启航 书课包

2025版

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

书课包

○主编 张宇

○副主编 高昆轮

【概率论与数理统计分册】

北京理工大学出版社

什么是启航书课包?

书课一体，一课一码，讲练测评，高效备考

一套配备
启航大咖精讲课的书

一套可以
进行课后巩固练习的书

一套享有
伴学服务&社群督学的书

一本书的价格 = 启航大咖网课 + 正规出版物 + 课后测练答 + 社群督学

书课包使用说明

- 1. 领取配套完整视频课程

① 扫描封面二维码，输入领课码验证
② 领课成功，点击底部“学习”，开始听课

- 2. 用“启航考研”小程序刷题

① 扫码免费听《基础30讲》配套习题讲解
② 精选题目专项练习，真题套卷模拟测试

启航书课包

张宇考研数学系列丛书·一

张宇考研数学基础30讲

书课包

【概率论与数理统计分册】

○主编 张宇

○副主编 高昆轮

北京理工大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

张宇考研数学基础 30 讲. 概率论与数理统计分册 / 张宇主编. —北京：北京理工大学出版社，2022.7（2023.8 重印）
ISBN 978 - 7 - 5763 - 1430 - 4

Ⅰ. ①张… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 ②概率论 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 ③数理统计 - 研究生 - 入学考试 - 自学参考资料 Ⅳ. ①O13 ②O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2022）第 110493 号

出版发行 / 北京理工大学出版社有限责任公司
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 /（010）68914775（总编室）
（010）82562903（教材售后服务热线）
（010）68944723（其他图书服务热线）
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 天津市蓟县宏图印务有限公司
开　　本 / 787 毫米 ×1092 毫米　1/16
印　　张 / 8.75
字　　数 / 218 千字
版　　次 / 2022 年 7 月第 1 版　2023 年 8 月第 6 次印刷
定　　价 / 69.80 元

责任编辑 / 多海鹏
文案编辑 / 多海鹏
责任校对 / 周瑞红
责任印制 / 李志强

前言

《张宇考研数学基础 30 讲》严格按照最新《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》编写，是真正意义上的考研数学基础阶段辅导用书，根据考研数学命题的趋势，并结合每一届使用本书的考生反馈，本书的 2025 版做了较大幅度的修改和完善，旨在帮助考生建立完整科学的考研数学基础知识结构体系，打下坚实的考研数学基础。

本书分成三个分册：高等数学分册、线性代数分册、概率论与数理统计分册。其中高等数学分册分为 18 讲、线性代数分册分为 6 讲、概率论与数理统计分册分为 6 讲，共 30 讲。每一讲由基础知识结构、基础内容精讲、基础习题精练三大模块组成。其中，基础内容精讲将知识点与例题完全结合在一起，即每讲一部分内容，接下来就配套相应的例题，可以帮助考生快速并深刻消化吸收所学内容。

《张宇考研数学基础 30 讲》书课包是一套完整的考研数学基础阶段备考方案。为帮助考生更好地理解每一个知识点，我对本书做了系统讲解，同学们扫描书中二维码即可快速定位对应知识点的视频讲解。本书的内容是根据基础课程讲解整理出来的学习笔记，我几乎把要说的话一句一句地写出来了，只需要集中精力认真听即可，帮助考生节省了做笔记的时间，真正做到了书和课的完美结合。

我建议考生结合课程反复研读本书直至字字搞懂、句句通透并熟稔于心，达到基础阶段的知识、思路、题型和方法皆会以清晰的结构呈现眼前的效果。本书是我多年基础阶段教学经验的总结，愿助潜心研读者打好地基、夯实基础，勇攀考研数学高峰。

感谢命题专家们给予的支持、帮助与指导，感谢编辑老师们的辛勤工作和无私奉献，感谢考生们的努力和信任。

本书自出版以来，承蒙考生厚爱，在考研数学基础阶段起到了一定的积极作用。望各位不吝赐教，多提意见与建议，特此致谢！

张宇

2023 年 6 月　于北京

目 录

第1讲 随机事件与概率

基础知识结构

- 基本概念
  - 随机试验
  - 随机事件
  - 样本空间
  - 事件的关系与运算
    - 关系
      - 包含
      - 相等
      - 积（交）
      - 相容
      - 互斥
      - 和（并）
      - 差
      - 逆（对立）
    - 运算
      - 吸收律
      - 交换律
      - 结合律
      - 分配律
      - 对偶律（德·摩根律）
  - 概率的定义
    - 描述性定义
    - 统计性定义
    - 公理化定义
- 古典概型和几何概型
  - 古典概型
    - 随机分配问题
    - 简单随机抽样问题
  - 几何概型

- 概率的性质与公式
  - 性质
    - 有界性
    - 单调性
  - 公式
    - 逆事件概率公式
    - 加法公式
    - 减法公式
    - 条件概率公式
    - 乘法公式
    - 全概率公式
    - 贝叶斯公式（逆概率公式）
- 事件的独立性和独立重复试验
  - 事件的独立性
  - 独立性的判定
  - 独立试验序列概型与n重伯努利概型

基础内容精讲

一、基本概念

1. 随机试验

如果一个试验满足以下三个条件：

(1) 试验可以在相同的条件下重复进行；

(2) 试验所有可能结果明确可知，且不止一个；

(3) 每一次试验会出现哪一个结果，事先并不能确定，

则称此试验为**随机试验**．

我们是通过研究随机试验来研究随机现象的，随机试验简称试验，用字母E或E_1，E_2，… 表示．

【注】在不少情况下，不能确切知道某一随机试验的全部可能结果，但可以知道它不超出某个范围．这时，也可以用这个范围来作为该试验的全部可能结果的集合．例如，需要记录某个城市一天的交通事故数量，则试验结果将是非负整数x．无法确定x的可能取值的确切范围，但可以把这个范围

取为$[0,+\infty)$，它总能包含一切可能的试验结果，尽管明知某些结果，如$x>10\,000$是不会出现的．甚至把这个范围取为$(-\infty,+\infty)$也无妨．这里体现了一定的数学抽象，它可以带来很大的方便．

2. 随机事件

在一次试验中可能出现，也可能不出现的结果称为**随机事件**，简称**事件**，并用大写字母A，B，C等表示．将每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**，记为Ω．每次试验中一定不发生的事件称为**不可能事件**，记为$\varnothing$．

【注】随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定，但是在大量重复试验的情况下，它的发生呈现出一定的规律性，这门课程正是要研究这种规律性，考生应在学习这门课程后，对此有较为深刻的认识．

3. 样本空间

随机试验的每一个可能结果称为**样本点**，记为ω．样本点的全体组成的集合称为**样本空间**(或**基本事件空间**)，记为Ω，即$\Omega=\{\omega\}$．由一个样本点构成的事件称为**基本事件**．随机事件A总是由若干个基本事件组成，即A是Ω的子集．

4. 事件的关系与运算

(1) 关系．

包含：如果事件A发生必导致事件B发生，则称事件B**包含**事件A(或A被B包含)，记为$A\subset B$．

相等：如果$A\subset B$且$B\subset A$，则称事件A与B**相等**，记为$A=B$．A与B相等，事实上也就是说，A与B由一些完全相同的试验结果构成，它不过是同一事件表面上看起来不同的两个说法而已．

积(交)：称"事件A与B同时发生"的事件为事件A与B的**积**事件(或**交**事件)，记为$A\cap B$或AB．

【注】称"有限个(或可列个)事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(\cdots)$同时发生"的事件为事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(\cdots)$的积事件(或交事件)，记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)．

相容：若$AB\neq\varnothing$，则称事件A和B**相容**．

互斥：若$AB=\varnothing$，则称事件A与B**互不相容**，也叫**互斥**．如果一些事件中任意两个事件都互斥，则称这些事件是**两两互斥**的，或简称**互斥**的．

和(并)：称"事件A与B至少有一个发生"的事件为事件A与B的**和**事件(或**并**事件)，记为$A\cup B$．

【注】称"有限个(或可列个)事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(\cdots)$至少有一个发生"的事件为事件$A_1, A_2, \cdots, A_n(\cdots)$的和事件(或并事件)，记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$(或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)．

差：称“事件A发生而事件B不发生”的事件为事件A与B的差事件，记为$A-B$．

逆（对立）：称“事件A不发生”的事件为事件A的逆事件或对立事件，记为$\overline{A}$．

由定义易知

$$A-B=A-AB=A\overline{B},$$

对立事件一定是互不相容事件，但互不相容事件不一定是对立事件

$$B=\overline{A}\Leftrightarrow AB=\varnothing \text{且} A\cup B=\Omega .$$

完备事件组：如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$（或$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$）$=\Omega$，$A_iA_j=\varnothing$（对一切$i\neq j$；$i,j=1,2,\cdots,n(\cdots)$），称有限个（或可列个）事件$A_1,A_2,\cdots,A_n(\cdots)$构成一个完备事件组．

文氏图：事件的关系与运算可以用文氏图形象地表示出来（见图 1-1），图中的矩形表示必然事件Ω．

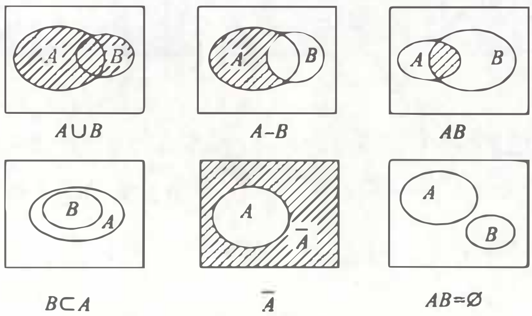


图 1-1

(2) 运算．

①吸收律　若$A\subset B$，则$A\cup B=B$，$A\cap B=A$．

②交换律　$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$．

③结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$．

④分配律　$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$．

⑤对偶律（德·摩根律）　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$．

【注】(1) 事件运算顺序约定为先进行逆运算，然后进行交运算，最后进行并或差运算．

(2) 事件的关系、运算与集合的关系、运算相当，且具有相同的运算法则，所以我们可以对比着理解记忆，并要学会用集合关系去考虑事件关系．

5. 概率的定义

(1) 描述性定义．

通常将随机事件A发生的可能性大小的度量（非负值）称为事件A发生的概率，记为$P(A)$．

(2) 统计性定义.

在相同条件下做重复试验，事件A出现的次数k和总的试验次数n之比$\frac{k}{n}$称为事件A在这n次试验中出现的**频率**.当试验次数n充分大时，频率将“稳定”于某常数p.n越大，频率偏离这个常数p的可能性越小.这个常数p就称为事件A的**概率**.

【注】(1) 概率的统计性定义实质上是说，用频率$\frac{k}{n}$作为事件A的概率$P(A)$的估计.其直观理解为某事件出现的可能性大小，可由其在多次重复试验中出现的频率去刻画.

(2) 从上述(1)可以看出，频率只是概率的估计，而非概率本身.也就是说，概率的统计性定义是无法准确给出某事件的概率的，其重要性主要基于以下两点.

①它提供了估计概率的方法.比如在一批产品中抽取样品，来估计该批产品的合格率(合格率是客观的数据，抽取样品计算出来的合格率只是一种估计).

