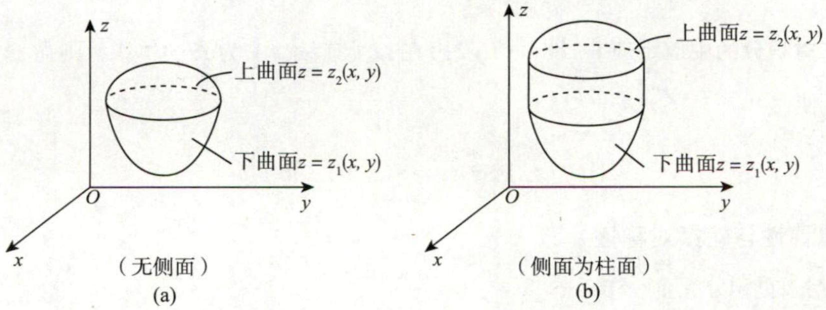


图 18-2

b. 计算方法 .

如图 18-3 所示，有$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

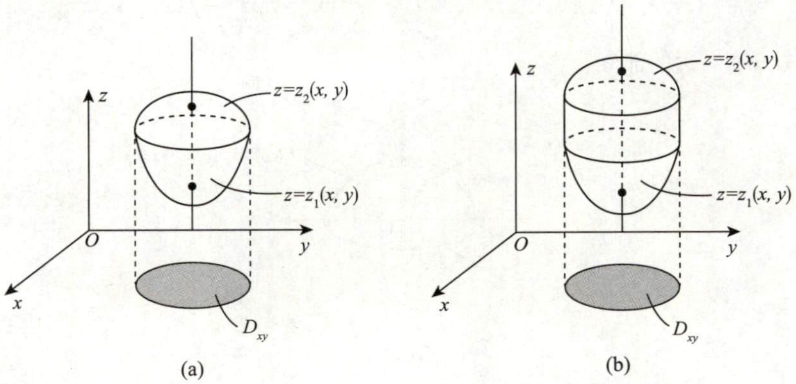


图 18-3

②先二后一法（先xy后z法，也叫**定限截面法**）.

a. 适用场合 .

Ω是旋转体，其旋转曲面方程为$\Sigma: z=z(x,y)$，如图 18-4 所示 .

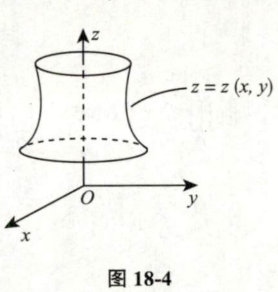


图 18-4

b. 计算方法 .

如图 18-5 所示，有 $\iiint\limits_{\Omega} f(x, y, z)\mathrm{d}v=\int_a^b \mathrm{d}z \iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}\sigma$.

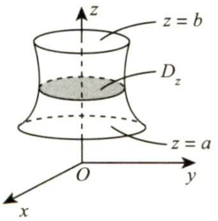
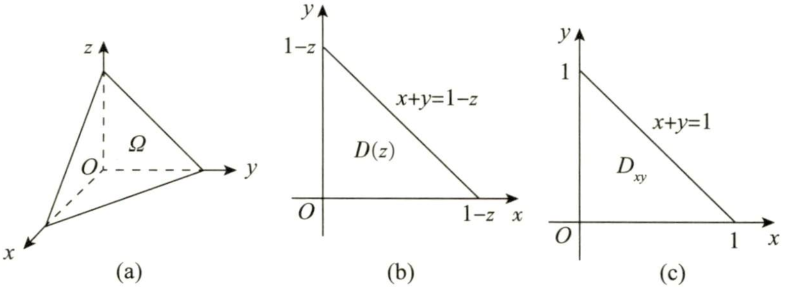


图 18-5

例 18.1 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$ ______.

解 应填 $\frac{1}{4}$.

方法一 积分区域如图 18-6(a) 所示 .



(a) (b) (c)

图 18-6

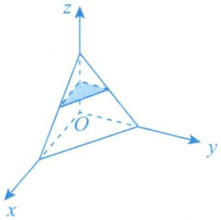
由轮换对称性知，

$$\iiint\limits_{\Omega} x\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} y\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v ,$$

则

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\mathrm{d}v=6\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v .$$

记 Ω: $0 \leqslant z \leqslant 1$, $(x, y) \in D(z)$, $D(z)$ 是过 z 轴上 $[0, 1]$ 中任一点 z 作垂直于 z 轴的平面截 Ω 所得平面区域 [平移到 xOy 平面上，见图 18-6(b)]，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$，于是由先二后一法 (定限截面法)，得



$$\iiint\limits_{\Omega} z\mathrm{d}v=\int_0^1 z\mathrm{d}z \iint\limits_{D(z)} \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1 \frac{1}{2}(1-z)^2 z\mathrm{d}z$$

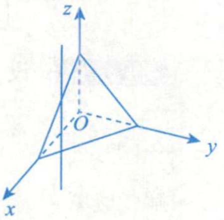
$$=\int_0^1 \frac{1}{2}(z-2z^2+z^3)\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}z^2-\frac{2}{3}z^3+\frac{1}{4}z^4\right)\Bigg|_0^1=\frac{1}{24},$$

因此$I=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$.

方法二 同方法一，有$I=6\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v$.

记Ω: $0\leqslant z\leqslant 1-x-y$, $(x, y)\in D_{xy}$, $D_{xy}=\{(x, y)|0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1-x\}$ ，如图 18-6(c) 所示 . 于是由先一后二法 (投影穿线法)，得



$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v=\iint\limits_{D_{xy}}\left(\int_0^{1-x-y}z\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{1}{2}(1-x-y)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(1-x-y)^2\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\left[-\frac{1}{3}(1-x-y)^3\Bigg|_{y=0}^{y=1-x}\right]\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{6}\int_0^1(1-x)^3\mathrm{d}x=\frac{1}{24},$$

因此$I=6\times\frac{1}{24}=\frac{1}{4}$.

(2) 柱面坐标系 = 极坐标系下二重积分与定积分 .

在直角坐标系的计算中，如若$\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma$适用于极坐标系，则令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\y=r\sin\theta,\end{cases}$便有

$$\iiint\limits_{\Omega}f(x, y, z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega}f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z,$$

此种计算方法称为**柱面坐标系下三重积分的计算** .

例 18.2 设Ω是由圆柱面$x^2+(y-1)^2=1$，旋转抛物面$8z=x^2+y^2$以及平面$z=0$所围成的区域，则$I=\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}v$ =______.

解 应填$\frac{64}{75}$.

如图 18-7 所示，用先一后二法 (投影穿线法)，即

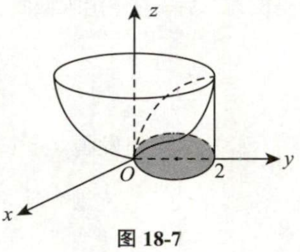


图 18-7

$$I=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma\int_0^{\frac{x^2+y^2}{8}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z$$

柱面坐标法

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r\mathrm{d}r\int_0^{\frac{r^2}{8}}r\mathrm{d}z=\frac{1}{8}\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}r^4\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{5}\int_0^{\pi}\sin^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{4}{5}\left(2\times\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{64}{75}.$$

(3) 球面坐标系．

①适用场合．

a. 被积函数中含$\begin{cases}f(x^2+y^2+z^2),\\f(x^2+y^2).\end{cases}$

b. 积分区域为$\begin{cases}\text{球或球的部分},\\\text{锥或锥的部分}.\end{cases}$

②计算方法．

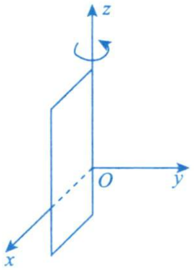
令

$$\begin{cases}x=r\sin\varphi\cos\theta,\\y=r\sin\varphi\sin\theta,\\z=r\cos\varphi,\end{cases}$$

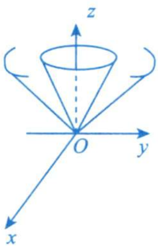
球面坐标系应该是整个高等数学或者说微积分里最复杂的一种计算方法，我们打一套拳来把这个问题解决．第一步，转：从 xOz 面出发，拉着一扇门绕 z 轴(从 z 轴正向向下看)逆时针旋转一周．见a．第二步，开：从 z 轴出发，喇叭花开花，伸展运动，从0°开到180°．见b．第三步，穿：从原点发出一条射线，至无穷远处．见c．这套拳可称为“球系太极拳”：在解决积分问题的同时，舒展筋骨，强身健体．

则 $\mathrm{d}v=r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$．

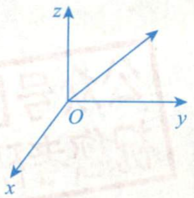
a. 过 z 轴的半平面与 xOz 面正向夹角为 θ（取值范围 $[0,2\pi]$）$\begin{cases}\text{先碰到}\,\Omega，\text{记}\,\theta_1,\\\text{后离开}\,\Omega，\text{记}\,\theta_2.\end{cases}$



b. 顶点在原点，以 z 轴为中心轴的圆锥面半顶角为 φ（取值范围 $[0,\pi]$）$\begin{cases}\text{先碰到}\,\Omega，\text{记}\,\varphi_1(\theta),\\\text{后离开}\,\Omega，\text{记}\,\varphi_2(\theta).\end{cases}$



c. 从原点出发画一条长为 r 的线（取值范围 $[0,+\infty)$）$\begin{cases}\text{先碰到}\,\Omega，\text{记}\,r_1(\varphi,\theta),\\\text{后离开}\,\Omega，\text{记}\,r_2(\varphi,\theta).\end{cases}$



于是

记住即可.

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}v=\iiint\limits_{\Omega} \underline{f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)}\underline{r^2\sin\varphi}\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\int_{\theta_1}^{\theta_2}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)}\mathrm{d}\varphi\int_{r_1(\varphi,\ \theta)}^{r_2(\varphi,\ \theta)} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\ .$$

例 18.3 设 $\Omega=\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\ =$______.

解 应填 $\frac{4\pi}{15}$.

由轮换对称性可知，$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega} y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$，所以

$$\iiint\limits_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\sin\varphi\mathrm{d}r$$

$$=\frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^4\,\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}\ .$$

例 18.4 设 $\Omega=\left\{(x,\ y,\ z)\,\middle|\,\sqrt{x^2+y^2}\leqslant z\leqslant 1\right\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}v\ =$______.

解 应填 $(\sqrt{2}-1)\pi$.

如图 18-8 所示，从原点引射线穿 Ω，从 $z=1$ 穿出，即 $r\cos\varphi=1$，则 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$ 为上限，于是

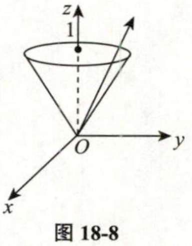


图 18-8

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}r^2\Big|_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\varphi}\cdot\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\cos^2\varphi}\mathrm{d}(\cos\varphi)=\pi\cdot\frac{1}{\cos\varphi}\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=(\sqrt{2}-1)\pi\ .$$

(4) 换元法．

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \xlongequal[z=z(u,v,w)]{\substack{x=x(u,v,w)\\ y=y(u,v,w)}} \iiint\limits_{\Omega_{uvw}} f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w\ .$$

①$f(x,y,z)\to f[x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w)]$．

②$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}}\to\iiint\limits_{\Omega_{uvw}}$．

③ $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\to\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$．

其中

a. $\begin{cases}x=x(u,v,w),\\ y=y(u,v,w),\\ z=z(u,v,w)\end{cases}$是空间$(x,y,z)$到空间$(u,v,w)$的一一映射；

b. $x=x(u,v,w)$，$y=y(u,v,w)$，$z=z(u,v,w)$有一阶连续偏导数，且

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}\neq 0\ .$$

另外，令$\begin{cases}x=r\cos\theta,\\ y=r\sin\theta,\\ z=z,\end{cases}$则

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\ &= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z}\\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial z}\end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\ &= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\left\|\begin{matrix}\cos\theta & -r\sin\theta & 0\\ \sin\theta & r\cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\\ &= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta z}} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z\ .\end{aligned}$$

这就是直角坐标系到柱面坐标系的换元过程 .

令$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, 则 \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$

$$\iiint\limits_{\Omega_{xyz}} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\left|\frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \varphi)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)\cdot\left\|\begin{matrix} \sin\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\sin\theta \\ \cos\varphi & 0 & -r\sin\varphi \end{matrix}\right\|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_{r\theta\varphi}} f(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta .$$

这就是直角坐标系到球面坐标系的换元过程 .

例 18.5 设 $\Omega = \{(x,\ y,\ z) \mid x^2 + 4y^2 + z^2 \leqslant 1\}$ ，则 $I = \iiint\limits_{\Omega}(1 - x^2 - 4y^2 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$ ______.

解 应填 $\dfrac{4\pi}{15}$.

令

$$\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = \dfrac{1}{2}r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}$$

于是

$$J = \frac{\partial(x,\ y,\ z)}{\partial(r,\ \theta,\ \varphi)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial z}{\partial r} & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}r^2\sin\varphi,$$

则

$$I = \iiint\limits_{x^2+4y^2+z^2\leqslant 1}(1 - x^2 - 4y^2 - z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1(1 - r^2)\frac{1}{2}r^2\sin\varphi\mathrm{d}r = \frac{4\pi}{15} .$$

（三）应用

(1) 若 Ω 是物体所占的空间区域，则其体积为 $V=\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v$.