②它提供了一种检验某结论是否正确的准则.比如，你说某批产品的合格率是95%，我们做试验，抽取样品进行计算，得出的结果是合格率为20%，远远低于你所说的95%，于是毫不犹豫地拒绝你的结论.

(3) 公理化定义.

设随机试验的样本空间为Ω，如果对每一个事件A都有一个确定的实数$P(A)$，且事件函数$P(\cdot)$满足:

①非负性：$P(A)\geqslant 0$；

②规范性：$P(\Omega)=1$；

③可列可加性：对任意可列个两两互不相容事件$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$(即$A_iA_j=\varnothing, i\neq j$；$i, j=1, 2, \cdots$)，有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

则称$P(\cdot)$为**概率**，$P(A)$为事件A的**概率**.

【注】(1) 数学上所说的“公理”，就是一些不加证明而承认的前提，上述公理化定义只是界定了概率这个概念所必须满足的一些一般性质，它不解决具体场合下的概率计算.

(2) 概率$P(\cdot)$是事件的函数.

(3) 虽然公理化定义不解决具体场合下的概率计算，但是我们却常常用它来判断某事件函数$P(\cdot)$是否是概率，这种题型在考研试题中也是经常遇到的.

二、古典概型和几何概型

1. 古典概型

(1) 概念 .

如果随机试验的样本空间满足:

①只有有限个样本点 (基本事件);

②每个样本点 (基本事件) 发生的可能性都一样,

则称随机试验的概率模型为古典概型 .

如果古典概型的基本事件总数为 n ，事件 A 包含 k 个基本事件，也叫作有利于 A 的基本事件为 k 个，则 A 的概率为

$$P(A)=\frac{k}{n}=\frac{\text{事件 } A \text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件总数}} .$$

由上式计算得出的概率称为 A 的古典概率 .

【注】计算的关键是基本事件、样本空间的选定以及基本事件数的计算 .

计数方法常用的有三种 .

(1) 列举法 (直接数数法) : 基本事件数不多时常用这种方法 .

(2) 集合对应法: ①加法原理——完成一件事有 n 类办法，第一类办法中有 m_1 种方法，第二类办法中有 m_2 种方法，……，第 n 类办法中有 m_n 种方法，则完成此事共有 $\sum_{i=1}^{n} m_i$ 种方法 .

②乘法原理——完成一件事有 n 个步骤，第一步有 m_1 种方法，第二步有 m_2 种方法，……，第 n 步有 m_n 种方法，则完成此事共有 $\prod_{i=1}^{n} m_i$ 种方法 .

③排列——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素，并按照一定顺序排成一列，叫作排列 . 所有排列的个数叫作排列数，记作

$$\mathrm{P}_n^m=n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!} .$$

当 $m=n$ 时， $\mathrm{P}_n^n=\frac{n!}{0!}=n!$ ，叫作全排列 .

④组合——从 n 个不同的元素中取出 $m(\leqslant n)$ 个元素，并成一组，叫作组合 . 所有组合的个数叫作组合数，记作

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{P}_n^m}{m!} .$$

$\mathrm{C}_n^m=\frac{n!}{m!(n-m)!}$

$\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$

$0!=1$

$\mathrm{C}_n^0=1$

(3) 逆数法：先求 $\overline{A}$ 中的基本事件数 $n_{\overline{A}}$，用基本事件总数 n 减去 $n_{\overline{A}}$ 便得 A 中的基本事件数，这种方法常用于计算含有“至少”字样的事件的概率．

(2) 计算方法．

①随机分配问题．

随机分配也叫**随机占位**，突出一个“放”字，即将 n 个可辨质点随机地分配到 N 个盒子中，区分每盒可以容纳任意多个质点和最多可以容纳一个质点，不同分法的总数如表所示．

分配方式	不同分法的总数
每盒容纳任意多个质点	N^n（见注①）
每盒容纳至多一个质点	$\mathrm{P}_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$（见注②）

【注】①每个质点均可放到 N 个盒子中的任何一个，即有 N 种放法，于是 n 个可辨质点放到 N 个盒子中共有 N^n 种不同放法．

②质点可辨，且一个盒子至多容纳一个质点，故 n 个质点放到 $N(N\geqslant n)$ 个盒子中的所有不同放法即从 N 个元素中选取 n 个元素的排列数 P_N^n．

例 1.1　将 n 个球随机放入 $N(n\leqslant N)$ 个盒子中，每个盒子可以放任意多个球．求下列事件的概率：$A=\{$某指定 n 个盒子各有一球$\}$；$B=\{$恰有 n 个盒子各有一球$\}$；$C=\{$指定 $k(k\leqslant n)$ 个盒子各有一球$\}$．

解　这是随机占位的问题，设 n 个球，N 个盒子是可分辨的（例如编号），由于每个盒子可以放任意多个球，因此每个球都有 N 种不同的放置方法．将 n 个球随机放入 N 个盒子的一种放法作为基本事件，则基本事件总数为 N^n．事件 A 所含的基本事件是 n 个不同球的一种排列，故

$$n_A=n!,\quad P(A)=\frac{1\cdot n!}{N^n}.$$

“某指定n个”，只有此一种情况

事件 B 中的基本事件可以设想为先从 N 个盒子中选出 n 个（共有 C_N^n 种不同选法），而后把 n 个球随机放入这 n 个盒子中，每盒一球（共有 $n!$ 种不同放法），因此 B 中基本事件数

$$n_B=\mathrm{C}_N^n\cdot n!,\quad P(B)=\frac{\mathrm{C}_N^n\cdot n!}{N^n}.$$

“恰有n个”，有 C_N^n 种情形

事件 C 的基本事件可以设想为先从 n 个球中选出 k 个球（有 C_n^k 种不同选法），再将这 k 个球随机放入指定的 k 个盒子中，每盒一球（有 $k!$ 种不同放法），最后将余下的 $n-k$ 个球随机放入其余的 $N-k$ 个盒子中，每个球都有 $N-k$ 种放置方法，因此共有 $(N-k)^{n-k}$ 种不同放法，故

$$n_C=\mathrm{C}_n^k\cdot k!(N-k)^{n-k},\quad P(C)=\frac{\mathrm{C}_n^k k!(N-k)^{n-k}}{N^n}=\frac{n!(N-k)^{n-k}}{(n-k)!N^n}.$$

【注】许多问题的结构形式与分球入盒问题相同，都属于随机占位问题．例如生日问题（n个人生日，相当于n个球随机放入365个盒子中，每盒可以放多个球）；住房分配问题（n个人被分配到N个房间中去，每个房间可住多个人）；乘客下车问题（n个乘客在N个车站下车的各种可能情况）；等等．对这些问题的求解都可以用“将n个球等可能地投放到N个盒子中”的思路来考虑．

比如12个人$\omega_1,\cdots,\omega_{12}$回母校参加校庆，每个人在365天中的哪一天出生等可能．令

$$A_1=\{\text{生日分别为每个月的第一天}\};$$

$$B_1=\{\text{生日全不相同}\};\ \overline{B}_1=\{\text{至少有两人生日相同}\};$$

$$C_1=\{\text{有且仅有三个人的生日分别在劳动节、儿童节、中秋节}\},$$

则A_1，B_1，C_1就对应着题中的A，B，C，只不过此时$N=365$，$n=12$，$k=3$．

②简单随机抽样问题．

设$\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_N\}$含$N$个元素，称$\Omega$为**总体**．如果各元素被抽到的可能性相同，则总体Ω的抽样称作**简单随机抽样**，突出一个“取”字．

简单随机抽样分为先后有放回、先后无放回及任取这三种不同的方式．在每种抽样方式下各种不同抽取方法（基本事件）的总数如表所示．

抽样方式	抽取法总数
先后有放回取n次	N^n（见注①）
先后无放回取n次	$\mathrm{P}_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1)$（见注②）
任取n个	C_N^n（见注③）

【注】①既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，每次从Ω中随意抽取一个元素，并在抽取下一元素前将其放回Ω，于是每次都有N个元素可被抽取，即有N种抽取方法，抽取n次，即N^n．

②既考虑抽到何元素，又考虑各元素出现的顺序，凡是抽出的元素均不再放回Ω，于是每次抽取时都比上一次少了一个元素，抽$n(n\leqslant N)$次，即

$$\mathrm{P}_N^n=N(N-1)\cdot\cdots\cdot(N-n+1).$$

③任取$n(n\leqslant N)$个是指一次性取n个元素，相当于将n个元素无序且无放回地取走，其抽取法总数为

$$\mathrm{C}_N^n=\frac{\mathrm{P}_N^n}{n!}.$$

例 1.2　袋中有5个球，3个白球，2个黑球．

(1) 先后有放回取2个球；

(2) 先后无放回取 2 个球；

(3) 任取 2 个球．

求取的 2 个球中至少 1 个是白球的概率．

解 用对立事件思想，计算“两球全黑”的种数，再用总数减去它．

(1) $5^2-2^2=21$(种)．

(2) $5\cdot 4-2\cdot 1=18$(种)．

(3) $C_5^2-C_2^2=9$(种)．

下面计算概率．

(1) $\dfrac{5^2-2^2}{5^2}=\dfrac{21}{25}$．

(2) $\dfrac{5\cdot 4-2\cdot 1}{5\cdot 4}=\dfrac{9}{10}$．

(3) $\dfrac{C_5^2-C_2^2}{C_5^2}=\dfrac{9}{10}$．

【注】本题中的 (2) 与 (3) 概率相同，如何理解？

$\dfrac{2\cdot 1}{5\cdot 4}=\dfrac{C_2^2\cdot P_2^2}{C_5^2\cdot P_2^2}=\dfrac{C_2^2}{C_5^2}$，左边上下有序，右边上下无序，相当于把顺序“消掉”了，故“先后无放回取 k 个球”与“任取 k 个球”的概率相同．由于 (3) 较方便，因此计算 (2) 时，可按 (3) 来计算．

例 1.3 袋中有 100 个球，40 个白球，60 个黑球．

(1) 先后有放回取 20 个球，求取出 15 个白球，5 个黑球的概率；

(2) 先后无放回取 20 个球，求取出 15 个白球，5 个黑球的概率；

(3) 先后有放回取 20 个球，求第 20 次取到白球的概率；

(4) 先后无放回取 20 个球，求第 20 次取到白球的概率．

解 (1) $p_1=\dfrac{40^{15}\cdot 60^5\cdot C_{20}^{15}}{100^{20}}$．

(2) 按照“任取 20 个球”来计算，即 $p_2=\dfrac{C_{40}^{15}C_{60}^{5}}{C_{100}^{20}}$．

(3) $p_3=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$（有放回取球，每次抽取的样本空间没有变化，故每次取到白球的概率始终为 $\dfrac{2}{5}$）．

(4) 看作随机占位问题．设有 100 个盒子，每个盒子中放 1 个球，则要求第 20 个盒子中放入白球即可．故 $p_4=\dfrac{C_{40}^{1}\cdot 99!}{100!}=\dfrac{40}{100}=\dfrac{2}{5}$．

【注】$p_4 = p_3$．例 1.3(4) 是抓阄模型，即使无放回，每次取到白球的概率也不会变，可理解成依概率摸球．类比的例子：

①设有 100 个灰球，白的成分：黑的成分 =40 ：60，每次取到球中白的成分是 40%；

②设有糖水，糖的成分：水的成分 =40 ：60，每次取一勺糖水，取到糖的成分是 40%.