(2) 对于空间物体，若体密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 是物体所占的空间区域，则计算重心 $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}x\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\ \bar{y}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}y\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v},\ \bar{z}=\frac{\iiint\limits_{\Omega}z\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}v}.$$

【注】(1) 在考研的范畴内，重心就是质心．

(2) 当密度 $\rho(x,y)$ 或者 $\rho(x,y,z)$ 为常数时，重心就成了**形心**．

(3) 形心公式的逆用．

由 $\bar{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，得 $\iiint\limits_{\Omega}x\,\mathrm{d}v=\bar{x}\cdot V$，其中 V 为 Ω 的体积．若 $\bar{x}$ 与 V 均易于求出，则可快速计算出 $\iiint\limits_{\Omega}x\mathrm{d}v$，以下同理．

由 $\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，得 $\iiint\limits_{\Omega}y\,\mathrm{d}v=\bar{y}\cdot V$，其中 V 为 Ω 的体积．

由 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}v}$，得 $\iiint\limits_{\Omega}z\,\mathrm{d}v=\bar{z}\cdot V$，其中 V 为 Ω 的体积．

(3) 对于空间物体，若体密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 是物体所占的空间区域，则计算该物体对 x 轴、y 轴、z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x，I_y，I_z 和 I_O 公式分别为

$$I_x=\iiint\limits_{\Omega}(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\ I_y=\iiint\limits_{\Omega}(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,$$

$$I_z=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v,\ I_O=\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\mathrm{d}v.$$

(4) 对于空间物体，若体密度为 $\rho(x,y,z)$，Ω 是物体所占的空间区域，则计算该物体对物体外一点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的质量为 m 的质点的引力 (F_x,F_y,F_z) 公式为

$$F_x=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(x-x_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

$$F_y=Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(y-y_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v,$$

$$F_z = Gm\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(x,y,z)(z-z_0)}{[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2]^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}v\ .$$

例 18.6 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,4x^2+y^2+z^2-2z\leqslant 3\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=$______.

解 应填 $\frac{16}{3}\pi$.

由于 $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{(z-1)^2}{4}\leqslant 1\right.\right\}$，其形心坐标为 $(0,0,1)$，于是

$$\iiint\limits_{\Omega} z\,\mathrm{d}v=\bar{z}\cdot V_{\Omega}=1\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 1\cdot 2\cdot 2=\frac{16}{3}\pi\ .$$

例 18.7 设 $\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\leqslant z\leqslant 1\}$，则 Ω 的形心的竖坐标 $\bar{z}=$______.

解 应填 $\frac{2}{3}$.

设 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则

$$\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}(1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{2},$$

$$\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}z\mathrm{d}z=\frac{1}{2}\iint\limits_{D}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r=\frac{\pi}{3}\ .$$

所以 $\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}=\dfrac{2}{3}$.

二、第一型曲线积分

(一) 概念、性质与对称性

1. 概念

设 L 为 xOy 面内的 分割 一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上任意插入一系列点 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段 . 设第 i 个小弧段的长度为 Δs_i，又 (ξ_i,η_i) 为第 i 个小弧段上任意取定的一点，作乘积 近似 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i\,(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 求和 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，如果当各小弧段长度的最大值 取极限 λ 趋于零时，这和的极限总存在（与 Δs_i 的分法及 (ξ_i,η_i) 的取法均无关），则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一型曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，即

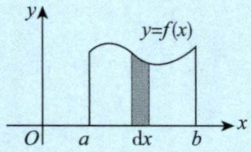
$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i,$$

其中$f(x,\ y)$称为被积函数，$f(x,\ y)\mathrm{d}s$称为被积表达式，x与y称为积分变量，L称为积分弧段.

此定义可以类似地推广到积分弧段为空间曲线弧$\varGamma$的情形，即函数$f(x,\ y,\ z)$在曲线弧$\varGamma$上对弧长的曲线积分

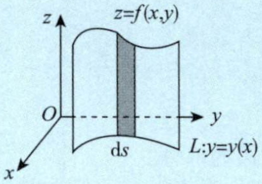
$$\int_{\varGamma} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\ \eta_i,\ \zeta_i)\Delta s_i\ .$$

【注】但事实上，如果仅理解到此，还是不够的．不妨把定积分和第一型曲线积分放在一起作个对比，加深我们对概念的理解．定积分定义在“直线段”上，而第一型曲线积分定义在“曲线段”上，如图18-9、图18-10所示，由于$f(x,\ y)$定义在L: $y=y(x)$上，故曲线方程L可代入被积函数，从而化简计算．



$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

图 18-9



$$\int_L f(x,\ y)\mathrm{d}s$$

图 18-10

2. 性质

以下总假设$\varGamma$为空间有限长分段光滑曲线.

性质 1(求空间曲线的长度(弧长))　$\int_{\varGamma} 1\mathrm{d}s=l_{\varGamma}$，其中$l_{\varGamma}$为$\varGamma$的长度.

性质 2(可积函数必有界)　设$f(x,\ y,\ z)$在$\varGamma$上可积，则其在$\varGamma$上必有界.

性质 3(积分的线性性质)　设k_1，k_2为常数，则

$$\int_{\varGamma}[k_1 f(x,\ y,\ z)\pm k_2 g(x,\ y,\ z)]\mathrm{d}s=k_1\int_{\varGamma} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\pm k_2\int_{\varGamma} g(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\ .$$

性质 4(积分的可加性)　设$f(x,\ y,\ z)$在$\varGamma$上可积，且$\varGamma_1\cup\varGamma_2=\varGamma$，$\varGamma_1\cap\varGamma_2=\varnothing$，则

$$\int_{\varGamma} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s=\int_{\varGamma_1} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s+\int_{\varGamma_2} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\ .$$

性质 5(积分的保号性)　设$f(x,\ y,\ z)$，$g(x,\ y,\ z)$在$\varGamma$上可积，且在$\varGamma$上$f(x,\ y,\ z)\leqslant g(x,\ y,\ z)$，则有

$$\int_{\varGamma} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\leqslant\int_{\varGamma} g(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\ .$$

特殊地，有

$$\left|\int_{\varGamma} f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{\varGamma}|f(x,\ y,\ z)|\,\mathrm{d}s\ .$$

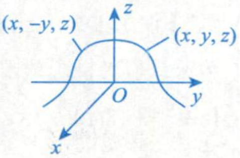
性质 6(第一型曲线积分的估值定理)　设M，m分别是$f(x,\ y,\ z)$在$\varGamma$上的最大值和最小值，$l_{\varGamma}$为$\varGamma$的长度，则有

$$ml_{\Gamma}\leqslant\int_{\Gamma}f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s\leqslant M\,l_{\Gamma}.$$

性质 7(第一型曲线积分的中值定理) 设$f(x,\ y,\ z)$在Γ上连续，l_{Γ}为Γ的长度，则在Γ上至少存在一点$(\xi,\ \eta,\ \zeta)$，使得

$$\int_{\Gamma}f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s=f(\xi,\ \eta,\ \zeta)l_{\Gamma}.$$

3. 普通对称性与轮换对称性



分析方法与二重积分、三重积分完全一样.

(1) 普通对称性.

假设Γ关于xOz面对称，则

$$\int_{\Gamma}f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s=\begin{cases}2\int_{\Gamma_1}f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s, & f(x,\ y,\ z)=f(x,\ -y,\ z),\\ 0, & f(x,\ y,\ z)=-f(x,\ -y,\ z),\end{cases}$$

其中Γ_1是Γ在xOz面右边的部分.

关于其他坐标面对称的情况与此类似.

(2) 轮换对称性.

若把x与y对调后，Γ不变，则$\int_{\Gamma}f(x,\ y,\ z)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}f(y,\ x,\ z)\mathrm{d}s$，这就是**轮换对称性**.

关于其他情况与此类似.

具体应用见后面的例子.

(二) 计算

由于第一型曲线积分就是由定积分推广而来的，因此计算第一型曲线积分的基本方法就是将其化为定积分. 口诀为“一投二代三计算”.

1. 平面情形

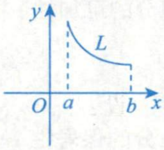
(1) 若平面曲线L由$y=y(x)(a\leqslant x\leqslant b)$给出，则$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$，且

$$\int_{L}f(x,\ y)\mathrm{d}s$$

一投　二代　三计算

$$=\int_a^b f[x,\ y(x)]\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

一投二代三计算，这是基本方法的口诀.



以平面为例，

一投：把L投到x轴上去，写成$\int_a^b$；

二代：注意这里的x, y不是独立的，它是受约束于方程$y=y(x)$的，一定要把$y=y(x)$代入$f(x,\ y)$（这是曲线（曲面）积分的特点，因为这里的变量是定义在线上（面上）的，不具有独立性，所以这里必须代入）；

三计算：之前讲过弧微分计算，

$$\mathrm{d}s=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}=\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

一投，二代，三计算，就化成了定积分.

(2) 若平面曲线L由参数式$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}(\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$给出，则$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

一投　二代　三计算

$$=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(3) 若平面曲线 L 由极坐标形式 $r=r(\theta)(\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta)$ 给出，则 $\mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$，且

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$$

一投　二代　三计算

$$=\int_\alpha^\beta f[r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta]\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta.$$

2. 空间情形

若空间曲线 Γ 由参数式 $\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\\z=z(t)\end{cases}$ 给出，则

$$\mathrm{d}s=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t,$$

且

$$\int_\Gamma f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

一投　二代　三计算

$$=\int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

例 18.8　已知曲线 $L:y=x^2(0\leqslant x\leqslant\sqrt{2})$，则 $\int_L x\,\mathrm{d}s=$______.

解　应填 $\frac{13}{6}$.

$$\int_L x\,\mathrm{d}s=\int_0^{\sqrt{2}}x\sqrt{1+(2x)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{1+4x^2}\,\mathrm{d}(1+4x^2)$$

$$=\frac{1}{12}(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\sqrt{2}}=\frac{13}{6}.$$

例 18.9　设 L: $x^2+y^2=-2y$，则 $I=\oint_L\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}s=$______.

解　应填 8.

本题不宜用直角坐标直接计算.

将曲线方程用极坐标表示：$r=-2\sin\theta(-\pi\leqslant\theta\leqslant0)$，则

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ \mathrm{d}s=\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta=2\mathrm{d}\theta.$$

故

$$I=\int_{-\pi}^0(-2\sin\theta)\cdot2\mathrm{d}\theta=-4\int_{-\pi}^0\sin\theta\mathrm{d}\theta=8.$$

例 18.10 设Γ是空间曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=0,\end{cases}$则$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=$______.

解 应填$\frac{4}{3}\pi$.

由轮换对称性知$\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}z^2\mathrm{d}s$，于是

$$\oint_{\Gamma}(x^2+y^2)\mathrm{d}s=\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s$$

$$=2\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\left(\oint_{\Gamma}x^2\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma}y^2\mathrm{d}s+\oint_{\Gamma}z^2\mathrm{d}s\right)$$

$$=\frac{2}{3}\oint_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s\overset{(*)}{=\!=}\frac{2}{3}\oint_{\Gamma}1\mathrm{d}s=\frac{2}{3}\times2\pi\times1=\frac{4}{3}\pi.$$

【注】(*) 处来自曲线方程$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=1,\\x+y+z=0,\end{cases}$可直接代入被积函数，从而化简计算.

(三) 应用

(1) 对于空间光滑曲线Γ，若其由参数式$\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)\\z=z(t)\end{cases}$给出，则计算空间曲线的长度(弧长)的公式为

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\,\mathrm{d}t.$$

(2) 对于空间光滑曲线L，若线密度为$\rho(x,y,z)$，则计算重心$(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$的公式为

$$\bar{x}=\frac{\int_L x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\ \bar{y}=\frac{\int_L y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s},\ \bar{z}=\frac{\int_L z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}{\int_L\rho(x,y,z)\mathrm{d}s}.$$

【注】(1) 在考研的范畴内，重心就是质心.

(2) 当密度$\rho(x,y)$或者$\rho(x,y,z)$为常数时，重心就成了**形心**.

(3) 形心公式的逆用.

由$\bar{x}=\frac{\int_L x\mathrm{d}s}{\int_L 1\mathrm{d}s}$，得$\int_L x\mathrm{d}s=\bar{x}\cdot l$，其中$l=\int_L 1\mathrm{d}s$为曲线$L$的长度；

由$\bar{y}=\frac{\int_L y\mathrm{d}s}{\int_L 1\mathrm{d}s}$，得$\int_L y\mathrm{d}s=\bar{y}\cdot l$，其中$l=\int_L 1\mathrm{d}s$为曲线$L$的长度；

由$\bar{z}=\frac{\int_L z\mathrm{d}s}{\int_L 1\mathrm{d}s}$，得$\int_L z\mathrm{d}s=\bar{z}\cdot l$，其中$l=\int_L 1\mathrm{d}s$为曲线$L$的长度.

(3) 对于光滑曲线L，线密度为$\rho(x,y,z)$，则计算该曲线对x轴、y轴、z轴和原点O的转动惯量I_x，I_y，I_z和I_O公式分别为

$$I_x=\int_L(y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ I_y=\int_L(z^2+x^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,$$

$$I_z=\int_L(x^2+y^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s,\ I_O=\int_L(x^2+y^2+z^2)\rho(x,y,z)\,\mathrm{d}s\ .$$

例 18.11　设C是曲线$x^2+y^2=2(x+y)$，则$\oint_C(2x^2+3y^2)\,\mathrm{d}s=$______.

解　应填$20\sqrt{2}\pi$.