2. 几何概型

如果随机试验的样本空间满足：

①样本空间（基本事件空间）Ω是一个可度量的有界区域；

②每个样本点（基本事件）发生的可能性都一样，即样本点落入Ω的某一可度量的子区域S的可能性大小与S的几何度量成正比，而与S的位置及形状无关，

则称随机试验的概率模型为**几何概型**． 引例：天上掉馅饼

在几何概型随机试验中，如果S_A是样本空间Ω的一个可度量的子区域，则事件$A=\{$样本点落入区域$S_A\}$的概率为

$$P(A)=\frac{S_A\text{的几何度量}}{\Omega\text{的几何度量}}.$$

由上式计算得出的概率称为A的**几何概率**．

【注】古典概型与几何概型的区别：基本事件有限、等可能发生的随机试验为**古典概型**；基本事件无限且具有几何度量、等可能发生的随机试验为**几何概型**．

例 1.4 在区间$(0, 1)$中随机地取两个数，则这两个数之差的绝对值小于 0.5 的概率为______.

解 应填 0.75.

设两个数分别为x，y，则依题意(x, y)的取值范围为正方形区域$D=\{(x, y)\mid 0<x<1, 0<y<1\}$．又$|x-y|<0.5$，则所在区域如图 1-2 中阴影部分所示，于是所求概率为

$$p=\frac{1^2-0.5^2}{1^2}=0.75.$$

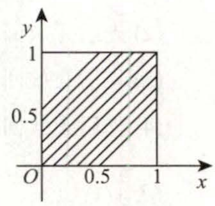


图 1-2

三、概率的性质与公式

如，用Ω表示一个人在8:00~9:00之间进入教室，

1. 性质

$A=\{8:30\text{到达教室}\}$，则$P(A)=\frac{0}{1}=0$.

(1) 有界性：对于任一事件A，有$0\leqslant P(A)\leqslant 1$，且$P(\varnothing)=0, P(\Omega)=1$．

【注】$P(A)=0$，不能断言$A=\varnothing$；$P(A)=1$，不能断言$A=\Omega$．

(2) 单调性：设A, B是两个事件，若$A\subset B$，则有

$$P(B-A)=P(B)-P(A),\ P(B)\geqslant P(A).$$

2. 公式

(1) 逆事件概率公式：对于任一事件A，有$P(\overline{A})=1-P(A)$.

(2) 加法公式：对于任意两个事件A, B，有$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$.

【注】(1) 设A_1, A_2, A_3为任意三个事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup A_3)=P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)-P(A_1A_2)-P(A_1A_3)-P(A_2A_3)+P(A_1A_2A_3).$$

(2) 若A_1, A_2, $\cdots$, A_n是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n).$$

(3) 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\overline{B})$.

(4) 条件概率公式：设A, B为任意两个事件，若$P(A)>0$，我们称在已知事件A发生的条件下，事件B发生的概率为**条件概率**，记为$P(B\mid A)$，且

$$P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

【注】(1) 条件概率$P(\cdot\mid A)$是概率，概率的一切性质和结论对条件概率都适用.

例如，

$$P(\overline{B}\mid A)=1-P(B\mid A),$$

$$P[(B-C)\mid A]=P(B\mid A)-P(BC\mid A),$$

等等.

(2) 条件概率就是在一定的附加条件之下所计算的概率. 当说到“条件概率”时，总是指另外附加了条件，其形式可归结为“已知某事件发生了”.

(5) 乘法公式：如果$P(A)>0$，则$P(AB)=P(A)P(B\mid A)$.

一般地，对于$n>2$，如果$P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)\cdots P(A_n\mid A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

全集分解思想引例：一个村子和三个小偷的故事.

(6) 全概率公式：如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $P(A_i)>0$，则对任一事件B，有

$$B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,\ P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i).$$

存在$n=\infty$的情形

(7) 贝叶斯公式（又称逆概率公式）：如果$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$, $A_iA_j=\varnothing(i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, $P(A_i)>0$,

则对任一事件 B，只要 $P(B)>0$，就有

$$P(A_j\mid B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

【注】全概率公式是用于计算某个"结果" B 发生的可能性大小．如果一个"结果" B 的发生总是与多个"原因" A_i 相联系，那么在计算 $P(B)$ 时，我们一般这样处理：

$$B=B\Omega=B\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB,$$

然后应用全概率公式计算 $P(B)$，我们常称这种方法为**全集分解法**．如果在"结果" B 发生的条件下，探求导致这一"结果"的各种"原因"，即 A_i 发生的可能性大小 $P(A_i\mid B)$，则要应用贝叶斯公式．

例 1.5 设 A,B 为两个随机事件，则（　　）．

(A) $P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\leqslant 1$　　(B) $P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\geqslant 1$

(C) $P(A-B)\leqslant P(A)-P(B)$　　(D) $P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})\leqslant 1$

解 应选 (A).

本题涉及事件之间的关系，由于 $AB\subset A\cup B$，即有 $P(AB)\leqslant P(A\cup B)$，从而有

$$P(AB)\leqslant P(A\cup B)=1-P(\overline{A\cup B})=1-P(\overline{A}\,\overline{B}),$$

即 $P(AB)+P(\overline{A}\,\overline{B})\leqslant 1$，同时有

$$P(A\cup B)-P(AB)=P(A\cup B)+P(\overline{AB})-1=P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})-1\geqslant 0,$$

即

$$P(A\cup B)+P(\overline{A}\cup\overline{B})\geqslant 1,$$

知选项 (B)，(D) 不正确．又 $AB\subset B$，有 $P(AB)\leqslant P(B)$，从而有

$$P(A-B)=P(A)-P(AB)\geqslant P(A)-P(B),$$

知选项 (C) 不正确，故本题选择 (A).

例 1.6 设随机事件 A,B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$，则有（　　）．

(A) $A\cup B=\Omega$　　(B) $AB=\varnothing$

(C) $P(\overline{A}\cup\overline{B})=1$　　(D) $P(A-B)=0$

解 应选 (C).

前面已经指出，$P(A\cup B)=1$ 不能推出 $A\cup B=\Omega$，且 $P(AB)=P(A\cup B)-P(A)-P(B)=0$ 不能推出 $AB=\varnothing$．故选项 (A)，(B) 不正确．

又 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=\frac{1}{2}$，选项 (D) 不正确．从而 $P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{AB})=1-P(AB)=1$，选 (C).

例 1.7　设 A, B, C 是三个随机事件，A 与 C 互斥，$P(AB)=\frac{1}{2}, P(C)=\frac{1}{3}$，则 $P(AB|\overline{C})=$
______.

解　应填 $\frac{3}{4}$．

因为 A 与 C 互斥，所以 $P(AC)=0$．又 $ABC\subset AC$，所以 $P(ABC)=0$，故

$$P(AB|\overline{C})=\frac{P(AB\overline{C})}{P(\overline{C})}=\frac{P(AB)-P(ABC)}{1-P(C)}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}.$$

【注】由于 $AC=\varnothing$，则 $ABC=\varnothing B=\varnothing$，得到 $P(ABC)=0$．

例 1.8　已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$，则 $P(A\cup B)=$______.

解　应填 $\frac{1}{3}$．

由乘法公式知

$$P(AB)=P(A)P(B|A)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\ P(B)=\frac{P(AB)}{P(A|B)}=\frac{1/12}{1/2}=\frac{1}{6},$$

所以

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

例 1.9　某人给四位亲友各写一封信，然后随机地装入 4 个写好地址的信封中，且每个信封装一封信．问：

(1) 4 封信都装对了的概率；

(2) 4 封信都装错了的概率．

解　设事件 $A_i(i=1, 2, 3, 4)$ 为“第 i 封信装对了”，事件 A 为“4 封信都装对了”，事件 B 为“4 封信都装错了”．于是

(1)
$$P(A)=P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)P(A_4|A_1A_2A_3)$$
$$=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{1}=\frac{1}{24}.$$

(2)
$$P(B)=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4})$$

德·摩根公式 $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

$$=1-P(\boxed{\overline{\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}\,\overline{A_4}}})=1-P(\boxed{A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4})$$
$$=1-\{P(A_1)+P(A_2)+P(A_3)+P(A_4)-$$

$$[P(A_1A_2)+P(A_1A_3)+P(A_1A_4)+P(A_2A_3)+P(A_2A_4)+P(A_3A_4)]+$$
$$[P(A_1A_2A_3)+P(A_1A_2A_4)+P(A_1A_3A_4)+P(A_2A_3A_4)]-P(A_1A_2A_3A_4)\},$$

其中$P(A_i)=\frac{1}{4}$，$P(A_iA_j)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$，$P(A_iA_jA_k)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{24}(1\leqslant i,\ j,\ k\leqslant 4,\ i\neq j\neq k)$，于是

$$P(B)=1-4\times\frac{1}{4}+6\times\frac{1}{12}-4\times\frac{1}{24}+\frac{1}{24}=\frac{3}{8}.$$

【注】本题装信过程可看作无放回抽取信件，依次装入信封．在计算第(2)问时，直接计算较为困难，这种情况下，采用逆向思维方法求解问题更加简捷．

例 1.10 从1，2，3，4中任取一个数，记为X，再从$1,\cdots,X$中任取一个数，记为Y，则$P\{Y=2\}=$______.

解 应填$\frac{13}{48}$.

$$P\{Y=2\}=P\{X=1\}P\{Y=2\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y=2\mid X=2\}+$$
$$P\{X=3\}P\{Y=2\mid X=3\}+P\{X=4\}P\{Y=2\mid X=4\}$$
$$=\frac{1}{4}\times 0+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{13}{48}.$$

例 1.11 一批产品有10个正品和2个次品，任意抽取两次，每次抽一个，抽出后不再放回，则第二次抽出的是次品的概率为______.

解 应填$\frac{1}{6}$.

记$A_i=\{$第i次取得次品$\}$，$i=1,2$，则由已知得

$$P(A_1)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6},\ P(\overline{A_1})=\frac{10}{12}=\frac{5}{6},\ P(A_2\mid A_1)=\frac{1}{11},\ P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{2}{11}.$$

由全概率公式得$P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{1}{6}\times\frac{1}{11}+\frac{5}{6}\times\frac{2}{11}=\frac{1}{6}$.

【注】此例为抓阄模型：有12个可辨产品放入12个格子，每个格子放1个产品，则放法总数为12!，现只关注第2个格子放一个次品，则放法总数为$C_2^1\cdot1\cdot11!$，故$p=\frac{C_2^1\cdot1\cdot11!}{12!}=\frac{1}{6}$，此过程与结果表明，从第1次到第12次取到次品的概率均为$\frac{1}{6}$，即亦可用例1.3(4)的结论直接得出结果$\frac{1}{6}$.