C是圆$(x-1)^2+(y-1)^2=2$，关于$y=x$对称，由轮换对称性知

$$\oint_C x^2\mathrm{d}s=\oint_C y^2\mathrm{d}s,$$

故

$$\oint_C(2x^2+3y^2)\mathrm{d}s=\frac{5}{2}\oint_C(x^2+y^2)\mathrm{d}s=5\oint_C(x+y)\mathrm{d}s$$

$$=5\bar{x}\cdot l_C+5\bar{y}\cdot l_C=10l_C=20\sqrt{2}\pi\ .$$

三、第一型曲面积分

（一）概念、性质与对称性

1. 概念

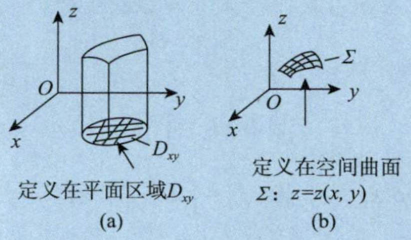
设曲面Σ是光滑的，函数$f(x,y,z)$在Σ上有界，把Σ任意分成 分割 n个 近似 小块ΔS_i（ΔS_i同时也代表第i个小块曲面的面积），设(ξ_i,η_i,ζ_i)是ΔS_i上任意取定的一点，作乘积$f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i(i=1,2,\cdots,n)$，并作和 求和 $\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$. 如果当各小块曲面的直径的最大值λ趋于零时，该和的极限 取极限 总存在（与ΔS_i的分法及(ξ_i,η_i,ζ_i)的取法均无关），则称此极限值为函数$f(x,y,z)$在曲面Σ上对面积的曲面积分或第一型曲面积分，记作$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i,$$

其中$f(x,y,z)$称为被积函数，Σ称为积分曲面 .

【注】(1) 第一型曲面积分的物理背景是以$f(x,y,z)$为面密度的**空间物质曲面的质量** .

(2) 把二重积分和第一型曲面积分放在一起作个对比，如图 18-11 所示 .



定义在平面区域D_{xy}
(a)

定义在空间曲面
Σ：$z=z(x, y)$
(b)

图 18-11

2. 性质

以下总假设Σ为空间有限分片光滑曲面．

性质 1(求空间曲面的面积) $\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S=S$，其中$S$为$\Sigma$的面积．

性质 2(可积函数必有界) 设$f(x, y, z)$在Σ上可积，则其在Σ上必有界．

性质 3(积分的线性性质) 设k_1, k_2为常数，则

$$\iint\limits_{\Sigma}[k_1 f(x, y, z) \pm k_2 g(x, y, z)]\mathrm{d}S=k_1\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S \pm k_2\iint\limits_{\Sigma} g(x, y, z)\mathrm{d}S .$$

性质 4(积分的可加性) 设$f(x, y, z)$在Σ上可积，且$\Sigma_1 \cup \Sigma_2=\Sigma$，$\Sigma_1 \cap \Sigma_2=\varnothing$，则

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S=\iint\limits_{\Sigma_1} f(x, y, z)\mathrm{d}S+\iint\limits_{\Sigma_2} f(x, y, z)\mathrm{d}S .$$

性质 5(积分的保号性) 设$f(x, y, z)$，$g(x, y, z)$在Σ上可积，且在Σ上$f(x, y, z) \leqslant g(x, y, z)$，则有

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S \leqslant \iint\limits_{\Sigma} g(x, y, z)\mathrm{d}S .$$

特殊地，有

$$\left|\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S\right| \leqslant \iint\limits_{\Sigma}|f(x, y, z)|\,\mathrm{d}S .$$

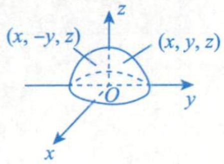
性质 6(第一型曲面积分的估值定理) 设M，m分别是$f(x, y, z)$在Σ上的最大值和最小值，S为Σ的面积，则有

$$mS \leqslant \iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S \leqslant MS .$$

性质 7(第一型曲面积分的中值定理) 设$f(x, y, z)$在Σ上连续，S为Σ的面积，则在Σ上至少存在一点(ξ, η, ζ)，使得

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\mathrm{d}S=f(\xi, \eta, \zeta)S .$$

3. 普通对称性与轮换对称性



分析方法与二重积分、三重积分和第一型曲线积分完全一样．

(1) 普通对称性．

假设Σ关于xOz面对称，则

$$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\begin{cases}2\iint_{\Sigma_1} f(x,y,z)\mathrm{d}S, & f(x,y,z)=f(x,-y,z),\\ 0, & f(x,y,z)=-f(x,-y,z),\end{cases}$$

其中Σ_1是Σ在xOz面右边的部分．

关于其他坐标面对称的情况与此类似．

(2) 轮换对称性．

当Σ: $z=z(x,y)$为单值函数时，若把x与y对调后，Σ不变，则$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{\Sigma} f(y,x,z)\mathrm{d}S$，这就是**轮换对称性**．

关于其他情况与此类似．

(二) 计算

因为第一型曲面积分就是由二重积分推广而来的，所以计算第一型曲面积分的基本方法就是将其化为二重积分．口诀为“一投二代三计算”．

无论空间曲面Σ是由显式$z=z(x,y)$还是隐式$F(x,y,z)=0$给出的，我们都需要做三件事（无逻辑上的先后顺序，哪件事情最有利于解题就先做哪件）．

①一投：将Σ投影到某一平面（比如xOy面）上，设投影区域为D（比如D_{xy}）；

②二代：将$z=z(x,y)$或$F(x,y,z)=0$代入$f(x,y,z)$；

③三计算：计算z'_x，z'_y，则$\mathrm{d}S=\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

这就把第一型曲面积分化成了二重积分（比如化成关于x，y的二重积分），得到

$$\begin{aligned}&\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S\\ &\Big\downarrow\text{一投}\qquad\text{二代}\qquad\text{三计算}\\ &=\iint_{D_{xy}} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

化成关于其他变量的二重积分与此类似．

【注】这里有一点需要特别强调，将Σ投影到哪个平面上应该是由你自己决定的，但是**Σ上的任何两点的投影点不能重合**，换言之，假如你要将Σ投向xOy面，则$z=z(x,y)$必须是单值函数．忘记了这一点，就可能算错结果．

如果将Σ投向某一平面，但是曲面投影后有重合点，且对称性不能使用时，则

①要么将Σ转投向另一个平面，使得曲面投影后无重合点；

②要么将Σ分成若干曲面Σ_1，Σ_2，…，使得这些曲面各自投影后无重合点．

例 18.12 求 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$，其中 Σ 为柱面 $x^2+y^2=R^2$ 被 $x=0$，$y=0$，$z=0$ 及 $z=1$ 所截得的第一卦限部分，如图 18-12 所示 .

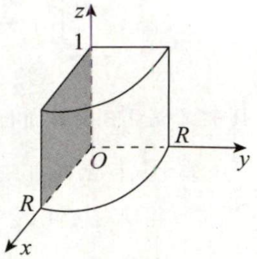


图 18-12

解 选择向 xOz 面投影，由曲面方程得

$$y=\sqrt{R^2-x^2}\,,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}S&=\sqrt{1+(y_x')^2+(y_z')^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\sqrt{1+\left(\frac{-2x}{2\sqrt{R^2-x^2}}\right)^2+0^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\\&=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\,,\end{aligned}$$

故 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\iint\limits_{D_{xz}}\frac{Rz}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$，其中 $D_{xz}=\{(x,z)\mid 0\leqslant x\leqslant R,\ 0\leqslant z\leqslant 1\}$，即

$$\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=R\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^1\frac{z}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}z=\frac{\pi}{4}R\,.$$

【注】(1) 由于 Σ 在 xOy 面上的投影仅为一条曲线，若选择向 xOy 面投影，则投影区域的面积为 0，于是 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=0$. 这是错误的，因为投影点不能重合 .

(2) 以下常考：

柱面 $x^2+y^2=a^2$ 的 $\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z$；

球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的 $\mathrm{d}S=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$；

锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的 $\mathrm{d}S=\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

例 18.13 设 Σ 为椭球面 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$ 的上半部分，点 $P(x,y,z)\in\Sigma$，π 为 Σ 在点 P 处的切平面，$\rho(x,y,z)$ 为点 $O(0,0,0)$ 到平面 π 的距离，求 $\iint\limits_{\Sigma}\frac{z}{\rho(x,y,z)}\mathrm{d}S$.

解 设 (X,Y,Z) 为 π 上任意一点，则 π 的方程为

$$\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1\,,$$

由第17讲的"四、2.(1)"可知，π 的法向量为 $(x,y,2z)$，π 的方程为 $x(X-x)+y(Y-y)+2z(Z-z)=0$，又因为 $P(x,y,z)\in\Sigma$，所以 $\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+z^2=1$，代入 π 的方程化简可得 $\frac{xX}{2}+\frac{yY}{2}+zZ=1$.

从而知

$$\rho(x,y,z)=\left(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

由

$$z=\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)},$$

有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}},$$

于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}\sigma=\frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{2\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}\right)}}\mathrm{d}\sigma,$$

所以

$$\iint_{\Sigma}\frac{z\mathrm{d}S}{\rho(x,\ y,\ z)}=\frac{1}{4}\iint_{D_{xy}}(4-x^2-y^2)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}(4-r^2)r\mathrm{d}r=\frac{3}{2}\pi,$$

其中 $D_{xy}=\{(x,\ y)|x^2+y^2\leqslant 2\}$.

（三）应用

(1) 对于光滑曲面薄片 Σ，若 Σ 由单值函数 $z=z(x,\ y)$ 给出，D_{xy} 为曲面 Σ 在 xOy 面上的投影区域，则其面积

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+(z'_x)^2+(z'_y)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

【注】 同理，在同样保证单值函数的情况下，可向另外两个坐标面投影，得

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+(x'_y)^2+(x'_z)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,$$

其中 Σ: $x=x(y,\ z)$, D_{yz} 是曲面在 yOz 面上的投影区域；

$$A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+(y'_z)^2+(y'_x)^2}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

其中 Σ: $y=y(x,\ z)$, D_{zx} 是曲面在 zOx 面上的投影区域 .

事实上，曲面面积就是第一型曲面积分的被积函数是 1 时，用投影法所得出的积分，请大家注意这个联系 .

(2) 对于光滑曲面薄片 Σ，若面密度为 $\rho(x,\ y,\ z)$，则计算重心 $(\bar{x},\ \bar{y},\ \bar{z})$ 的公式为

$$\bar{x}=\frac{\iint_{\Sigma}x\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S},\ \bar{y}=\frac{\iint_{\Sigma}y\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S},\ \bar{z}=\frac{\iint_{\Sigma}z\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S}{\iint_{\Sigma}\rho(x,\ y,\ z)\mathrm{d}S} .$$

【注】(1) 在考研的范畴内，重心就是质心 .

(2) 当密度 $\rho(x, y)$ 或者 $\rho(x, y, z)$ 为常数时，重心就成了**形心** .

(3) 形心公式的逆用 .

由 $\overline{x}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S}$，得 $\iint\limits_{\Sigma} x\mathrm{d}S=\overline{x}\cdot A$，其中 $A=\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S$ 为曲面 Σ 的面积；

由 $\overline{y}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S}$，得 $\iint\limits_{\Sigma} y\mathrm{d}S=\overline{y}\cdot A$，其中 $A=\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S$ 为曲面 Σ 的面积；

由 $\overline{z}=\dfrac{\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S}{\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S}$，得 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S=\overline{z}\cdot A$，其中 $A=\iint\limits_{\Sigma} 1\mathrm{d}S$ 为曲面 Σ 的面积 .

(3) 对于光滑曲面薄片 Σ，若面密度为 $\rho(x, y, z)$，则计算该薄片对 x 轴、y 轴、z 轴和原点 O 的转动惯量 I_x, I_y, I_z 和 I_O 的公式分别为

$$I_x=\iint\limits_{\Sigma}(y^2+z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}S,\ I_y=\iint\limits_{\Sigma}(z^2+x^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}S,$$

$$I_z=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}S,\ I_O=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\rho(x, y, z)\mathrm{d}S .$$

例 18.14 设薄片形物体 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu(x, y, z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记圆锥面与柱面的交线为 C .

(1) 求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

(2) 求 Σ 的质量 M .

解 (1) 如图 18-13 所示，圆锥面与柱面的交线 C 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2}, \\ z^2=2x, \end{cases}$ 消去 z，得 C 在 xOy 平面的投影柱面为 $x^2+y^2=2x$，故所求投影曲线的方程为 $\begin{cases} x^2+y^2=2x, \\ z=0. \end{cases}$

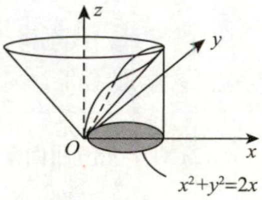


图 18-13

(2) 因为 Σ 的点密度为 $\mu(x, y, z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，所以 Σ 的质量为

$$M=\iint\limits_{\Sigma} 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\mathrm{d}S .$$

又 Σ 在 xOy 面上的投影区域为 $D_{xy}=\left\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqslant 2x\right\}$，所以

$$M=9\iint_{D_{xy}}\sqrt{2(x^2+y^2)}\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=18\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}r\cdot r\,\mathrm{d}r$$

$$=48\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta=64\ .$$

四、平面第二型曲线积分

（一）概念与性质

1. 变力沿直线做功

在一个向量场——变力场中，设某质点在变力 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 作用下，沿着有向曲线 L 从起点 A 移动到终点 B，总共做了多少功？（这个物理背景请大家熟记，考研中出过基于这种背景的考题.）

设沿着有向曲线 L 在 $M(x,y)$ 点移动了一个微位移 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\mathrm{d}x\boldsymbol{i}+\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$，将变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 近似看作常力，则力在此微位移上的微功 $\mathrm{d}W=\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$，于是变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 沿着有向曲线 L 从起点 A 移动到终点 B 所做的总功为

$$W=\int_L\mathrm{d}W=\int_L\boldsymbol{F}(x,y)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_L(P(x,y),Q(x,y))\cdot(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$$

$$=\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y,$$

于是我们就引出了第二型曲线积分的概念.

2. 概念

第二型曲线积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,y)=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 定义在平面有向曲线 L 上，其物理背景是变力 $\boldsymbol{F}(x,y)$ 在平面曲线 L 上从起点移动到终点所做的总功：

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y\ .$$

由此可以看出，前面所学的定积分、二重积分、三重积分、第一型曲线积分和第一型曲面积分有着完全一致的背景，都是一个**数量函数在定义区域**上计算几何量（面积、体积等），但是第二型曲线积分与之不同，它是一个**向量函数沿有向曲线**的积分（无几何量可言）. 于是，有些性质和计算方法都不一样了，一定要加以对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

3. 性质

以下总假设 $\varGamma$ 为空间有限长分段光滑曲线.

性质 1（积分的线性性质）　设 k_1，k_2 为常数，则 $\int_\varGamma(k_1\boldsymbol{F}_1\pm k_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=k_1\int_\varGamma\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\pm k_2\int_\varGamma\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

性质 2(积分的有向性) $\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\int_{\overset{\frown}{BA}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

性质 3(积分的可加性) 当 $\overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}$ 时，$\int_{\overset{\frown}{AC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}+\int_{\overset{\frown}{BC}}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}$.

【注】第二型曲线积分的“对称性”.

若 L 为从起点 A 到终点 B 的有向曲线，如图 18-14(a) 所示 . 由于 L 是有向曲线，故它并不关于 y 轴对称 . 如图 18-14(a) 中的点 (x, y) 处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 与点 $(-x, y)$ 处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 并不对称 . 细致看来，将两处的 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 作水平、垂直分解，你会发现，两处的 $\mathrm{d}x$ 同向，均为 $\mathrm{d}x\boldsymbol{i}$；$\mathrm{d}y$ 反向，分别为 $\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$ 与 $-\mathrm{d}y\boldsymbol{j}$. 此时，若有力 $\boldsymbol{F}=x^2y\boldsymbol{j}$ 沿 L 做功，则两处的功的微元分别为 $x^2y\mathrm{d}y$ 与 $-x^2y\mathrm{d}y$，加起来即为零，故 $\int_L x^2y\mathrm{d}y=0$. 这与数量积分（如第一型曲线积分）完全不同 . 因为若 $f(x, y)=x^2y$，L 是如图 18-14(b) 所示的关于 y 轴对称的曲线，则 $\int_L f(x, y)\mathrm{d}s=\int_L x^2y\mathrm{d}s=2\int_{L_1}x^2y\mathrm{d}s$. 究其原因，数量积分的对称性是基于几何背景，而向量积分（第二型曲线曲面积分）没有几何背景，它们是物理问题的数学表达，多了“方向”这个重要因素 . 所以严格来讲，第二型曲线曲面积分没有几何上的对称性，而是“在物理概念的基础上，得出数学表达式并确定好方向后，在数量大小上看是否相等”. 记住上面这段话，就可以很好地解决问题了 .

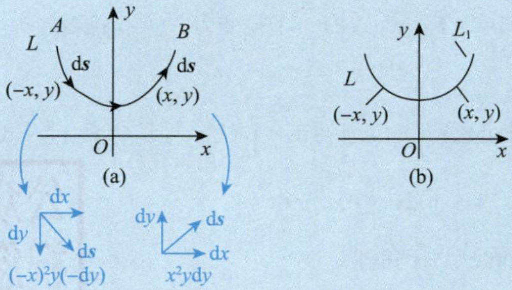


图 18-14

(二) 计算

1. 基本方法——化为定积分

如果平面有向曲线 L 由参数方程 $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t)\end{cases}$ $(t\colon\alpha\to\beta)$ 给出，其中 $t=\alpha$ 对应着起点 A，$t=\beta$ 对应着终点 B，则可以将平面第二型曲线积分化为定积分 . 如

$$\int_L P(x, y)\mathrm{d}x$$

一投　二代　三计算

$$=\int_\alpha^\beta P[x(t), y(t)]x'(t)\mathrm{d}t,$$

这里的 α，β 谁大谁小无关紧要，关键是分别和起点与终点对应 .

如果L由方程$y=y(x)(x\colon a\to b)$给出，可以看作参数方程$\begin{cases}x=x,\\y=y(x),\end{cases}$于是有

$$\int_L P(x,\ y)\mathrm{d}x+Q(x,\ y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\{P[x,\ y(x)]+Q[x,\ y(x)]\,y'(x)\}\mathrm{d}x\ .$$

【注】如果你理解了上面的注，则也可这样处理：

$$\int_L P(x,\ y)\mathrm{d}x$$

一投　二代　三计算

$$=\int_{\min\{a,\ b\}}^{\max\{a,\ b\}}P[x,\ y(x)](\pm\mathrm{d}x),$$

其中，当$a<b$时，取$+\mathrm{d}x$；当$a>b$时，取$-\mathrm{d}x$.

例 18.15　设D是由曲线L：$\begin{cases}x=\cos^3 t,\\y=\sin^3 t\end{cases}(0\leqslant t\leqslant 2\pi)$与$x$轴所围平面有界闭区域在第一、二象限的部分，$\partial D$为其边界，取逆时针方向，计算$\oint_{\partial D}|x|\mathrm{d}y+|y|\mathrm{d}x$.

解　如图 18-15 所示，对于曲线L_1, L_2，在水平方向上，由于点$(x,\ y)$和点$(-x,\ y)$处的功的微元均为$|y|(-\mathrm{d}x)$，则$y(-\mathrm{d}x)+y(-\mathrm{d}x)=-2y\mathrm{d}x$，在铅直方向上，功的微元分别为$|x|\mathrm{d}y$与$|x|(-\mathrm{d}y)$，则$|x|\mathrm{d}y+|x|(-\mathrm{d}y)=0$. 对于曲线L_3：$y=0$，x从$-1\to 1$，于是$\int_{L_3}|x|\mathrm{d}y+|y|\mathrm{d}x=0$. 于是

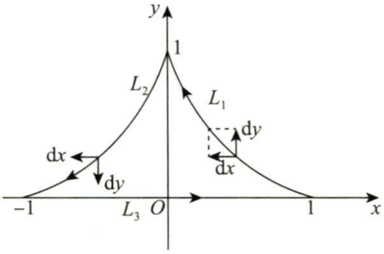


图 18-15

$$\oint_{\partial D}|x|\mathrm{d}y+|y|\mathrm{d}x=\oint_{L_1+L_2+L_3}|x|\mathrm{d}y+|y|\mathrm{d}x=\int_{L_1+L_2}|x|\mathrm{d}y+|y|\mathrm{d}x$$

$$=\int_{L_1+L_2}|y|\mathrm{d}x=-\int_0^1 2y\mathrm{d}x=-\int_{\frac{\pi}{2}}^0 2\sin^3 t\mathrm{d}(\cos^3 t)$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3 t\cdot 3\cos^2 t(-\sin t)\mathrm{d}t$$

$$=-6\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\mathrm{d}t$$

$$=-6\times\left(\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{3}{16}\pi\ .$$

例 18.16　在过点$O(0,\ 0)$和$A(\pi,\ 0)$的曲线族$y=a\sin x(a>0)$中，求一条曲线L，使沿该曲线从O到A的积分$\int_L(1+y^3)\mathrm{d}x+(2x+y)\mathrm{d}y$的值最小 .

解
$$I(a)=\int_0^{\pi}[1+a^3\sin^3 x+(2x+a\sin x)a\cos x]\,\mathrm{d}x=\pi-4a+\frac{4}{3}a^3 .$$

令 $I'(a)=4(a^2-1)=0$，得 $a=1(a=-1$ 舍去)，且 $a=1$ 是 $I(a)$ 在 $(0,+\infty)$ 内的唯一驻点．

又由于 $I''(1)=8>0$，所以 $I(a)$ 在 $a=1$ 处取到最小值．因此所求曲线是

$$y=\sin x(0\leqslant x\leqslant\pi) .$$

【注】本题是一道小的综合题，主要考查平面第二型曲线积分的基本方法（化为定积分）及一元函数的最值．

2. 格林公式

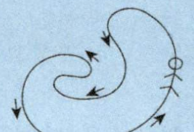
设平面有界闭区域 D 由分段光滑曲线 L 围成，$P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，L 取正向，则

$$\oint_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma .$$

伟大的数学家格林花了七天七夜闭关修炼，创立了格林公式，他出关的时候他的朋友挖苦他：你这个书呆子，七天七夜不和人讲话，你怎么耐得住寂寞？格林轻轻回了一句：我根本没有寂寞，何来寂寞可耐？

这个故事送给各位考研的同学，考研需要闭关修炼，闭关修炼的时候你怎么耐得住寂寞？以伟大的数学家格林为榜样——我没有寂寞，何来寂寞可耐！

【注】所谓 L 取正向，是指当一个人沿着 L 的这个方向前进时，**左手始终在 L 所围成的区域 D 内**，如图 18-16 所示．试想一下假如你在学校的环形操场上跑步，你的左手始终在草坪中，说明你跑的方向是正向．



L正向

图 18-16

(1) **曲线封闭且无奇点在其内部，直接用格林公式．**

若给的是封闭曲线的曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$，可以验算 P 和 Q 是否满足“在该封闭曲线所包围的区域 D 内，P 和 Q 具有一阶连续偏导数”，若满足，则可用格林公式

$$\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

计算．这里要求 L 为 D 的边界，且正向．

例 18.17 设质点在力 $\boldsymbol{F}=-x^2y\boldsymbol{i}+xy^2\boldsymbol{j}$ 作用下沿圆周 $x^2+y^2=1$ 的顺时针方向运动一周，则 $\boldsymbol{F}$ 所

做的功 $W=$______.

解　应填 $-\frac{1}{2}\pi$.

设曲线 $C:x^2+y^2=1$ 围成的区域为 D，则

此处不能代入 $x^2+y^2=1$，你代入了吗？
如果代入了，立即推：复习到两点！

$$W=\oint_C(-x^2y)\mathrm{d}x+xy^2\mathrm{d}y=-\iint_D(y^2+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=-\frac{\pi}{2}\ .$$

(2) 非封闭曲线且 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$，可补线使其封闭（加线减线）.

如果不是封闭曲线的曲线积分，可以考虑补一条线 C_{BA}，使 $L_{AB}+C_{BA}$ 构成一封闭曲线，并且使其包围的区域为一单连通区域 D，在 D 上 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，则有

$$\begin{aligned}\int_{L_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\int_{L_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\oint_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y-\int_{C_{BA}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\pm\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\int_{C_{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\ ,\end{aligned}$$

其中 $L=L_{AB}+C_{BA}$，公式中的“±”号由 L 的方向而定 . 若 L 为正向则取正号，若 L 为负向则取负号 . C_{AB} 为 C_{BA} 的反向弧 . 如果上式右边的二重积分和 $\int_{C_{AB}}$ 容易计算的话，那么就可利用上述转换方法计算原积分 $\int_{L_{AB}}$.

例 18.18　已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $I=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y$.

解　如图 18-17 所示，取有向线段 L_1 的方程为 $x=0$，起点 $(0,2)$，终点 $(0,0)$. 由 L 与 L_1 围成的平面区域记为 D，于是有

$$\begin{aligned}I&=\int_L 3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\oint_{L+L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y-\int_{L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

根据格林公式，得

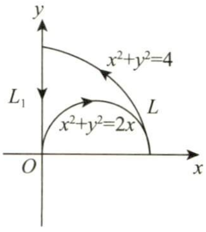


图 18-17

$$\begin{aligned}&\oint_{L+L_1}3x^2y\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y\\&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(x^3+x-2y)-\frac{\partial}{\partial y}(3x^2y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

$$=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}.$$

又
$$\int_{L_1}3x^2y\,\mathrm{d}x+(x^3+x-2y)\mathrm{d}y=\int_2^0(-2y)\mathrm{d}y=4,$$

所以
$$I=\frac{\pi}{2}-4.$$

(3) 曲线封闭但有奇点在其内部，且除奇点外 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$，则换路径.(一般令分母等于常数作为路径，路径的起点和终点无需与原路径重合.)

若给的是封闭曲线的曲线积分 $\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$，满足条件“在 D 内除了奇点外，P 和 Q 具有一阶连续偏导数，并且除奇点外，均有 $\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$”，则可以换一条封闭曲线 L_1 代替 L，它全在 D 内，并能将奇点包含在 L_1 的内部.则有公式

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y\overset{(*)}{=\!=}\oint_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$

这里要求 L_1 与 L 的方向相同.如果后者容易计算，就可达到目的.

【注】(*) 处是这样来的：如图 18-18 所示，若 L 所围区域 D 内有奇点 Q，则用 L_1 “挖去”它，并记挖去奇点后的阴影区域为 D'，于是

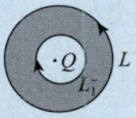


图 18-18

$$\oint_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\oint_{L+L_1^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y-\oint_{L_1^-}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$
$$=\iint\limits_{D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma+\oint_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$$
$$=\oint_{L_1}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y.$$

例 18.19 计算曲线积分 $I=\oint_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$，其中 L 是 $x^2+y^2=2$，方向为逆时针方向.

解 经计算有

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{4x^2+y^2}\right)=\frac{y^2-4x^2-8xy}{\left(4x^2+y^2\right)^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\right),$$

但是这里不能用格林公式，因为在 L 围成的区域内点 $O(0,\ 0)$ 处，P,Q 均不连续，故在该区域内作一曲线 L_1: $4x^2+y^2=\varepsilon^2(\varepsilon>0)$，取逆时针方向，从而

$$\oint_L\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{L_1}\frac{4x-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x+y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{L_1}(4x-y)\mathrm{d}x+(x+y)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_1}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi,$$

其中 D_1 为 L_1 围成的区域 .

3. 平面曲线积分与路径无关

(1) 概念 .