例 1.12 设有两批数量相同的零件，已知有一批产品全部合格，另一批产品有25%不合格．从两批产品中任取1只，经检验是正品，放回原处，并从原所在批次再取1只，求这只产品是次品的概率．

分析 两次抽取情况有不同之处，第一次是在完全不知情的情况下等可能地从两批产品中抽取，

第二次是在第一次抽取产品并检验合格后，这时对所抽取是第一批还是第二批产品的概率已有计算，因此计算要分两步走．第一步：在已知抽取产品合格的条件下，计算抽取的是第一批还是第二批产品的概率，属于贝叶斯概型；第二步：事件“从第一批产品中抽取”和“从第二批产品中抽取”构成一个完备事件组，计算第二次抽到次品的概率，属于全概率概型．两个概型的复合，常常是该类题型的特点．

解 设 $H_i(i=1,2)$ 为“第一次从第 i 批产品中抽取”，A 为“所取产品为正品”，则有

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2},\ P(A\mid H_1)=1,\ P(A\mid H_2)=\frac{3}{4},$$

即有

$$P(A)=P(H_1)P(A\mid H_1)+P(H_2)P(A\mid H_2)=\frac{7}{8},$$

从而有

$$P(H_1\mid A)=\frac{P(H_1)P(A\mid H_1)}{P(A)}=\frac{4}{7},$$

$$P(H_2\mid A)=1-P(H_1\mid A)=\frac{3}{7}\ .$$

又设 $C_i(i=1,2)$ 为“第二次从第 i 批产品中抽取”，则有

$$P(C_1)=P(H_1\mid A)=\frac{4}{7},\ P(C_2)=P(H_2\mid A)=\frac{3}{7},$$

$$P(\overline{A})=P(C_1)P(\overline{A}\mid C_1)+P(C_2)P(\overline{A}\mid C_2)$$

$$=\frac{4}{7}\times 0+\frac{3}{7}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{28}\ .$$

四、事件的独立性和独立重复试验

1. 事件的独立性

设 A, B 为两个事件，如果 $P(AB)=P(A)P(B)$，则称事件 A 与 B **相互独立**，简称 A 与 B **独立**．

【注】 设 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 为 $n(n\geqslant 2)$ 个事件，如果对其中任意有限个事件 A_{i_1}, A_{i_2}, $\cdots$, A_{i_k} $(2\leqslant k\leqslant n)$，有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k})=P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}),$$

则称 n 个事件 A_1, A_2, $\cdots$, A_n 相互独立．

考研中常考的是 $n=3$ 时的情形．细致说来，设 A_1, A_2, A_3 为三个事件，若

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2), \tag{1-1}$$

$$P(A_1A_3)=P(A_1)P(A_3), \tag{1-2}$$

$$P(A_2A_3)=P(A_2)P(A_3), \tag{1-3}$$

$$P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3), \tag{1-4}$$

则称事件 A_1, A_2, A_3 **相互独立**. 当去掉上述 (1-4) 式后，称只满足 (1-1), (1-2), (1-3) 式的事件 A_1, A_2, A_3 **两两独立**. 见例 1.13.

2. 独立性的判定

①A 与 B 相互独立 $\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}$ A 与 $\overline{B}$ 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 B 相互独立 $\Leftrightarrow$ $\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 相互独立.

【注】(1) 仅证 (*), 由 A, B 独立，有 $P(AB)=P(A)P(B)$，于是

$$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=P(A)-P(A)P(B)$$
$$=P(A)[1-P(B)]=P(A)P(\overline{B}),$$

故 $A, \overline{B}$ 独立，其余证明同理.

(2) 将相互独立的事件组中的任何几个事件换成各自的对立事件，所得的新事件组仍相互独立.

②对独立事件组不含相同事件作运算，得到的新事件组仍独立，如 A, B, C, D 相互独立，则 AB 与 CD 相互独立，A 与 $BC-D$ 相互独立.

【注】直接使用，无须证明.

③若 $P(A)=0$ 或 $P(A)=1$，则 A 与任意事件 B 相互独立. ⟶不可能事件或必然事件和任意事件独立.

【注】**证明** 若 $P(A)=0$，由 $P(AB)\leqslant P(A)\leqslant P(A+B)$，有 $0\leqslant P(AB)\leqslant P(A)=0$，则 $P(AB)=0$，于是 $P(A)P(B)=P(AB)$；

若 $P(A)=1$，则 $P(\overline{A})=1-P(A)=0$，又由 $P(B\overline{A})\leqslant P(\overline{A})\leqslant P(\overline{A}+B)$，有 $0\leqslant P(B\overline{A})\leqslant P(\overline{A})=0$，知 $P(B\overline{A})=0$，又 $P(B\overline{A})=P(B)-P(AB)$，故 $P(B)=P(AB)$，即 $P(A)P(B)=P(AB)$.

3. 独立试验序列概型与 n 重伯努利概型

在同样条件下独立重复地进行一系列完全相同的试验，即每次试验的可能结果及其发生的概率都不变，每次试验是相互独立的，称这种重复试验序列的概率模型为**独立试验序列概型**. 如果每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$，且在每次试验中 A 发生的概率都相等 (即 $P(A)=p$)，将这种试验独立重复 n 次，则称这种试验的概率模型为 **n 重伯努利概型**. ⟶①每次试验只有 A 与 $\overline{A}$ 两个结果；
②每次试验 A 发生的概率 $p=P(A)$ 不变；
③试验独立重复进行 n 次.

在第 2 讲中会看到，在 n 重伯努利概型中，事件 A 发生 k 次（只管次数，不论位置）的概率为 $C_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n)$，且如果用 X 表示 n 重伯努利概型中事件 A 发生的次数，则 X 服从二项分布 $B(n,p)$.

【注】 要善于判定独立试验序列概型，只要题目中出现“将……重复进行 n 次”“对……重复观察 n 次”等字样（注意要求每次试验只有两个结果 A 与 $\overline{A}$），或可以转换为 n 次独立重复试验概型的问题，这时都要考虑应用二项分布计算与之有关的事件的概率 .

例 1.13 将一枚硬币独立地掷两次，引进事件：$A_1=\{$掷第一次出现正面$\}$，$A_2=\{$掷第二次出现正面$\}$，$A_3=\{$正反面各出现一次$\}$，$A_4=\{$正面出现两次$\}$，则事件（ ）.

(A) A_1，A_2，A_3 相互独立

(B) A_2，A_3，A_4 相互独立

(C) A_1，A_2，A_3 两两独立

(D) A_2，A_3，A_4 两两独立

解 应选 (C).

由题设，根据古典概型，有

$$P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=\frac{1}{2},$$

$$P(A_1A_2)=\frac{1}{4},\ P(A_1A_3)=\frac{1}{4},\ P(A_2A_3)=\frac{1}{4},$$

但

$$P(A_1A_2A_3)=0\neq P(A_1)P(A_2)P(A_3),$$

知 A_1，A_2，A_3 两两独立，但 A_1，A_2，A_3 不相互独立 .

又

$$A_3A_4=\varnothing,\ P(A_4)=\frac{1}{4},\ P(A_3)=\frac{1}{2},\ P(A_3A_4)=0\neq P(A_3)P(A_4),$$

知 A_2，A_3，A_4 不两两独立，也不相互独立，故选择 (C).

例 1.14 对同一目标接连进行 3 次独立重复射击，假设至少命中目标一次的概率为 $\frac{7}{8}$，则每次射击命中目标的概率 $p=$______.

解 应填 $\frac{1}{2}$.

记事件 $A_i=\{$第 i 次命中目标$\}(i=1,2,3)$. 由条件知，事件 A_1，A_2，A_3 相互独立，且其概率均为 p . 已知进行 3 次独立重复射击，则至少命中目标一次的概率为

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup A_3)&=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})\\&=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})P(\overline{A_3})\end{aligned}$$

$$=1-(1-p)^3=\frac{7}{8},$$

由此得$p=\frac{1}{2}$．

例 1.15 某人向同一目标独立重复射击，每次命中目标的概率为$p(0<p<1)$，则此人第 4 次射击恰好第二次命中目标的概率为（　　）．

(A) $3p(1-p)^2$　　(B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$　　(D) $6p^2(1-p)^2$

解 应选 (C).

依题设，4 次射击，最后一次命中，前 3 次有一次命中．若设前 3 次射击有X次命中，则$X\sim B(3,\ p)$，且有

$$P\{X=1\}=C_3^1p(1-p)^2\ .$$

于是第 4 次射击恰好第二次命中目标的概率为$3p^2(1-p)^2$，故选择 (C).

基础习题精练

习题

1.1 设A,B,C是任意三个事件，则下列选项中正确的是（　　）．

(A) 若$A\cup C=B\cup C$，则$A=B$　　(B) 若$A-C=B-C$，则$A=B$

(C) 若$AC=BC$，则$A=B$　　(D) 若$AB=\varnothing$且$\overline{A}\overline{B}=\varnothing$，则$\overline{A}=B$

1.2 设A和B是任意两个事件，则下列两个命题，（　　）．

①若$P(A)=P(B)$，则$A=B$；

②若$P(AB)=0$，则$AB=\varnothing$．

(A) ①正确，②不正确　　(B) ①不正确，②正确

(C) ①，②均正确　　(D) ①，②均不正确

1.3 考虑一元二次方程$x^2+Bx+C=0$，其中B,C分别是将一枚骰子接连抛两次先后出现的点数，则该方程有实根的概率为（　　）．

(A) $\frac{19}{36}$　　(B) $\frac{17}{36}$　　(C) $\frac{15}{36}$　　(D) $\frac{13}{36}$

1.4 甲口袋有 5 个白球、3 个黑球，乙口袋有 4 个白球、6 个黑球．从两个口袋中各任取一个球，则取到的两个球颜色相同的概率为（　　）．

(A) $\frac{19}{40}$　　(B) $\frac{21}{40}$　　(C) $\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{9}{40}$

1.5 设A, B, C为三个随机事件，且A与C相互独立，B与C相互独立，则$A\cup B$与C相互独立的充分必要条件是（　　）.

(A) A与B相互独立　　(B) A与B互不相容

(C) AB与C相互独立　　(D) AB与C互不相容

1.6 从$[0, 1]$中随机地取两个数，其积大于$\frac{1}{4}$，其和小于$\frac{5}{4}$的概率为______.

1.7 已知事件A, B满足$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})$，记$P(A)=p$，则$P(B)=$______.

1.8 已知$P(A)=0.7, P(A-B)=0.3$，则$P(\overline{AB})=$______.

1.9 已知$P(\overline{A})=0.3, P(B)=0.4, P(A\overline{B})=0.5$，则$P(B\mid A\cup\overline{B})=$______.

1.10 设A, B为两个随机事件，且$P(A)=0.4, P(A\cup B)=0.7$．若A, B互不相容，则$P(B)=$______；若A, B相互独立，则$P(B)=$______；若A发生B必发生，则$P(B)=$______.

1.11 三人独立地破译一个密码，他们能单独译出的概率分别为$\frac{1}{5}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$，则此密码被译出的概率为______.

1.12 甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为0.6和0.7．现已知目标被击中，则它是甲射中的概率为______.

1.13 用事件A, B, C的运算关系表示事件：① A, B, C都不发生；② A, B, C不都发生；③A, B, C不多于一个发生.

1.14 设X, Y为随机变量，事件A表示$\{X\geqslant c\}$，事件B表示$\{Y\geqslant c\}$．用A, B表示下列事件：

D: $\{\max\{X, Y\}\geqslant c\}$．$E$: $\{\min\{X, Y\}\geqslant c\}$．$F$: $\{\max\{X, Y\}< c\}$．G: $\{\min\{X, Y\}< c\}$．

1.15 判断下列命题是否成立，并说明理由.

(1) $A-(B-C)=(A-B)\cup C$；

(2) 若$AB=\varnothing$且$C\subset A$，则$BC=\varnothing$；

(3) $(A\cup B)-B=A$；

(4) $(A-B)\cup B=A$．

1.16 随机地向半圆$0<y<\sqrt{2ax-x^2}\,(a>0)$内投掷一点，点均匀落在半圆内任何一个区域，求该点和原点连线同x轴的夹角$\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$的概率.

1.17 口袋中有1个球，不知它的颜色是黑的还是白的，现再往口袋中放入1个白球，然后从口袋中任意取出1个，发现取出的是白球，求口袋中原来那个球是白球的概率.

1.18 已知装有同种零件的产品两箱，第一箱内装50件产品，其中一等品10件；第二箱内装30

件产品，其中一等品 18 件，现从两箱中任意挑选一箱．求：从中先后取出两件产品（取后不放回），先取出的产品是一等品的概率 p；已知先取出的产品是一等品，那么第二次取出的产品仍然是一等品的概率 q．

1.19 每箱产品有 10 件，其次品数从 0 到 2 是等可能的，开箱检验时，从中任取 1 件，如检验出是次品，则认为该箱产品不合格而拒收．假设由于检验有误，将 1 件正品误认为次品的概率为 2%，1 件次品被漏查而判为正品的概率为 5%，求该箱产品通过验收的概率．

解答

1.1 (D) **解** **方法一**（直接法） 对于选项 (D)，由事件运算的对偶律，有 $\overline{\overline{AB}}=A\cup B=\overline{\varnothing}=\Omega$．而由 $A\cup B=\Omega$ 且 $AB=\varnothing$，可见 A 和 B 互为对立事件，即 $\overline{A}=B$，因此 (D) 正确．

方法二（排除法） 前三个选项都不成立，只需分别举出反例．例如，由于 A,B,C 是任意三个事件，若取 $A\neq B$，而 $C=\Omega$ 是必然事件，则 $A\cup C=B\cup C$ 且 $A-C=B-C$，但 $A\neq B$，从而 (A) 和 (B) 不成立．取 $A\neq B$, $C=\varnothing$，则 $AC=BC$，但 $A\neq B$，因此 (C) 不成立．从而选 (D).

【注】本题的结果反映了事件的运算与数的运算的不同之处．

1.2 (D) **解** 考虑向区间 $[0,2]$ 上掷一随机点的试验．令 $A=\{$随机点落入区间 $[0,1]$ 上$\}$，$B=\{$随机点落入区间 $[1,2]$ 上$\}$．显然 $P(A)=P(B)$, $P(AB)=0$，然而 $A\neq B$, $AB\neq\varnothing$．故两个命题均不正确，选 (D).

1.3 (A) **解** 本题属于古典概型．由于很难套用现有概型模式或公式求解，一个最简单也是最直接的做法是数出总样本数和事件所含样本点数并计算比值，给出答案．事件所含样本点数可借助列表等手段列出各种可能的结果，然后数出事件所含样本点数．由于接连抛两次，每次都可能出现 6 个点数，因此其总样本数有 6^2 个．

方程有实根，即事件 $\{B^2-4C\geqslant 0\}$，列表如下．

B \ B^2-4C \ C	1	2	3	4	5	6
1	−	−	−	−	−	−
2	0	−	−	−	−	−
3	+	+	−	−	−	−
4	+	+	+	0	−	−
5	+	+	+	+	+	+
6	+	+	+	+	+	+

其中事件 $\{B^2-4C\geqslant 0\}$ 所含样本点数为 19，则 $P=\dfrac{19}{36}$，故本题应选择 (A).

1.4 (A) **解** 从两个口袋中各取一个球，共有 $C_8^1C_{10}^1$ 种等可能取法，而两个球颜色相同有两种情况：第一种是从甲口袋取出白球，从乙口袋也取出白球；第二种是从甲口袋取出黑球，从乙口袋也取出黑球，共有 $C_5^1C_4^1+C_3^1C_6^1$ 种取法 . 于是 $P\{$ 取到的两个球颜色相同 $\}=\dfrac{5\times4+3\times6}{8\times10}=\dfrac{19}{40}$.

1.5 (C) **解** $A\cup B$ 与 C 相互独立，即 $P[(A\cup B)\cap C]=P(A\cup B)P(C)$.

由
$$\begin{aligned}P[(A\cup B)\cap C]&=P(AC\cup BC)\\&=P(AC)+P(BC)-P(AC\cap BC)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(ABC),\end{aligned}$$

而
$$\begin{aligned}P(A\cup B)P(C)&=[P(A)+P(B)-P(AB)]P(C)\\&=P(A)P(C)+P(B)P(C)-P(AB)P(C),\end{aligned}$$

所以 $A\cup B$ 与 C 相互独立的充分必要条件为 $P(ABC)=P(AB)P(C)$，即 AB 与 C 相互独立 . 应选 (C).

1.6 $\dfrac{15}{32}-\dfrac{1}{2}\ln 2$ **解** 从 $[0,1]$ 中随机地取两个数 x 与 y，可以看成从图 1-3 所示正方形区域中任取一点，满足几何概型的两个特点 . 记 $\Omega=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$,$A=\left\{(x,y)\middle|x+y<\dfrac{5}{4},xy>\dfrac{1}{4}\right\}$，对应图 1-3 中阴影部分 .

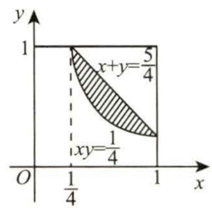


图 1-3

$$P(A)=\frac{S_A}{S_\Omega}=\frac{\int_{\frac14}^{1}\left(\frac54-x-\frac{1}{4x}\right)\mathrm{d}x}{1}=\left(\frac54x-\frac12x^2-\frac14\ln x\right)\Bigg|_{\frac14}^{1}$$
$$=\frac{15}{32}-\frac12\ln 2\ .$$

1.7 $1-p$ **解** 因为
$$P(AB)=P(\overline{A}\cap\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(AB),$$
由此得
$$1-P(A)-P(B)=0,$$
所以
$$P(B)=1-P(A)=1-p\ .$$

1.8 0.6 **解** 因为 $0.3=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.7-P(AB)$，由此得 $P(AB)=0.7-0.3=0.4$，所以
$$P(\overline{AB})=1-P(AB)=0.6\ .$$

1.9 0.25 **解** 由条件概率的定义知 $P(B|A\cup\overline{B})=\dfrac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}$，其中
$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})=0.7+0.6-0.5=0.8\ .$$

又由 $P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$，可得

$$P(AB)=P(A)-P(A\overline{B})=0.7-0.5=0.2\ .$$

代回原式，可得 $$P(B\mid A\cup\overline{B})=\frac{P(AB)}{P(A\cup\overline{B})}=\frac{0.2}{0.8}=0.25\ .$$

1.10 0.3；0.5；0.7 **解** 由加法公式，有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$，于是：

若 A,B 互不相容，则 $P(AB)=0$，$P(B)=P(A\cup B)-P(A)=0.3$；

若 A,B 相互独立，则 $P(AB)=P(A)P(B)$，$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$，解得

$$P(B)=\frac{P(A\cup B)-P(A)}{1-P(A)}=0.5\ ;$$

若 A 发生 B 必发生，则 $P(B)=P(A\cup B)=0.7$.

1.11 $\frac{3}{5}$ **解** 记事件 A_i 为"第 i 个人译出密码"，$i=1,2,3$，事件 B 为"密码被译出".则

$$P(B)=P(A_1\cup A_2\cup A_3)=1-P(\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3})=1-\frac{4}{5}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{3}{5}\ .$$

【注】互不相容可简化并事件的概率计算，相互独立可简化交事件的概率计算.这里为了利用相互独立性，把事件的并在对偶律下转化为事件的交，这一方法会经常用到.

1.12 0.682 **解** 记事件 A 为"目标被击中"，事件 B_1 为"甲射中目标"，事件 B_2 为"乙射中目标"，因为 $A=B_1\cup B_2$，所以

$$\begin{aligned}P(A)&=P(B_1\cup B_2)=P(B_1)+P(B_2)-P(B_1B_2)\\&=0.6+0.7-0.6\times0.7=0.88\ .\end{aligned}$$

考虑到 $B_1\subset A$，故有 $P(B_1\mid A)=\dfrac{P(AB_1)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)}{P(A)}=\dfrac{0.6}{0.88}\approx0.682$.

1.13 **解** ①$\{A,B,C$ 都不发生$\}=\{A$ 不发生，且 B 不发生，且 C 不发生$\}=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}=\overline{A\cup B\cup C}$.

②$\{A,B,C$ 不都发生$\}=\{A,B,C$ 至少有一个不发生$\}=\{A,B,C$ 都发生$\}$ 的逆事件

$$=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}\ .$$

③$\{A,B,C$ 不多于一个发生$\}=\{A,B,C$ 至多有一个发生$\}=\{A,B,C$ 至少有两个不发生$\}$

$$=\overline{A}\,\overline{B}\cup\overline{A}\,\overline{C}\cup\overline{B}\,\overline{C}=A\overline{B}\,\overline{C}\cup\overline{A}B\overline{C}\cup\overline{A}\,\overline{B}C\cup\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\ .$$

1.14 **解** $D=A\cup B$（即 X,Y 中至少有一个 $\geqslant c$）.

$E=A\cap B$（即 X,Y 都要 $\geqslant c$）.

$F=\overline{D}=\overline{A}\cap\overline{B}$（即 X,Y 都要 $<c$）.

$G=\overline{E}=\overline{A}\cup\overline{B}$（即 X,Y 中至少有一个 $<c$）.

1.15 解 (1)不成立. $A-(B-C)=A-B\overline{C}=A\overline{B\overline{C}}=A(\overline{B}\cup C)=A\overline{B}\cup AC=(A-B)\cup AC\neq(A-B)\cup C$;
也可由图 1-4 快速判断.

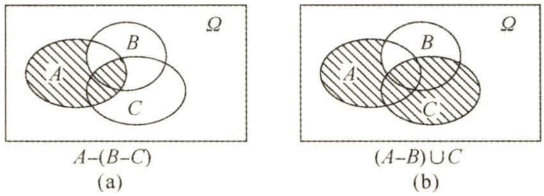


图 1-4

(2) 成立. 因 $C\subset A$, 有 $BC\subset AB=\varnothing$, 故 $BC=\varnothing$.

(3) 不成立. 因 $(A\cup B)-B=(A\cup B)\overline{B}=A\overline{B}\cup B\overline{B}=A\overline{B}=A-B\neq A$.

(4) 不成立. 因 $(A-B)\cup B=A\overline{B}\cup B=(A\cup B)(\overline{B}\cup B)=A\cup B\neq A$.

【注】考生可再做练习，证明下列事件的运算公式：

(1) $A=AB\cup A\overline{B}$;

(2) $A\cup B=A\cup\overline{A}B$.

证明 (1) $AB\cup A\overline{B}=A(B\cup\overline{B})=A\Omega=A$.

(2) $A\cup\overline{A}B=(A\cup\overline{A})(A\cup B)=\Omega(A\cup B)=A\cup B$.