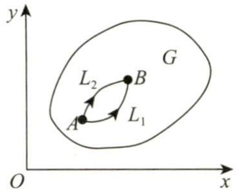


图 18-19

设 G 是一个区域，$P(x, y)$ 以及 $Q(x, y)$ 在区域 G 内具有一阶连续偏导数 . 如果对于 G 内任意指定的两个点 A, B 以及 G 内从点 A 到点 B 的任意两条曲线 L_1，L_2（见图 18-19），等式

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

恒成立，就说曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关，否则便说与路径有关 .

在以上叙述中注意到，如果曲线积分与路径无关，那么

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\ .$$

因为

$$\int_{L_2}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=-\int_{L_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

所以

$$\int_{L_1}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+\int_{L_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\ ,$$

从而

$$\oint_{L_1+L_2^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\ .$$

这里 $L_1+L_2^-$ 是一条有向闭曲线 . 因此，在区域 G 内由曲线积分与路径无关可推得在 G 内沿闭曲线的曲线积分为零 . 反过来，如果在区域 G 内沿任意闭曲线的曲线积分为零，也可推得在 G 内曲线积分与路径无关 . 由此得出结论：曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关相当于沿 G 内任意闭曲线 C 的曲线积分

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0\ .$$

(2) 条件 .

设 $P(x, y)$, $Q(x, y)$ 在单连通区域 G 内具有一阶连续偏导数，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路

径无关（或沿G内任意闭曲线的曲线积分为零）的充分必要条件是在G内处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

（或在G内存在函数$u(x,\ y)$，使$\mathrm{d}u=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.）

【注】设D为平面区域，若D内任一闭曲线所围的部分都属于D，则称D为平面单连通区域，否则称为复连通区域．通俗地说，平面单连通区域就是不含有“洞”（包含点“洞”）的区域，复连通区域是含有“洞”（包含点“洞”）的区域．例如，平面上的圆形区域$\left\{(x,\ y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$，上半平面$\left\{(x,\ y)\middle|y>0\right\}$都是单连通区域，圆环形区域$\left\{(x,\ y)\middle|1<x^2+y^2<4\right\}$，$\left\{(x,\ y)\middle|0<x^2+y^2<2\right\}$都是复连通区域．

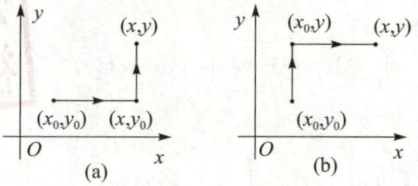
(3) 计算．

①按折线$(x_0,\ y_0)\to(x,\ y_0)\to(x,\ y)$ [见图 18-20(a)] 或按折线$(x_0,\ y_0)\to(x_0,\ y)\to(x,\ y)$ [见图 18-20(b)] 计算u．计算公式分别为

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}P(x,\ y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,\ y)\mathrm{d}y$$

或

$$u(x,\ y)=\int_{x_0}^{x}P(x,\ y)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x_0,\ y)\mathrm{d}y\ .$$



(a)　(b)

图 18-20

这里要求折线的路径应在D内．以上公式得出的$u(x,\ y)$再加任意常数C就得到了所有原函数．

②按折线或用u（终点）$-u$（起点）计算积分$\int P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$.

例 18.20　若曲线积分$\int_L\frac{x\,\mathrm{d}x-ay\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2-1}$在区域$D=\left\{(x,\ y)\middle|x^2+y^2<1\right\}$内与路径无关，则$a=$______.

解　应填-1 .

由题设知
$$P=\frac{x}{x^2+y^2-1},\ Q=\frac{-ay}{x^2+y^2-1},$$

则
$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2-1)^2},\ \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{2axy}{(x^2+y^2-1)^2}\ .$$

由在D内曲线积分与路径无关知

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y},$$

解得 $a=-1$.

例 18.21　设曲线积分 $\int_C xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 与路径无关，其中 $\varphi(x)$ 具有连续的导数，且 $\varphi(0)=0$. 计算 $\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y$ 的值 .

解　由 $P(x,\,y)=xy^2$, $Q(x,\,y)=y\varphi(x)$, $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ ，得

$$2xy=y\varphi'(x),\ \varphi(x)=x^2+C .$$

再由 $\varphi(0)=0$ ，得 $C=0$ ，故 $\varphi(x)=x^2$ ，所以

$$\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy^2\mathrm{d}x+x^2y\mathrm{d}y .$$

沿直线 $y=x$ 从点 $(0,\,0)$ 到点 $(1,\,1)$ 积分，得

$$\int_{(0,\,0)}^{(1,\,1)} xy^2\mathrm{d}x+y\varphi(x)\mathrm{d}y=\int_0^1 2x^3\mathrm{d}x=\frac{1}{2} .$$

五、第二型曲面积分

（一）概念与性质

1. 向量场的通量

简单回顾一下向量场的概念 . 如果 Ω 上的每一点 $M(x,\,y,\,z)$ 都对应着一个向量 $\boldsymbol{F}$，则在 Ω 上就确定了一个向量函数 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)=P(x,\,y,\,z)\boldsymbol{i}+Q(x,\,y,\,z)\boldsymbol{j}+R(x,\,y,\,z)\boldsymbol{k}$ ，它表示一个**向量场** .

在一个向量场（比如电场、磁场或者某种不可压缩流体的速度场）中，Σ 为该场中的某一有向分片光滑曲面，并指定了曲面的外侧，则向量函数 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)$ 通过曲面 Σ 的**通量**（比如电场中的电通量，磁场中的磁通量，或者某流体的流量）为 $\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}^{\circ}\mathrm{d}S$ ，其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\,\cos\beta,\,\cos\gamma)$ 是有向曲面 Σ 在指定侧的单位法向量，且由 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z,\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y)$，得

$$\iint\limits_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_{\Sigma}P(x,\,y,\,z)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q(x,\,y,\,z)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R(x,\,y,\,z)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y .$$

于是就引出了第二型曲面积分的概念 .

2. 概念

第二型曲面积分的被积函数 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)=P(x,\,y,\,z)\boldsymbol{i}+Q(x,\,y,\,z)\boldsymbol{j}+R(x,\,y,\,z)\boldsymbol{k}$ 定义在光滑的空间有向曲面 Σ 上，其物理背景是向量函数 $\boldsymbol{F}(x,\,y,\,z)$ 通过曲面 Σ 的通量：

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

由此可以看出，第二型曲面积分是一个**向量函数**通过某**有向曲面**的通量(无几何量可言).要加强和前面所学积分的横向对比，理解它们的区别和联系，不要用错或者用混了.

3. 性质

以下总假设Σ是有向分片光滑曲面.

性质1(积分的线性性质) 设k_1，k_2为常数，则$\iint_{\Sigma}(k_1\boldsymbol{F}_1 \pm k_2\boldsymbol{F}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = k_1\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}_1\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} \pm k_2\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}_2\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

性质2(积分的方向性) $\iint_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma^+}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$，其中$\Sigma^-$为$\Sigma^+$的另一侧.

性质3(积分的可加性) 当$\Sigma_1\cup\Sigma_2=\Sigma$，$\Sigma_1\cap\Sigma_2=\varnothing$时，$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma_1}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \iint_{\Sigma_2}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$.

【注】第二型曲面积分的“对称性”.

曲面Σ是关于xOz面对称的有向曲面，设函数$Q(x, y, z)=xy^2z$（关于y的偶函数），则有

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \iint_{\Sigma} xy^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0 .$$

以下从两个角度解释上述结果.

①如图18-21所示，对称的两处$\mathrm{d}\boldsymbol{S}$的法向量在$\boldsymbol{j}$方向上的投影方向相反，故$Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x = xy^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, $Q(x, -y, z)(-\mathrm{d}z\mathrm{d}x) = -xy^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x$，于是$\iint_{\Sigma} xy^2z\mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0$.

②从通量的角度来理解，一般规定，流入为负通量，流出为正通量.如图18-22所示，从A流入，从B流出，通量为0，故积分为0.

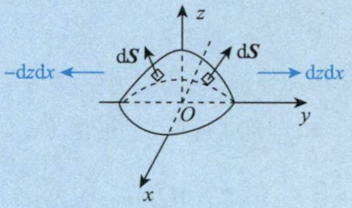


图 18-21

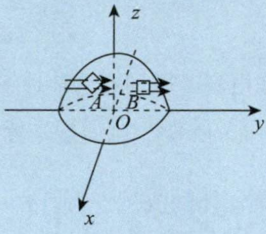


图 18-22

(二)计算

1. 基本方法——化为二重积分

①拆成三个积分(如果有的话)，一个一个做:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{\Sigma} P(x, y, z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} Q(x, y, z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

②分别投影到相应的坐标面上．

例如，对于$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，将曲面$\Sigma$投影到$xOy$平面上去．

a. 若Σ在xOy平面上的投影为一条线，即Σ垂直于xOy平面，则此积分为零．

b. 若不是“a”的情形，且Σ上存在两点，它们在xOy平面上的投影点重合，则应将Σ剖分成若干个曲面片，使对于每一曲面片上的点投影到xOy平面上的投影点不重合．

c. 假设已如此剖分好了，不妨将剖分之后的曲面片仍记为Σ．此时将Σ的方程写成$z=z(x, y)$的形式（只有投影到xOy平面上投影点不重合时，Σ的方程才能写成$z=z(x, y)$）.

③一投二代三计算．

a. 一投：确定出Σ在xOy平面上的投影域D_{xy}．

b. 二代：将$z=z(x, y)$代入$R(x, y, z)$．

c. 三计算：将$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写成$\pm\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．其中“±”号选取方式如下．

当$\cos\gamma>0$，即Σ的法向量与z轴交角为锐角，亦即当Σ的指定侧为上侧时，取“+”；

当$\cos\gamma<0$，即Σ的法向量与z轴交角为钝角，亦即当Σ的指定侧为下侧时，取“−”．

于是便得

理解见上面的注

$$\iint\limits_{\Sigma} R(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pm\iint\limits_{D_{xy}} R[x, y, z(x, y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

法向量$\boldsymbol{n}$向上$\Rightarrow +\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

法向量$\boldsymbol{n}$向下$\Rightarrow -\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

法向量$\boldsymbol{n}$向前$\Rightarrow +\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

法向量$\boldsymbol{n}$向后$\Rightarrow -\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

法向量$\boldsymbol{n}$向右$\Rightarrow +\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

法向量$\boldsymbol{n}$向左$\Rightarrow -\mathrm{d}z\mathrm{d}x$

【注】必须注意，上式等号左边是第二型曲面积分，$\iint\limits_{\Sigma}$表明了这件事，其中$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为有向曲面微元在xOy平面上的投影分量；等式右边是xOy平面上的二重积分，$\iint\limits_{D_{xy}}$表明了这件事，其中$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$为二重积分的面积微元，R中的z已用Σ的方程$z=z(x, y)$代入了，它是x, y的函数．两个$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$虽然写法一样，但其意义不一样．

对于其他两个第二型曲面积分的计算类似，请读者参照“②，③”两条自行写出．

④计算已转化成的二重积分．

例 18.22 设直线L过点$A(-1, 0, 1)$与$B(0, 0, 0)$，L绕z轴旋转一周得曲面Σ_0，计算$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{\mathrm{e}^z}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是由$\Sigma_0$，$z=1$，$z=2$所围有界闭区域的边界曲面，取外侧．

解 直线L的两点式方程为

$$\frac{x+1}{1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{-1},$$

可得其参数方程为

$$\begin{cases} x=-1+t, \\ y=0, \\ z=1-t, \end{cases}$$

即$\begin{cases} x=-z, \\ y=0. \end{cases}$

由第 17 讲“三、2.(4)”中的注，有 Σ_0 的方程为 $x^2+y^2=z^2+0=z^2$.

如图 18-23 所示，记 $\Sigma=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3$ ，其中 Σ_1 : $z=1,\ x^2+y^2\leqslant 1$ ； Σ_2 : $z=2,\ x^2+y^2\leqslant 4$ ； Σ_3 : $z=\sqrt{x^2+y^2},\ 1\leqslant z\leqslant 2$. 则

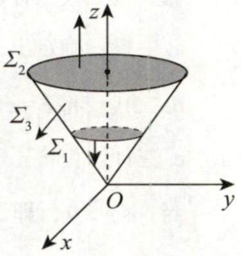


图 18-23

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}=\iint\limits_{\Sigma_1}+\iint\limits_{\Sigma_2}+\iint\limits_{\Sigma_3},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_1}=-\iint\limits_{D_1}\frac{\mathrm{e}^1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\mathrm{e}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi\mathrm{e},$$

$$\iint\limits_{\Sigma_2}=\iint\limits_{D_2}\frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\mathrm{e}^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\frac{1}{r}\cdot r\mathrm{d}r=4\pi\mathrm{e}^2,$$

$$\iint\limits_{\Sigma_3}=-\iint\limits_{D_3}\frac{\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\frac{\mathrm{e}^r}{r}\cdot r\mathrm{d}r=-2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e}),$$

其中 $D_1=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$, $D_2=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 4\}$, $D_3=\{(x,\ y)\,|\,1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$. 故

$$I=-2\pi\mathrm{e}+4\pi\mathrm{e}^2-2\pi(\mathrm{e}^2-\mathrm{e})=2\pi\mathrm{e}^2.$$

2. 高斯公式

设空间有界闭区域 Ω 由有向分片光滑封闭曲面 Σ 围成， $P(x,\ y,\ z)$ ， $Q(x,\ y,\ z)$ ， $R(x,\ y,\ z)$ 在 Ω 上具有一阶连续偏导数，则有公式

$$\oiint\limits_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}v,$$

其中， Σ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧 .

①封闭曲面且内部无奇点，直接用高斯公式 .

例 18.23 设空间有界区域 Ω 由柱面 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=0$ 和 $x+z=1$ 围成 . Σ 为 Ω 的边界曲面的外侧 . 计算曲面积分

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}2xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+xz\cos y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3yz\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

解 根据高斯公式，得

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2z-xz\sin y+3y\sin x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

因为Ω关于xOz坐标面对称，所以

因为 $y\to -y$，Ω 不变，故 Ω 关于 xOz 坐标面对称.

$$\iiint\limits_{\Omega}xz\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0,\ \iiint\limits_{\Omega}3y\sin x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$$

记$D=\{(x,\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$，则

$$I=\iiint\limits_{\Omega}2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x}2z\mathrm{d}z$$

$$=\iint\limits_{D}(1+x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi+\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r=\frac{5\pi}{4}\ .$$

②非封闭曲面，且$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\neq 0$，补面使其封闭（加面减面）.

例 18.24　计算$\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$，其中$\Sigma$为下半球面$z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$的上侧.

解　先将$(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}=1$代入被积函数.

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

补充一块有向平面$S:\begin{cases}x^2+y^2\leqslant 1,\\ z=0,\end{cases}$其法向量与$z$轴正向相反，从而得到

$$I=\oiint\limits_{\Sigma+S}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{S}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(z+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iiint\limits_{\Omega}(3+2z)\mathrm{d}v+\iint\limits_{D}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ ,$$

其中Ω为$\Sigma+S$围成的空间区域，D为$z=0$上的平面区域$x^2+y^2\leqslant 1$，于是

$$I=-2\pi-2\iiint\limits_{\Omega}z\mathrm{d}v+\pi=-\pi-2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{-\sqrt{1-r^2}}^0 z\mathrm{d}z=-\frac{\pi}{2}\ .$$

③封闭曲面有奇点在其内部，且除奇点外$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$，可换个面积分.（边界无需与原曲面重合）

【注】为什么可以换个面积分？$\operatorname{div}\boldsymbol{F}=0$是指所给场无源，于是通过任何封闭曲面（且无奇点在其内部）的通量为 0. 如图 18-24 所示，由于$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1^-}=0$，于是$\iint\limits_{\Sigma}=-\iint\limits_{\Sigma_1^-}=\iint\limits_{\Sigma_1}$（$\Sigma$与$\Sigma_1$同向）.

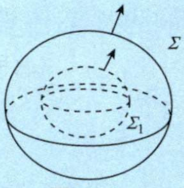


图 18-24

有时虽然所给的曲面是一张封闭曲面，法向量指的也是外侧，但“在Σ所包围的有界闭区域Ω的内部有奇点，但除奇点外P, Q, R具有连续的一阶偏导数，且满足$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0$”．此时，可以作一封闭曲面$\Sigma_1\subset\Omega$，将上述使偏导数不连续的点都包含在$\Sigma_1$的内部，$\Sigma_1$的法向量指向它所包围的有界区域的外侧，则有公式

$$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

如果后一积分比前一积分容易计算，就达到化难为易的目的了．

例 18.25 设Σ是椭球面$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$，法向量指向外侧，则$\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=$______．

解 应填4π．

经计算有

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\equiv 0，当(x, y, z)\neq(0, 0, 0)．$$

但是这里不能用高斯公式，因为在Σ内部的点$O(0, 0, 0)$处，P, Q, R都不连续，故在Σ内部作一球面

$$\Sigma_1：x^2+y^2+z^2=r^2(r>0)，$$

它的法向量指向球面外侧，于是有

$$\begin{aligned}&\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\\&=\frac{1}{r^3}\oint\!\!\!\oint_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&\overset{(*)}{=\!=}\frac{1}{r^3}\iiint_{\Omega_1}3\mathrm{d}v=\frac{1}{r^3}\cdot 3\cdot\frac{4}{3}\pi r^3=4\pi ,\end{aligned}$$

其中 (*) 处来自高斯公式，Ω_1为Σ_1所包围的闭球域．

例 18.26 计算

$$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|xy|\,z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+|x|\,y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z ,$$

其中Σ为$z=x^2+y^2$与$z=1$所围区域Ω的表面，方向向外．

解 由题设得，$I=\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|xy|\,z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint\!\!\!\oint_{\Sigma}|x|\,y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z\overset{\text{记}}{=\!=}I_1+I_2$，如图 18-25 所示，则

$$I_1\overset{\text{高斯}}{\underset{\text{公式}}{=\!=}}\iiint_{\Omega}|xy|\cdot 2z\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}2|xy|\,z\mathrm{d}v$$

$$=8\iiint\limits_{\substack{\Omega\\x,\ y\geqslant0}} xyz\mathrm{d}v=8\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant1\\x,\ y\geqslant0}}\mathrm{d}\sigma\int_{x^2+y^2}^{1}xyz\mathrm{d}z$$

$$=4\iint\limits_{\substack{x^2+y^2\leqslant1\\x,\ y\geqslant0}} xy[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}\sigma$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos\theta\sin\theta(1-r^4)r\mathrm{d}r=\frac{1}{4}\ .$$

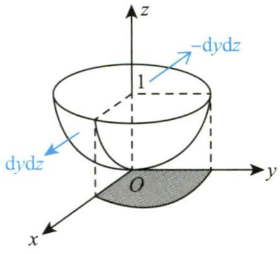


图 18-25

I_2不能用高斯公式，因$\frac{\partial}{\partial x}(|x|y^2z)$在$x=0$处不存在．而在点$(x,\ y,\ z)$与点$(-x,\ y,\ z)$处的通量分别为$|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z$与$|x|y^2z(-\mathrm{d}y\mathrm{d}z)$，又在面$z=1$上$\mathrm{d}z=0$，故$I_2=\oiint\limits_{\Sigma}|x|y^2z\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$．于是$I=\frac{1}{4}$．

六、空间第二型曲线积分的计算

①一投二代三计算．

设$\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\y=y(t),\ t\colon\ \alpha\to\beta,\\z=z(t),\end{cases}$则有

$$\int_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}\{P[x(t),\ y(t),\ z(t)]x'(t)+Q[x(t),\ y(t),\ z(t)]y'(t)+R[x(t),\ y(t),\ z(t)]z'(t)\}\mathrm{d}t\ .$$

②用斯托克斯公式．

设Ω为某空间区域，Σ为Ω内的分片光滑有向曲面片，Γ为逐段光滑的Σ的边界，它的方向与Σ的法向量成右手系，函数$P(x,\ y,\ z)$, $Q(x,\ y,\ z)$与$R(x,\ y,\ z)$在Ω内具有连续的一阶偏导数，则有斯托克斯公式：

$$\oint_{\Gamma}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\text{（此为第二型曲面积分形式）}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S\text{（此为第一型曲面积分形式），}$$

其中$\boldsymbol{n}^{\circ}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$为$\Sigma$的单位外法向量．

【注】 可以证明（这里不证），公式的成立与绷在Γ上的曲面大小、形状无关，如图 18-26 所示，有$\oint_{\Gamma}=\iint_{\Sigma_1}=\iint_{\Sigma_2}$.

举个容易理解的例子，小孩玩的泡泡棒（泡泡机），蘸了肥皂水吹一下泡泡就出来了，Γ就是蘸肥皂水的塑料圈，上面绷着的就是泡泡，在这些泡泡中不管哪个，不管大小形状，都可以作为计算公式中的Σ.
再问大家，绷在Γ上的什么曲面最简单？答得好，平面！在泡泡还没有脱离圈圈之前可以有各种形状，但最简单的形状是平面，是吹之前的最原始的形状！

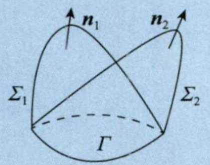


图 18-26

例 18.27 已知曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分$I=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$.

解 方法一 由$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x \end{cases}$得$\sqrt{2-x^2-y^2}=x$，即$2x^2+y^2=2$，亦即$x^2+\dfrac{y^2}{2}=1$.

于是曲线L的参数方程为$\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sqrt{2}\sin t, \\ z=\cos t, \end{cases}$ t从$\dfrac{\pi}{2}$（起点A）到$-\dfrac{\pi}{2}$（终点B）.

$$\begin{aligned} I&=\int_L (y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z \\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}[(\sqrt{2}\sin t+\cos t)\cdot(-\sin t)+\sqrt{2}\sin t\cdot\sqrt{2}\cos t+\cos^2 t\cdot 2\sin^2 t\cdot(-\sin t)]\mathrm{d}t \\ &=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}(-\sqrt{2}\sin^2 t)\mathrm{d}t=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin^2 t\mathrm{d}t \\ &=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi . \end{aligned}$$

方法二 设L_1是从点B到点A的直线段，Σ为平面$z=x$上由L与L_1围成的半圆面下侧，其法向量的方向余弦为$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$，且在$L$与$L_1$上，均有$z^2-x^2=0$.

由斯托克斯公式，

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ y+z & y & x^2y^2 \end{vmatrix}\mathrm{d}S=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_{\Sigma}(2x^2y+1)\mathrm{d}S .$$

由于曲面Σ关于xOz平面对称，所以$\iint\limits_{\Sigma}2x^2y\mathrm{d}S=0$，故

$$\oint_{L+L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\frac{1}{\sqrt{2}}\iint\limits_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

又L_1的参数方程为$x=0$，$y=y$，$z=0$（y从$-\sqrt{2}$到$\sqrt{2}$），所以

$$\int_{L_1}(y+z)\mathrm{d}x+(z^2-x^2+y)\mathrm{d}y+x^2y^2\mathrm{d}z=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}y\mathrm{d}y=0\ .$$

因此$I=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi$.

方法三 如图 18-27 所示，在点(x,y,z)和$(x,-y,z)$处的三个方向的通量分别为

$$(y+z)\mathrm{d}x,\ (-y+z)(-\mathrm{d}x),$$

$$y(-\mathrm{d}y),\ (-y)(-\mathrm{d}y),$$

$$x^2y^2\mathrm{d}z,\ x^2y^2(-\mathrm{d}z)\ .$$

于是

$$I=\int_L 2y\mathrm{d}x\xlongequal{\text{由方法一}}2\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}\sqrt{2}\sin t\mathrm{d}(\cos t)=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\mathrm{d}t=2\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\ .$$

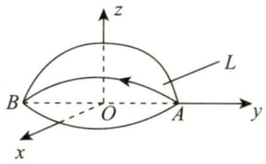


图 18-27

基础习题精练

习 题

18.1 设L为曲线$\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\x+y+z=0,\end{cases}$则$\oint_L(3x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}s=$（　　）.

(A) 27π　　(B) 18π　　(C) 12π　　(D) 6π

18.2 设Σ为球面$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=$（　　）.

(A) 4π　　(B) 2π　　(C) π　　(D)0

18.3 设Γ：$x=\cos t$，$y=\sin t$，$z=t$，$0\leqslant t\leqslant 2\pi$，则$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=$______.

18.4 设L为取正向的圆$x^2+y^2=a^2$，$a>0$，则曲线积分$\oint_L \dfrac{(\mathrm{e}^{x^2}-x^2y)\mathrm{d}x+(xy^2-\sin y^2)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=$______.

18.5 设Σ为球面$x^2+y^2+z^2=1$，则第一型曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}x(4x-z)\mathrm{d}S=$______.

18.6 设曲面Σ：$|x|+|y|+|z|=1$，则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)\mathrm{d}S=$______.

18.7 设Σ为$x^2+y^2+z^2=a^2$的外侧，$a>0$，则第二型曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+$
$z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y)=$______.

18.8 计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}v$，其中$\Omega$是由椭圆抛物面$z=4(x^2+y^2)$和平面$z=4$所围成的区域.

18.9 设L为自点$O(0,0)$沿曲线$y=\sin x$至点$A(\pi,0)$的有向弧段，计算平面第二型曲线积分

$$I=\int_L[\mathrm{e}^x\cos y+2(x+y)]\mathrm{d}x+\left(-\mathrm{e}^x\sin y+\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}y.$$

18.10 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$为有向曲面$z=x^2+y^2(0\leqslant z\leqslant 1)$，其法向量与$z$轴正向夹角为锐角.

18.11 设Σ为任意封闭曲面，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma_{外侧}}\left(x-\frac{1}{3}x^3\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\frac{4}{3}y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(3y-\frac{1}{3}z^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(1) 证明Σ为椭球面$x^2+4y^2+z^2=1$时，I达到最大值；

(2) 求I的最大值.

解答

18.1 (B) **解** 由轮换对称性可得，

$$\oint_L(3x^2-y^2-z^2)\mathrm{d}s=\oint_L x^2\mathrm{d}s=\oint_L\frac{x^2+y^2+z^2}{3}\mathrm{d}s$$

$$=3\oint_L\mathrm{d}s=3(2\pi\times 3)=18\pi.$$

18.2 (A) **解** $\oiint\limits_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=2\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S+3\oiint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S+\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$，又有$\bar{x}=\dfrac{1}{S}\oiint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}S$，$\bar{y}=\dfrac{1}{S}\oiint\limits_{\Sigma}y\mathrm{d}S$，$\bar{z}=\dfrac{1}{S}\oiint\limits_{\Sigma}z\mathrm{d}S$是球面$(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=1$的形心坐标公式，而球面的形心在球心$(1,0,-1)$处，故

$$\oiint_{\Sigma}(2x+3y+z)\mathrm{d}S=(2\bar{x}+3\bar{y}+\bar{z})S=(2+0-1)\cdot4\pi=4\pi\ .$$

18.3 $\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right)$ **解** $x^2+y^2+z^2=\cos^2 t+\sin^2 t+t^2=1+t^2$，$\mathrm{d}s=\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\,\mathrm{d}t$.

故
$$\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(1+t^2)\cdot\sqrt{2}\,\mathrm{d}t=\sqrt{2}\left(2\pi+\frac{8\pi^3}{3}\right)\ .$$

18.4 $\frac{1}{2}\pi a^2$ **解** 先将 L 的方程 $x^2+y^2=a^2$ 代入，得

$$原式=\frac{1}{a^2}\oint_L(\mathrm{e}^{x^2}-x^2y)\,\mathrm{d}x+(xy^2-\sin y^2)\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r^2\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{2}\pi a^2\ .$$

18.5 $\frac{16\pi}{3}$ **分析** 本题考查关于轮换对称性的判断 .