1.16 解 由题设，半圆与直线 $y=x$ 的交点坐标为 $(a,\ a)$，如图 1-5 所示，阴影区域 D 内任意点与原点连线同 x 轴的夹角 $\theta\leqslant\frac{\pi}{4}$，因此所求概率为

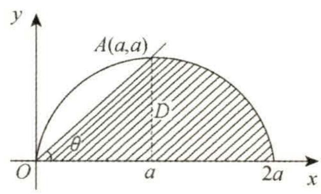


图 1-5

$$P\{(x,\ y)\in D\}=\left(\frac{\pi a^2}{4}+\frac{a^2}{2}\right)\Big/\frac{\pi a^2}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}.$$

1.17 解 记事件 A 为“取出的是白球”，事件 B 为“原来那个球是白球”. 容易看出

$$P(A\mid B)=1,\ P(A\mid\overline{B})=\frac{1}{2}.$$

另外，由于不知道袋中原来那个球的颜色，故 $P(B)=P(\overline{B})=\frac{1}{2}$，由贝叶斯公式得

$$P(B\mid A)=\frac{P(B)P(A\mid B)}{P(B)P(A\mid B)+P(\overline{B})P(A\mid\overline{B})}=\frac{\frac{1}{2}\times 1}{\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}.$$

1.18 解 记 $A=\{$ 第一次取出的产品是一等品 $\}$, $B=\{$ 第二次取出的产品是一等品 $\}$，则

$$p=P(A),\ q=P(B\mid A)=\frac{P(AB)}{P(A)}.$$

要计算p，q，仅需求出$P(A)$，$P(AB)$．而事件A，AB都是试验的结果，它与其前提条件产品取自哪一箱有关．因此我们自然想到：写出前提条件，应用全概率公式计算$P(A)$，$P(AB)$．

记$C_i=\{$产品取自第i箱$\}(i=1,2)$，则

$$C_1C_2=\varnothing,\ C_1\cup C_2=\Omega,\ A=AC_1+AC_2,\ AB=ABC_1+ABC_2,$$

故

$$\begin{aligned}P(A)&=P(AC_1)+P(AC_2)=P(C_1)P(A|C_1)+P(C_2)P(A|C_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}=\frac{2}{5},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(AB)&=P(ABC_1)+P(ABC_2)=P(C_1)P(AB|C_1)+P(C_2)P(AB|C_2)\\&=\frac{1}{2}\times\frac{10}{50}\times\frac{9}{49}+\frac{1}{2}\times\frac{18}{30}\times\frac{17}{29}=\frac{276}{1\,421},\end{aligned}$$

$$p=P(A)=\frac{2}{5},\ q=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{276}{1\,421}\times\frac{5}{2}=\frac{690}{1\,421}.$$

1.19 解 题中有两个完备事件组：一是箱中次品的件数为0，1，2；二是通过验收是在抽取正品和抽取次品这两种情况下发生．设$A_i(i=0,1,2)$为“箱中有i个次品”，B为“通过验收”，B_1为“抽取正品”，于是有

$$P(A_i)=\frac{1}{3}(i=0,1,2),$$

$$P(B_1|A_i)=\frac{10-i}{10},$$

从而由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B_1)&=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B_1|A_i)\\&=\frac{1}{3}\sum_{i=0}^{2}\frac{10-i}{10}=0.9,\end{aligned}$$

$$P(\overline{B}_1)=0.1,$$

因此由全概率公式得

$$\begin{aligned}P(B)&=P(B_1)P(B|B_1)+P(\overline{B}_1)P(B|\overline{B}_1)\\&=0.9\times0.98+0.1\times0.05=0.887.\end{aligned}$$

【注】本题中，通过验收是在完备事件组B_1，$\overline{B}_1$背景下发生的，抽取正品则是在完备事件组A_0，A_1，A_2背景下实现的，因此，具备全概率概型的特征．

第2讲 一维随机变量及其分布

基础知识结构

- 一维随机变量
  - 概念
  - 分布函数
    - 概念
    - 性质
    - 应用——求概率
- 一维离散型随机变量
  - 分布律
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 五大分布
    - 0—1分布
    - 二项分布
    - 泊松分布
    - 几何分布
    - 超几何分布
- 一维连续型随机变量
  - 概率密度
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 三大分布
    - 均匀分布
    - 指数分布
    - 正态分布
- 一维随机变量函数的分布
  - 离散型→离散型
  - 连续型→连续型（或混合型）

基础内容精讲

一、随机变量及其分布函数的概念、性质及应用

1. 随机变量的概念

随机变量就是“其值会随机而定”的变量 . 设随机试验 E 的样本空间为 $\Omega=\{\omega\}$，如果对每一个 $\omega\in\Omega$，都有唯一的实数 $X(\omega)$ 与之对应，并且对任意实数 x，$\{\omega|X(\omega)\leqslant x,\ \omega\in\Omega\}$ 是随机事件，则称定义在 Ω 上的实值单值函数 $X(\omega)$ 为**随机变量**，简记为随机变量 X . 一般用大写字母 X，Y，Z，… 或希腊字母 ξ，η，ζ，… 来表示随机变量 .

【注】(1) 随机事件是从静态的观点来研究随机现象，而随机变量则是一种动态的观点，如高等数学中常量与变量的区别 .

$X=X(\omega)$　　$y=y(x)$

(2) 随机变量的实质是“实值单值函数”，这个定义不同于高等数学中函数的定义 (其“定义域”一般是实数集)，它的“定义域”不一定是实数集，这点需要考生注意 .

2. 分布函数的概念及性质

当 x 从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 取遍所有实数时，$\{X\leqslant x\}$ 就相应从不可能事件 $\varnothing$ 取到必然事件 Ω，即分布函数完整地描述了随机变量的概率规律.

(1) 概念 .

设 X 是随机变量，x 是任意实数，称函数 $F(x)=P\{X\leqslant x\}\ (x\in\mathbf{R})$ 为随机变量 X 的分布函数，或称 X 服从 $F(x)$ 分布，记为 $X\sim F(x)$.

(2) 性质 . → 充要条件

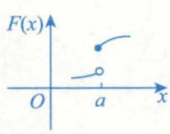
① $F(x)$ 是 x 的单调不减函数，即对任意实数 $x_1<x_2$，有 $F(x_1)\leqslant F(x_2)$；

② $F(x)$ 是 x 的右连续函数，即对任意 $x_0\in\mathbf{R}$，有 $\lim\limits_{x\to x_0^+}F(x)=F(x_0+0)=F(x_0)$；

③ $F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=1$. → 分布函数是事件的概率，由此知 $0\leqslant F(x)\leqslant 1$，即 $F(x)$ 是有界函数.

【注】满足以上三条性质的函数 $F(x)$ 必是某个随机变量 X 的分布函数，所以，这三条性质也是判断函数 $F(x)$ 是否为某一随机变量 X 的分布函数的充要条件 .

3. 分布函数的应用——求概率



$P\{X\leqslant a\}=F(a)$；

$P\{X<a\}=F(a-0)$；

$P\{X=a\}=F(a)-F(a-0)$；

$P\{a<X<b\}=F(b-0)-F(a)$；

$P\{a\leqslant X<b\}=F(b-0)-F(a-0)$；

$P\{a<X\leqslant b\}=F(b)-F(a)$；

$P\{a\leqslant X\leqslant b\}=F(b)-F(a-0)$.

例 2.1 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}a+b\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0.\end{cases}$$

求常数 a, b 及概率 $P\{|X|<2\}$.

解 $F(x)$ 中含有 2 个未知参数，依据分布函数的性质建立两个独立方程解之 .

由分布函数的性质，有

$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=\lim_{x\to+\infty}(a+b\mathrm{e}^{-x})=1,$$

得 $a=1$. 又 $F(x)$ 在 $x=0$ 处右连续，有

$$\lim_{x\to0^+}F(x)=\lim_{x\to0^+}(a+b\mathrm{e}^{-x})=a+b=0,$$

得 $b=-1$. 所以

$$F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$$

从而有

$$P\{|X|<2\}=P\{-2<X<2\}=F(2-0)-F(-2)=1-\mathrm{e}^{-2}-0=1-\mathrm{e}^{-2}\ .$$

二、常见的两类随机变量——离散型随机变量和连续型随机变量

1. 离散型随机变量及其概率分布

如果随机变量 X 只可能取有限个或可列无限个值 x_1, x_2, $\cdots$，则称 X 为**离散型随机变量**，称

$$P\{X=x_i\}=p_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots$$

为 X 的**分布列**、**分布律**或**概率分布**，记为 $X\sim p_i$，概率分布常常用表格形式或矩阵形式表示，即

X	x_1	x_2	$\cdots$
P	p_1	p_2	$\cdots$

或 $X\sim\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots\\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}$.

归一性

数列 $\{p_i\}(i=1,\ 2,\ \cdots)$ 是离散型随机变量的概率分布的充要条件：$p_i\geqslant0(i=1,\ 2,\ \cdots)$，且 $\sum\limits_i p_i=1$.

设离散型随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i$, $i=1,\ 2,\ \cdots$，则 X 的分布函数

一点概率 $$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{x_i\leqslant x}P\{X=x_i\},$$

$$P\{X=x_i\}=P\{X\leqslant x_i\}-P\{X<x_i\}=F(x_i)-F(x_i-0),$$

并且对实数轴上的任一集合 B，有

区间概率

$$P\{X\in B\}=\sum_{x_i\in B}P\{X=x_i\},$$

特别地，
$$P\{a<X\leqslant b\}=P\{X\leqslant b\}-P\{X\leqslant a\}=F(b)-F(a).$$

2. 连续型随机变量及其概率密度

如果随机变量 X 的分布函数可以表示为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t\,(x\in\mathbf{R}),$$

其中 $f(x)$ 是非负可积函数，则称 X 为**连续型随机变量**，称 $f(x)$ 为 X 的**概率密度函数**，简称**概率密度**，记为 $X\sim f(x)$.

归一性

$f(x)$ 为某一随机变量 X 的概率密度的充分必要条件：$f(x)\geqslant 0$，且 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=1$（由此可知，在保证非负的条件下，改变 $f(x)$ 有限个点的值，$f(x)$ 仍然是概率密度）.

一点概率

设 X 为连续型随机变量，$X\sim f(x)$，则对任意实数 c，有 $P\{X=c\}=0$；对实数轴上任一集合 B，有

区间概率

$$P\{X\in B\}=\int_{B}f(x)\mathrm{d}x,$$

特别地，

$$P\{a<X<b\}=P\{a\leqslant X<b\}=P\{a<X\leqslant b\}=P\{a\leqslant X\leqslant b\}=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ .$$

【注】(1)“概率密度”这个名词的由来可解释如下：取定一个点 x，则按分布函数的定义，事件 $\{x<X\leqslant x+h\}$（$h>0$，为常数）的概率应为 $F(x+h)-F(x)$. 所以，比值 $[F(x+h)-F(x)]/h$ 可以解释为在点 x 附近长为 h 的区间 $(x,x+h]$ 内，单位长所占的概率 . 令 $h\to 0$，则这个比值的极限，即 $F'(x)=f(x)$，也就是在点 x 处（无穷小区间内）单位长的概率 . 或者说，它反映了概率在点 x 处的“密集程度”. 设想一条极细的无穷长的金属杆，总质量为 1，概率密度相当于杆上各点的质量密度 .