①函数 xz 在 Σ 的 8 个卦限内，4 正 4 负，且对应点有相同的绝对值，故 $\oiint_{\Sigma}xz\mathrm{d}S=0$；

②根据轮换对称性得到 $\oiint_{\Sigma}x^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}y^2\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}z^2\mathrm{d}S$.

解 $\oiint_{\Sigma}x(4x-z)\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}4x^2\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S=\frac{16\pi}{3}$.

18.6 $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ **解** 曲面 Σ 对称于 yOz 平面，x 为关于 x 的奇函数，所以 $\oiint_{\Sigma}x\mathrm{d}S=0$. 又因 Σ 关于 x，y，z 轮换对称，所以

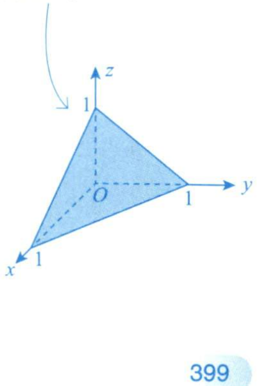
$$\oiint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}|z|\mathrm{d}S=\oiint_{\Sigma}|x|\mathrm{d}S,$$

$$\oiint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}(|x|+|y|+|z|)\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\oiint_{\Sigma}\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{3}\times A_{\Sigma},$$

其中 A_{Σ} 为 Σ 的面积 . 而 Σ 由 8 块同样的等边三角形组成，每块等边三角形的边长为 $\sqrt{2}$，所以

$$A_{\Sigma}=8\times\frac{1}{2}\times(\sqrt{2})^2\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3},$$



所以 $\oiint_{\Sigma}|y|\mathrm{d}S=\frac{4}{3}\sqrt{3}$，从而原式 $=\frac{4}{3}\sqrt{3}$.

18.7 $\frac{12}{5}\pi a^3$ **解** 记 Ω 是 Σ 所围的空间区域 .

$$\oiint_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\oiint_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{a^2}\iiint_{\Omega}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\frac{3}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^4\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi a^3 .$$

18.8 解 如图 18-28 所示，积分区域Ω在xOy面上的投影是一个圆心在原点的单位圆，所以

$$\Omega=\left\{(r,\ \theta,\ z)\middle|0\leqslant r\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi,\ 4r^2\leqslant z\leqslant 4\right\} .$$

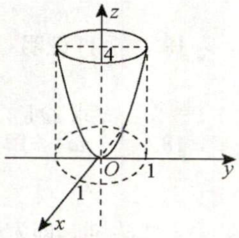


图 18-28

于是 $$\iiint_{\Omega}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}r^2\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cdot r\mathrm{d}r\int_{4r^2}^{4}\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(4r^3-4r^5)\,\mathrm{d}r=\frac{2}{3}\pi .$$

18.9 解 方法一 补线，用格林公式 .

$$I=\oint_{L+\overline{AO}}-\int_{\overline{AO}}=-\iint_{D}\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_{\pi}^{0}(\mathrm{e}^x+2x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\sin x}\mathrm{d}y-(\mathrm{e}^x+x^2)\Big|_{\pi}^{0}$$

$$=\frac{1}{2}\times 2-[1-(\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2)]=\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2 .$$

方法二 令 $I=\int_L \mathrm{e}^x\cos y\mathrm{d}x-\mathrm{e}^x\sin y\mathrm{d}y+\int_L 2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=I_1+I_2$，而

$$I_1=\int_L \mathrm{d}(\mathrm{e}^x\cos y)=\mathrm{e}^x\cos y\Big|_{(0,\,0)}^{(\pi,\,0)}=\mathrm{e}^{\pi}-1,$$

$$I_2=\int_L 2(x+y)\mathrm{d}x+\frac{3}{2}x\mathrm{d}y=\int_0^{\pi}\left[2(x+\sin x)+\frac{3}{2}x\cos x\right]\mathrm{d}x$$

$$=\left(x^2-2\cos x+\frac{3}{2}x\sin x+\frac{3}{2}\cos x\right)\Bigg|_0^{\pi}=\pi^2+1,$$

所以$I=I_1+I_2=\mathrm{e}^{\pi}+\pi^2$.

18.10 解 以Σ_1表示法向量指向z轴负向的有向平面$z=1(x^2+y^2\leqslant 1)$，D为Σ_1在xOy平面上的投影区域，则

$$\iint_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{D}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\pi .$$

设Ω表示由Σ和Σ_1所围成的空间区域，则由高斯公式知

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iiint_{\Omega}(2+1)\mathrm{d}v=-3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{1}\mathrm{d}z$$

$$=-6\pi\int_0^1(r-r^3)\mathrm{d}r=-6\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)=-\frac{3}{2}\pi\ .$$

因此，$\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\pi-(-\pi)=-\frac{1}{2}\pi$.

18.11　(1) **证明**　根据高斯公式，$I=\iiint\limits_{\Omega}(1-x^2-4y^2-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中$\Omega$为$\Sigma$所围的空间区域 . 为使$I$最大，要求$\Omega$是使得$1-x^2-4y^2-z^2\geqslant 0$的最大空间区域，即

$$\Omega=\{(x,\ y,\ z)|1-x^2-4y^2-z^2\geqslant 0\}\ ,$$

Σ为Ω的表面，即为椭球面$x^2+4y^2+z^2=1$时，I最大 .

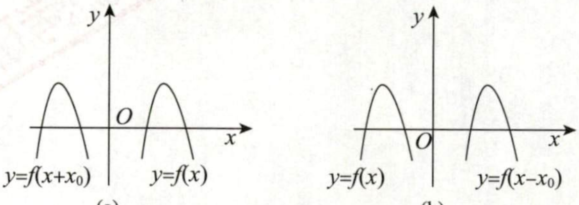
(2) **解**　由例 18.5 知，$I_{\max}=\frac{4\pi}{15}$.

附录1 图像变换

图像变换方式一般有如下三种．

(1) 平移变换．

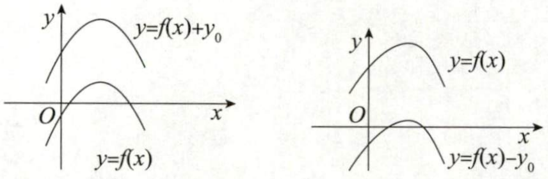
①将函数$y=f(x)$的图像沿x轴向左平移$x_0(x_0>0)$个单位长度，得到函数$y=f(x+x_0)$的图像[见图1(a)]；将函数$y=f(x)$的图像沿x轴向右平移$x_0(x_0>0)$个单位长度，得到函数$y=f(x-x_0)$的图像[见图1(b)].



(a) (b)

图 1

②将函数$y=f(x)$的图像沿y轴向上平移$y_0(y_0>0)$个单位长度，得到函数$y=f(x)+y_0$的图像[见图2(a)]；将函数$y=f(x)$的图像沿y轴向下平移$y_0(y_0>0)$个单位长度，得到函数$y=f(x)-y_0$的图像[见图2(b)].



(a) (b)

图 2

(2) 对称变换．

①将函数$y=f(x)$的图像关于x轴对称，得到函数$y=-f(x)$的图像[见图3(a)].

②将函数$y=f(x)$的图像关于y轴对称，得到函数$y=f(-x)$的图像[见图3(b)].

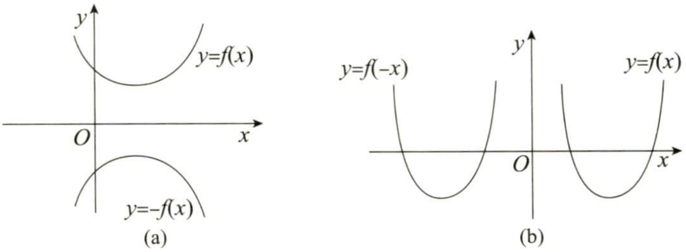


图 3

③将函数$y=f(x)$的图像关于原点对称，得到函数$y=-f(-x)$的图像［见图 4(a)].

④将函数$y=f(x)$的图像关于直线$y=x$对称，得到函数$y=f^{-1}(x)$的图像［见图 4(b)].

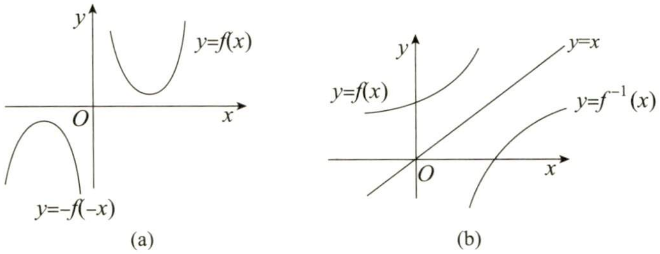


图 4

⑤保留函数$y=f(x)$在x轴及x轴上方的部分，把x轴下方的部分关于x轴对称到x轴上方并去掉原来下方的部分，得到函数$y=|f(x)|$的图像［见图 5(a)].

⑥保留函数$y=f(x)$在y轴及y轴右侧的部分，去掉y轴左侧的部分，再将y轴右侧图像关于y轴对称到y轴左侧，得到函数$y=f(|x|)$的图像［见图 5(b)].

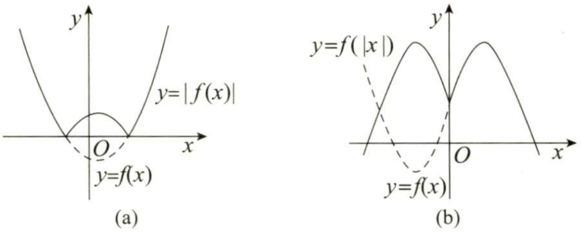


图 5

【注】$y=f(x)\Rightarrow F(x,y)=f(x)-y=0$.

①若$F(x,y)=F(-x,y)$，则$y=f(x)$关于y轴对称.

②若$F(x,y)=F(2T-x,y)$或$F(T+x,y)=F(T-x,y)$，则$y=f(x)$关于$x=T$对称.

③若$F(x,y)=F(x,-y)$，则$y=f(x)$关于x轴对称.

④若$F(x,y)=F(x,2T-y)$或$F(x,T+y)=F(x,T-y)$，则$y=f(x)$关于$y=T$对称.

⑤若$F(x,y)=F(-x,-y)$，则$y=f(x)$关于$(0,0)$点对称.

⑥若$F(a+x,y)=F(a-x,-y)$，则$y=f(x)$关于$(a,0)$点对称.

⑦若 $F(x, y)=F(y, x)$，则 $y=f(x)$ 关于 $y=x$ 对称．

以上结论中，②，④，⑥分别是①，③，⑤的更一般结论，将原对称性进行“平移”，要重视．

如

$$y^2=x^3-x^4，\ y^2=(1-x^2)^3，\ x^3+y^3-3xy=0\ .$$

关于 x 轴对称

关于 x 轴，y 轴，$(0, 0)$ 点对称

关于 $y=x$ 对称

$$\begin{cases} x=t-\sin t, \\ y=1-\cos t. \end{cases}$$

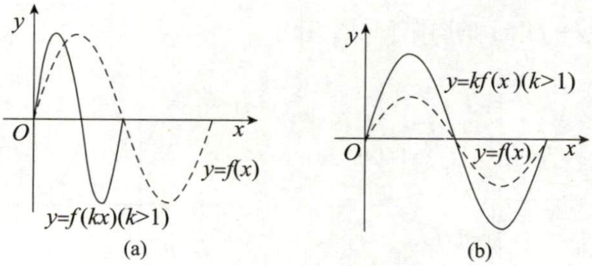
$$\longleftarrow \begin{cases} x_2=(2\pi-t)-\sin(2\pi-t)=2\pi-(t-\sin t)=2\pi-x_1, \\ y_2=1-\cos(2\pi-t)=1-\cos t=y_1, \end{cases}$$ 即 $F(x_1, y_1)=F(2\pi-x_1, y_1)$.

关于 $x=\pi$ 对称

(3) 伸缩变换．

①水平伸缩：$y=f(kx)(k>1)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像上每点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{k}$ 倍且纵坐标不变得到 [见图 6(a)]；$y=f(kx)(0<k<1)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像上每点的横坐标伸长到原来的 $\frac{1}{k}$ 倍且纵坐标不变得到．

②垂直伸缩：$y=kf(x)(k>1)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像上每点的纵坐标伸长到原来的 k 倍且横坐标不变得到 [见图 6(b)]；$y=kf(x)(0<k<1)$ 的图像，可由 $y=f(x)$ 的图像上每点的纵坐标缩短到原来的 k 倍且横坐标不变得到．

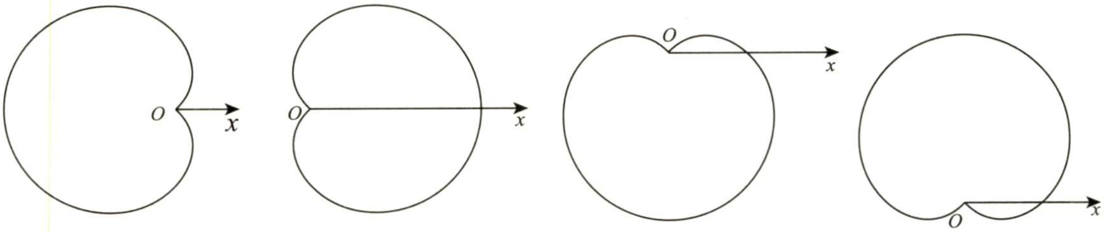


(a) (b)

图 6

附录2 常用平面图形

(1) 心形线（外摆线的一种）.