(2) $P\{a<X<b\}=\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x$ 意味着 X 落入某一区间的概率等于该区间上概率密度曲线之下的曲边梯形的面积 . 应用概率的这种几何意义，常常有助于问题的分析与求解 .

(3) 设 $X\sim f(x)$，则 X 的分布函数 $F(x)$ 是 x 的连续函数 . 在 $f(x)$ 的连续点 x_0 处有 $F'(x_0)=f(x_0)$. 如果 $F(x)$ 是连续函数，除有限个点外，$F'(x)$ 存在且连续，则 X 为连续型随机变量，且 $f(x)=F'(x)$（在 $F'(x)$ 不存在的地方可以令 $f(x)=0$ 或取其他值）.

例 2.2　设 $F_1(x)$, $F_2(x)$ 是随机变量的分布函数，$f_1(x)$, $f_2(x)$ 是相应的概率密度，则（　　）.

(A) $F_1(x)+F_2(x)$ 是分布函数　　(B) $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是分布函数

(C) $f_1(x)+f_2(x)$ 是概率密度　　(D) $f_1(x)\cdot f_2(x)$ 是概率密度

解　应选 (B).

根据连续型随机变量分布函数和概率密度的性质，有

$$F_1(+\infty)+F_2(+\infty)=2,\ \int_{-\infty}^{+\infty}[f_1(x)+f_2(x)]\mathrm{d}x=2,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x\neq\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x)\mathrm{d}x=1,$$

应排除选项 (A)，(C)，(D)，故选择 (B). 事实上，由于 $F_1(x)\cdot F_2(x)$ 是单调不减的右连续函数，且

$$F_1(-\infty)\cdot F_2(-\infty)=0,\ F_1(+\infty)\cdot F_2(+\infty)=1,$$

可直接判断选项 (B) 正确 .

例 2.3　已知随机变量 X 的概率分布为

X	1	2	3
$P\{X=k\}$	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	$(1-\theta)^2$

且 $P\{X\geqslant 2\}=\dfrac{3}{4}$，求未知参数 θ 及 X 的分布函数 $F(x)$.

解　由 $P\{X\geqslant 2\}=P\{X=2\}+P\{X=3\}=2\theta(1-\theta)+(1-\theta)^2=1-\theta^2=\dfrac{3}{4}$，解得 $\theta=\pm\dfrac{1}{2}$.

又 $P\{X=2\}=2\theta(1-\theta)\geqslant 0$ ，故取 $\theta=\dfrac{1}{2}$，从而得 X 的概率分布为

X	1	2	3
$P\{X=k\}$	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

X 的分布函数

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\sum_{i\leqslant x}P\{X=i\}=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1\leqslant x<2,\\ \dfrac{3}{4}, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3.\end{cases}$$

例 2.4　已知 X 的分布函数为 $F(x)$，概率密度为 $f(x)$. 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)$ 连续，且 $f(x)=F(x)$，若 $F(0)=1$ ，则 $f(x)=$______.

解 应填$\begin{cases} e^x, & x \leqslant 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$

由于$F(x)$是单调不减的函数，且$F(0)=1$，故对任意的$x>0$，均有$F(x)=1$．又当$x\leqslant 0$时，$f(x)$连续，故$f(x)=F'(x)$，已知$f(x)=F(x)$，由微分方程$F'(x)=F(x)$，及$F(0)=1$，解得$F(x)=e^x(x\leqslant 0)$，从而得

$$F(x)=\begin{cases} e^x, & x<0, \\ 1, & x\geqslant 0, \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} e^x, & x\leqslant 0, \\ 0, & x>0. \end{cases}$$

【注】 当分布函数是不连续的分段函数时，为保证其右连续性，自变量x的分段小区间除第一个区间之外，其余都应是左闭右开的，即等号跟着大于号．

例 2.5 已知随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right), & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求X的分布函数$F(x)$．

解 当$x<1$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} 0\mathrm{d}t=0;$$

当$1\leqslant x<2$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{x} 2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\left(t+\frac{1}{t}\right)\Big|_{1}^{x}$$

$$=2\left(x+\frac{1}{x}\right)-4=2\left(x+\frac{1}{x}-2\right);$$

当$x\geqslant 2$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{2} 2\left(1-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t=2\left(t+\frac{1}{t}\right)\Big|_{1}^{2}=2\times\frac{1}{2}=1.$$

故

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x<1, \\ 2\left(x+\dfrac{1}{x}-2\right), & 1\leqslant x<2, \\ 1, & x\geqslant 2. \end{cases}$$

三、常见的随机变量分布类型

1. 离散型

(1)0—1 分布 $B(1,\ p)(\mathrm{Ber}-E_1)$.

伯努利计数变量——发生计1，不发生计0

如果 X 的概率分布为 $X\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$，即 $P\{X=1\}=p$，$P\{X=0\}=1-p$，则称 X 服从参数为 p 的 **0—1 分布**，记为 $X\sim B(1,\ p)(0<p<1)$.

(2) 二项分布 $B(n,\ p)(\mathrm{Ber}-E_n)$.

n 重伯努利试验中事件 A 发生的次数，其中 $p=P(A)$

如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}(k=0,1,\cdots,n;\ 0<p<1)$，则称 X 服从参数为 $(n,\ p)$ 的**二项分布**，记为 $X\sim B(n,\ p)$.

(3) 泊松分布 $P(\lambda)$.

如果 X 的概率分布为

单位时间源源不断的质点来流的个数，也常用于描述稀有事件发生的次数

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}(k=0,1,\cdots;\ \lambda>0),$$

则称 X 服从参数为 λ 的**泊松分布**，记为 $X\sim P(\lambda)$.

> **【注】泊松定理**　若 $X\sim B(n,\ p)$，当 n 很大，p 很小，$\lambda=np$ 适中时，二项分布可用泊松分布近似表示，即
>
> $$\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda}.$$
>
> 一般地，当 $n\geqslant 20$，$p\leqslant 0.05$ 时，用泊松近似公式逼近二项分布效果比较好，特别当 $n\geqslant 100$，$np\leqslant 10$ 时，逼近效果更佳 .
>
> 此处《全国硕士研究生招生考试数学考试大纲》的要求是“会用泊松分布近似表示二项分布”，考生应予以重视 .

(4) 几何分布 $G(p)(\mathrm{Ber}-E_\infty)$.

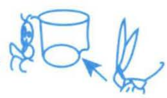
n 重伯努利试验中，事件 A 首次出现即停止时的试验次数，其中 $p=P(A)$

如果 X 的概率分布为

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p(k=1,2,\cdots;\ 0<p<1),$$

则称 X 服从参数为 p 的**几何分布**，记为 $X\sim G(p)$.

离散型等待分布：守株待兔



(5) 超几何分布 $H(n,\ N,\ M)$.

见注

如果 X 的概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}(\max\{0,\ n-N+M\}\leqslant k\leqslant\min\{M,\ n\};\ M,\ N,\ n$ 为正整数且

$M \leqslant N, n \leqslant N, k$为整数)，则称$X$服从参数为$(n, N, M)$的**超几何分布**，记为$X \sim H(n, N, M)$.

【注】设由N个产品组成的总体，其中含有M个不合格品.若从中随机不放回地抽取n个，则其中含有不合格品的个数X是一个离散型随机变量.假如$n \leqslant M$，则X可能取$0, 1, \cdots, n$；若$n > M$，则X可能取$0, 1, \cdots, M$.由古典概型概率公式容易算得

$$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, \tag{*}$$

其中$\max\{0, n-N+M\} \leqslant k \leqslant \min\{M, n\}$；$M, N, n$为正整数且$M \leqslant N, n \leqslant N, k$为整数.

这个分布就是**超几何分布**，它含有三个参数N, M和n，记为$H(n, N, M)$.

当$n \ll N$(即抽取个数n远远小于产品总数N)时，每次抽取后，总体中的不合格品率$p = \dfrac{M}{N}$改变甚微，这时不放回抽样可近似看作放回抽样，超几何分布可用二项分布近似.

2. 连续型

(1) 均匀分布$U(a, b)$.

如果随机变量X的概率密度和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a < x < b, \\ 0, & 其他, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x < b, \\ 1, & x \geqslant b, \end{cases}$$

则称X在区间(a, b)上服从**均匀分布**，记为$X \sim U(a, b)$.(见图2-1，图2-2)

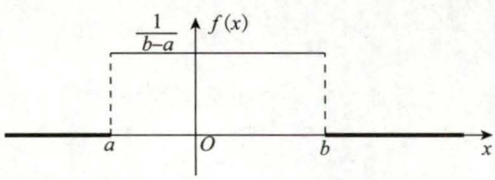


图 2-1

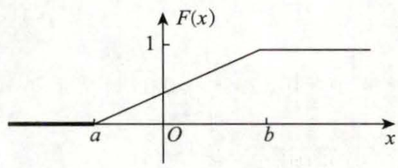


图 2-2

【注】区间(a, b)可以是闭区间$[a, b]$，记为$X \sim U[a, b]$；几何概型是均匀分布的实际背景，几何概型可以用均匀分布函数计算概率.

(2) 指数分布$E(\lambda)$. 连续型等待分布

如果X的概率密度和分布函数分别为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0, \\ 0, & 其他, \end{cases} F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0 \end{cases} (\lambda > 0),$$

λ叫失效频率，后面会知道$EX = \dfrac{1}{\lambda}$

则称X服从参数为λ的**指数分布**，记为$X \sim E(\lambda)$.(见图2-3，图2-4)

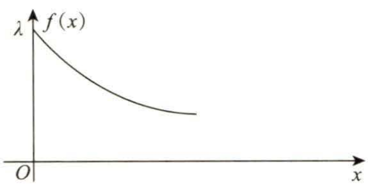


图 2-3

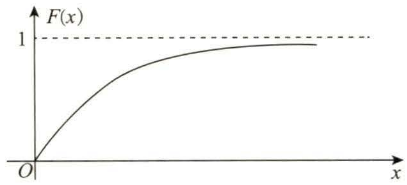


图 2-4

【注】当 $t>0$, $s>0$ 时，$P\{X\geqslant t+s|X\geqslant t\}=P\{X\geqslant s\}$ 称为指数分布的无记忆性 (Memoryless Property).

这是由于λ是常数，失效频率不变，也即研究对象（如元件、产品等）被视为理想状态，无任何损耗.

(3) 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.

如果X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ (-\infty<x<+\infty),$$

其中 $-\infty<\mu<+\infty,\ \sigma>0$，则称 X 服从参数为 (μ,σ^2) 的**正态分布**或称 X 为**正态变量**，记为 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$. 此时$f(x)$的图形关于直线$x=\mu$对称，即$f(\mu-x)=f(\mu+x)$，并在$x=\mu$处有唯一最大值$f(\mu)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. 如图 2-5 所示 .