$r=a(1-\cos\theta)(a>0)$

(a)

$r=a(1+\cos\theta)(a>0)$

(b)

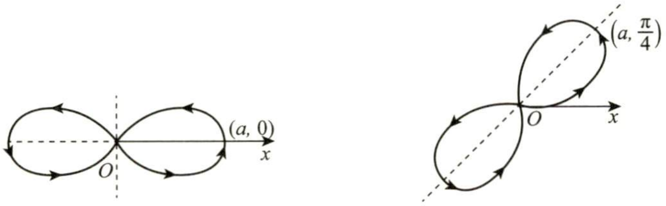
$r=a(1-\sin\theta)(a>0)$

(c)

$r=a(1+\sin\theta)(a>0)$

(d)

(2) 伯努利双纽线 .



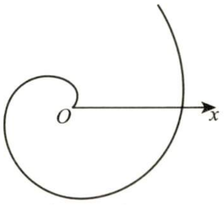
$r^2=a^2\cos 2\theta\ (a>0)$

(a)

$r^2=a^2\sin 2\theta\ (a>0)$

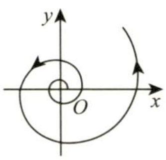
(b)

(3) 阿基米德螺线 .



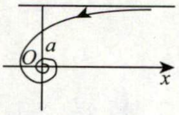
$r=a\theta\ (a>0,\ \theta\geqslant 0)$

(4) 对数螺线 .



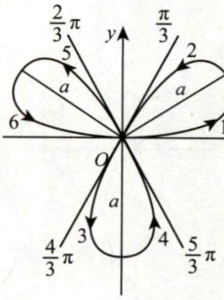
$r=\mathrm{e}^{a\theta}(a>0)$

(5) 双曲螺线 .



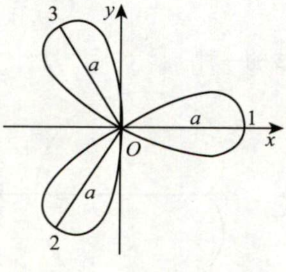
$r\theta=a(a>0)$

(6) 三叶玫瑰线 .



$r=a\sin 3\theta(a>0)$

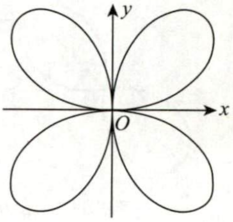
(a)



$r=a\cos 3\theta(a>0)$

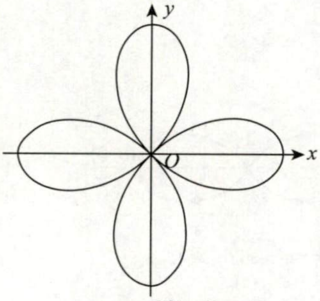
(b)

(7) 四叶玫瑰线 .



$r=a\sin 2\theta(a>0)$

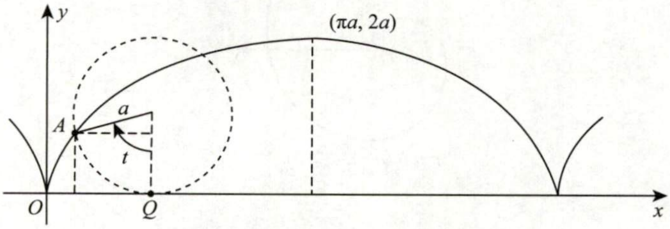
(a)



$r=a\cos 2\theta(a>0)$

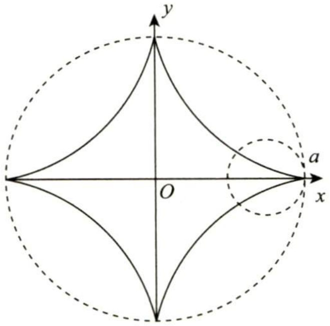
(b)

(8) 摆线（平摆线）.



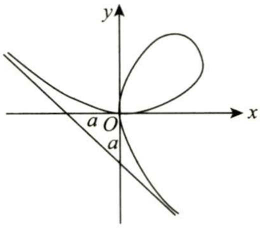
$$\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t) \end{cases} (a>0)$$

(9) 星形线（内摆线的一种）.



$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t \end{cases} \text{或} x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} (a > 0)$$

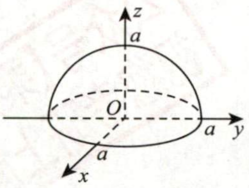
(10) 笛卡尔叶形线 .



$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \text{或} \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3} \end{cases} (a > 0)$$

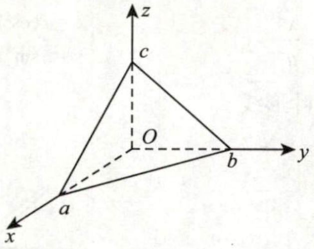
附录3 常用空间图形

(1)



$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$, $a>0$

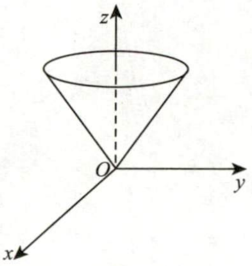
(2)



$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, a, b, $c>0$,

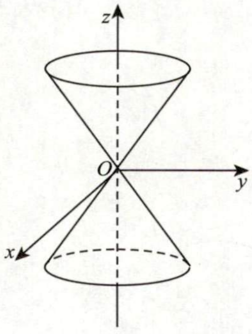
x, y, $z\geqslant 0$

(3)



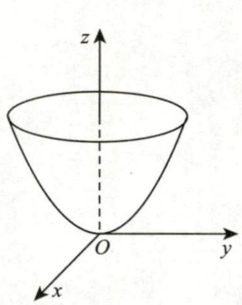
$z=\sqrt{x^2+y^2}$

(4)



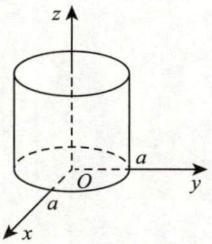
$x^2+y^2=z^2$

(5)



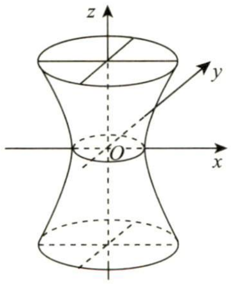
$z=x^2+y^2$

(6)



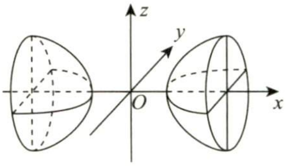
$x^2+y^2=a^2$, $z\geqslant 0$, $a>0$

(7)



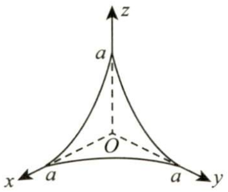
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(8)



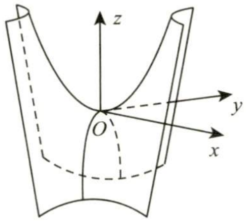
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

(9)



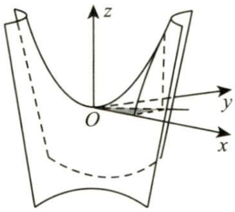
$$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=\sqrt{a}\text{，}a>0$$

(10)



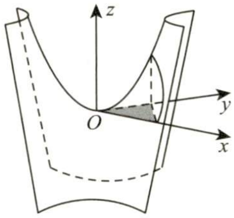
$$z=xy$$

(11)



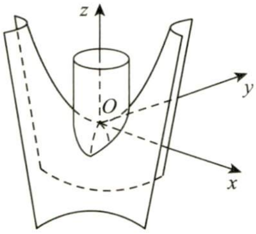
$$\begin{cases}z=xy\\y=x\\x=1\\z=0\end{cases}$$

(12)



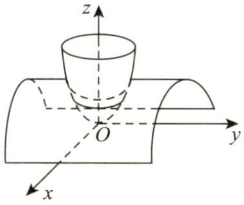
$$\begin{cases}z=xy\\x+y=1\\z=0\end{cases}$$

(13)



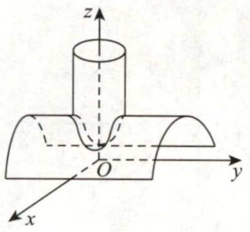
$$\begin{cases}z=xy\\x^2+y^2=a^2(a>0)\end{cases}$$

(14)



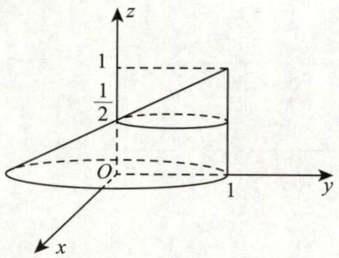
$$\begin{cases}z=x^2+y^2\\z=1-x^2\end{cases}$$

(15)



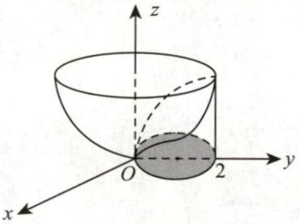
$$\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=1-x^2\end{cases}$$

(16)



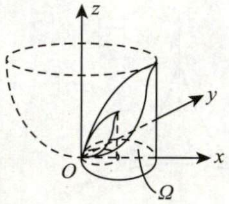
$$x^2+(y-z)^2=(1-z)^2,\ 0\leqslant z\leqslant 1$$

(17)



$$\begin{cases}z=x^2+y^2\\x^2+(y-1)^2=1\end{cases}$$

(18)



$$\begin{cases}z=2(x^2+y^2)\\x^2+y^2=x\\x^2+y^2=2x\\z=0\end{cases}$$

附录4 重要公式

1. 三角函数常用公式

(1) 诱导公式 .

☆小结：$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha, \\ \sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha, \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha, \\ \cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha, \end{cases}$ 这8个公式要熟稔于心.

角 θ 函数	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$2\pi-\alpha$
$\sin\theta$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$
$\cos\theta$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$\tan\theta$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$\tan\alpha$	$\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\theta$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$\cot\alpha$	$\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$

【注】(1) 如上表所示，奇变偶不变，符号看象限 (因任一角度均可表示为 $\frac{k\pi}{2}+\alpha$, $k\in\mathbf{Z}$, $|\alpha|\leqslant\frac{\pi}{4}$, 故 k 为奇数时得角 α 的异名函数值，k 为偶数时得角 α 的同名函数值，然后在前面加上一个把角 α 看成锐角时原来函数值的符号).

(2) 三角函数在四个象限中的符号如下表所示 .

角 θ所在象限 函数	第一象限	第二象限	第三象限	第四象限
$\sin\theta$	+	+	−	−
$\cos\theta$	+	−	−	+
$\tan\theta$	+	−	+	−
$\cot\theta$	+	−	+	−

(3) $\sec\alpha$ 和 $\csc\alpha$ 的函数值可由 $\frac{1}{\cos\alpha}$ 和 $\frac{1}{\sin\alpha}$ 得出 .

(2) 倍角公式 .

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,\ \cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

$$\sin 3\alpha=-4\sin^3\alpha+3\sin\alpha,\ \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

$$\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha},\ \cot 2\alpha=\frac{\cot^2\alpha-1}{2\cot\alpha}.$$

(3) 半角公式 .

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1-\cos\alpha),\ \cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(1+\cos\alpha),\text{（降幂公式）}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\ \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}},$$

$$\cot\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}.$$

(4) 和差公式 .

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,\ \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta},\ \cot(\alpha\pm\beta)=\frac{\cot\alpha\cot\beta\mp1}{\cot\beta\pm\cot\alpha}.$$

$$\to\tan\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}$$

(5) 积化和差与和差化积公式 .

①积化和差公式 .

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\ \cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\ \sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].$$

②和差化积公式 .

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},\ \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

(6) 万能公式 .

若 $u=\tan\frac{x}{2}(-\pi<x<\pi)$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$.

2. 一元二次方程基础

①一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq0)$.

②判别式 $\Delta=b^2-4ac$.

$\Delta\geqslant0$，方程有两个实根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$；$\Delta<0$，方程有两个共轭的复根 $x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\mathrm{i}}{2a}$.

③根与系数的关系（韦达定理）$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

3. 因式分解公式

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

② $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.

③ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

④ $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.

⑤ $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$.

⑥ $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

⑦ $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.

⑧ $a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1})$（$n$ 是正整数）.

⑨ n 为正奇数时，$a^n+b^n=(a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\cdots-ab^{n-2}+b^{n-1})$.

⑩二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{C}_n^k a^{n-k}b^k=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}b^k+\cdots+nab^{n-1}+b^n.$$

4. 阶乘与双阶乘

① $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\cdots\cdot n$，规定 $0!=1$.

② $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\cdots\cdot(2n)=2^n\cdot n!$.

③ $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)$.

张宇考研数学全家桶

一套完整的考研数学复习攻略

01 基础夯实

系统学习基础知识点，配合基础习题练习

学习时间： 现在—2024年5月

学习用书：

书课包《张宇考研数学基础30讲·高等数学分册》

书课包《张宇考研数学基础30讲·线性代数分册》

书课包《张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册》

《张宇考研数学题源探析经典1000题》A组

02 强化进阶

掌握高频考点和常考题型，提高解题能力

学习时间： 2024年3月—8月

学习用书：

书课包《张宇高等数学18讲》

书课包《张宇线性代数9讲》

书课包《张宇概率论与数理统计9讲》

《张宇考研数学题源探析经典1000题》B组&C组

03 真题演练

真题带练，把握命题规律，积累解题经验

学习时间： 2024年9月—10月

学习用书：《张宇考研数学真题大全解》

04 冲刺拔高

模考测试，科学预测，查漏补缺

学习时间： 2024年10月—12月

学习用书：

《考研数学命题人终极预测8套卷》

《张宇考研数学最后4套卷》

· 张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

· 张宇考研数学系列丛书

○ 教材类

张宇考研数学基础30讲 · 高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲 · 线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲 · 概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

○ 题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三）

考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三）

ISBN 978-7-5763-0941-6

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

定价：139.80元