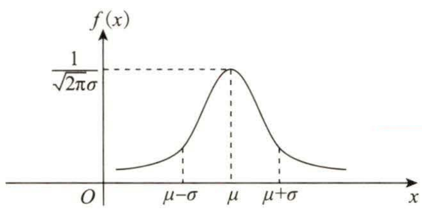


图 2-5

称 $\mu=0,\ \sigma=1$ 时的正态分布 $N(0,1)$ 为**标准正态分布**，通常记标准正态分布的概率密度为 $\varphi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}$，分布函数为 $\varPhi(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$. 显然 $\varphi(x)$ 为偶函数，则

$$\varPhi(0)=\frac{1}{2},\ \varPhi(-x)=1-\varPhi(x)\ .$$

如图 2-6 所示 .

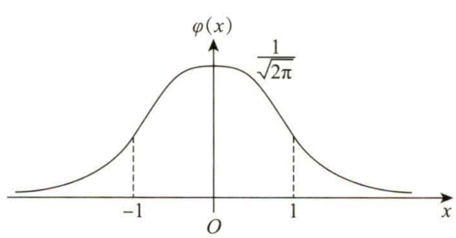


图 2-6

若 $X \sim N(0,1)$, $P\{X > \mu_\alpha\} = \alpha$，则称 μ_α 为标准正态分布的**上侧 α 分位数**（**上 α 分位点**）.

如果 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则

$$F(x) = P\{X \leqslant x\} = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$F(\mu - x) + F(\mu + x) = 1,$$

$$P\{a < X < b\} = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right),$$

$$aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)(a \neq 0).$$

例 2.6 通过某交叉路口的汽车流可以看作服从泊松分布．已知在 1 分钟内有汽车通过的概率为 0.7，则 1 分钟内最多有 1 辆汽车通过的概率为（　　）.

(A) $0.7(1-\ln 0.7)$　　(B) $0.3(1-\ln 0.7)$　　(C) $0.3(1-\ln 0.3)$　　(D) $0.7(1-\ln 0.3)$

解 应选 (C).

1 分钟内通过路口的汽车数量 X 服从参数为 λ 的泊松分布．由已知，

$$P\{X \geqslant 1\} = 1 - \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} = 0.7,$$

得 $\lambda = -\ln 0.3$，于是 $P\{X \leqslant 1\} = \frac{\lambda^0}{0!}\mathrm{e}^{-\lambda} + \frac{\lambda^1}{1!}\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{\ln 0.3}(1-\ln 0.3) = 0.3(1-\ln 0.3)$，故选择 (C).

例 2.7 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$ 对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数．求 Y 的概率分布．

解 记 p 为"观测值大于 3"的概率，则 $p = P\{X > 3\} = \int_3^{+\infty} 2^{-x}\ln 2\mathrm{d}x = \frac{1}{8}$.

依题意，Y 为离散型随机变量，而且取值为 $2, 3, \cdots$，则 Y 的概率分布为

$$P\{Y = k\} = \mathrm{C}_{k-1}^1 p(1-p)^{k-2} \cdot p = \mathrm{C}_{k-1}^1 p^2(1-p)^{k-2} = (k-1)\left(\frac{1}{8}\right)^2\left(\frac{7}{8}\right)^{k-2}, k = 2, 3, \cdots.$$

例 2.8 已知 $X \sim U(a,b)(a>0)$，且 $P\{0<X<3\} = \frac{1}{4}$, $P\{X>4\} = \frac{1}{2}$，求 X 的概率密度及 $P\{1<X<5\}$.

解 如图 2-7 所示，$X \sim U(a,b)$.

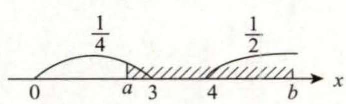


图 2-7

由 $P\{X>4\} = \frac{1}{2}$，且 $P\left\{X > \frac{a+b}{2}\right\} = \frac{1}{2}$，得 $\frac{a+b}{2} = 4$，即 $a+b=8$.

由于 $P\{3<X<4\} = 1 - P\{X \geqslant 4\} - P\{X \leqslant 3\} = 1 - P\{X>4\} - P\{0<X<3\} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$，又 $P\{3<X<4\} = \frac{4-3}{b-a}$，故 $\frac{4-3}{b-a} = \frac{1}{4}$，得 $b-a=4$.

联立得$\begin{cases}a+b=8,\\b-a=4,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\b=6.\end{cases}$

所以X的概率密度为
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}, & 2<x<6,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

于是
$$P\{1<X<5\}=P\{2<X<5\}=\frac{5-2}{6-2}=\frac{3}{4}.$$

例 2.9 某元件的工作寿命X（小时）服从参数为$\lambda(\lambda>0)$的指数分布．

(1) 求该元件正常工作t小时的概率；

(2) 已知该元件已正常工作 10 小时，求在此基础上再工作 10 小时的概率($\lambda=0.01$)．

解 由题意$X\sim F(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda x} & x\geqslant 0,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$

(1) $P\{X>t\}=1-P\{X\leqslant t\}=1-F(t)=1-(1-\mathrm{e}^{-\lambda t})=\mathrm{e}^{-\lambda t}$．

(2)
$$P\{X>20\mid X>10\}=\frac{P\{X>20,\ X>10\}}{P\{X>10\}}$$
$$=\frac{P\{X>20\}}{P\{X>10\}}=\frac{\mathrm{e}^{-0.01\times 20}}{\mathrm{e}^{-0.01\times 10}}=\mathrm{e}^{-0.1}.$$

【注】本题第 (2) 问的结果，$P\{X>20\mid X>10\}=P\{X>10\}$，即元件正常工作 10 小时的概率与在这之前的工作状态无关，说明指数分布具有无记忆性．

例 2.10 设$X\sim N(2,\sigma^2)$，且$P\{2<X<4\}=0.3$，则$P\{X<0\}=$______.

解 应填 0.2.

已知$X\sim N(2,\sigma^2)$，故
$$P\{2<X<4\}=\Phi\left(\frac{4-2}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{2-2}{\sigma}\right)=\Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)-0.5=0.3,\ \Phi\left(\frac{2}{\sigma}\right)=0.8,$$

所以$P\{X<0\}=\Phi\left(\dfrac{0-2}{\sigma}\right)=1-\Phi\left(\dfrac{2}{\sigma}\right)=0.2$．

【注】结合图 2-8，本题应用面积求解更为直观、简便．

已知$P\{2<X<4\}=0.3$，故
$$P\{X<0\}=0.5-0.3=0.2.$$

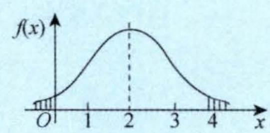


图 2-8

例 2.11 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，则随着σ的增大，$P\{|X-\mu|<1\}$（　　）．

(A) 单调增加　　(B) 单调减少　　(C) 保持不变　　(D) 先增后减

解 应选 (B).

讨论 $P\{|X-\mu|<1\}$ 的单调性应在将其标准化之后进行．由 $P\{|X-\mu|<1\}=P\left\{\left|\dfrac{X-\mu}{\sigma}\right|<\dfrac{1}{\sigma}\right\}=$ $2\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)-1$，又 $\Phi(u)$ 为单调增加函数，$u=\dfrac{1}{\sigma}$ 为单调减少函数，则随着 σ 的增大，$\Phi\left(\dfrac{1}{\sigma}\right)$ 单调减少，从而知，随着 σ 的增大，$P\{|X-\mu|<1\}$ 单调减少，故选择 (B).

例 2.12 设随机变量 X 服从正态分布 $N(0,1)$，对给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，数 u_α 满足 $P\{X>u_\alpha\}=\alpha$，若 $P\{|X|<x\}=\alpha$，则 x 等于（　　）.

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　　(B) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　　(C) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　　(D) $u_{1-\alpha}$

解 应选 (C).

如图 2-9 所示，从几何直观看，条件中给出的 u_α 即为上侧 α 分位数．类比可得 $P\left\{|X|<u_{\frac{1-\alpha}{2}}\right\}=\alpha$，故选择 (C).

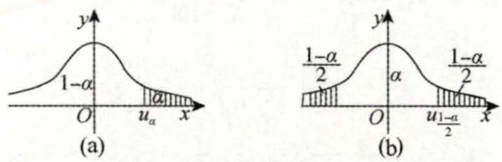


图 2-9

例 2.13 设随机变量 X 满足不等式 $1\leqslant X\leqslant 4$，且 $P\{X=1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{X=4\}=\dfrac{1}{3}$，当 X 在区间 $(1,4)$ 时，X 服从均匀分布．求 X 的分布函数．

解 当 $x<1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $x=1$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=\dfrac{1}{4}$；

当 $1<x<4$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant 1\}+P\{1<X\leqslant x\},$$

其中

$$\begin{aligned}P\{1<X\leqslant x\}&=P\{1<X\leqslant x,\Omega\}=P\{1<X\leqslant x,1<X<4\}+P\{1<X\leqslant x,\overline{1<X<4}\}\\&=P\{1<X\leqslant x\mid 1<X<4\}P\{1<X<4\}+P\{1<X\leqslant x\mid\overline{1<X<4}\}P\{\overline{1<X<4}\}\\&=\frac{x-1}{4-1}\cdot\frac{5}{12}+0=\frac{5(x-1)}{36},\end{aligned}$$

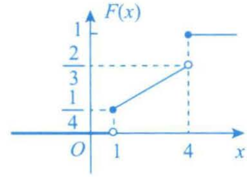
故

$$F(x)=\frac{1}{4}+\frac{5(x-1)}{36}=\frac{1}{9}+\frac{5}{36}x;$$

当 $x\geqslant 4$ 时，$F(x)=1$．

从而得 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{1}{9}+\dfrac{5}{36}x, & 1\leqslant x<4,\\ 1, & x\geqslant 4.\end{cases}$$



【注】(1) 将 $\{1<X\leqslant x\}$ 写成 $\{1<X\leqslant x, \Omega\}$，然后作全集分解，是解决本题的关键．

(2) 由图可知，X 既不是离散型随机变量，也不是连续型随机变量，称为混合型随机变量．

(3) 还可知，当 $1<x<4$ 时，记 $A=\{1<X<4\}$，则

$$f(x)=f(x\mid A)P(A)+f(x\mid \overline{A})P(\overline{A})=\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{12}+0\cdot\frac{7}{12}=\frac{5}{36}.$$

或在 $1<x<4$ 时，$f(x)=F'(x)=\dfrac{5}{36}$．

四、一维随机变量函数的分布

1. 概念

设 X 为随机变量，函数 $y=g(x)$，则以随机变量 X 作为自变量的函数 $Y=g(X)$ 也是随机变量，称为**随机变量 X 的函数**．例如：$Y=aX^2+bX+c$，$Y=|X-a|$，$Y=\begin{cases}X, & X\leqslant 1,\\ 1, & X>1,\end{cases}$ 等等．

2. 随机变量函数的分布

(1) 离散型→离散型．

设 X 为离散型随机变量，其概率分布为 $P\{X=x_i\}=p_i\,(i=1, 2, \cdots)$，则 X 的函数 $Y=g(X)$ 也是离散型随机变量，其概率分布为 $P\{Y=g(x_i)\}=p_i\,(i=1, 2, \cdots)$，即

$$Y\sim\begin{pmatrix} g(x_1) & g(x_2) & \cdots \\ p_1 & p_2 & \cdots\end{pmatrix}.$$

如果有若干个 $g(x_i)$ 值相同，则合并诸项为一项 $g(x_k)$，并将相应概率相加作为 Y 取 $g(x_k)$ 值的概率．

(2) 连续型→连续型（或混合型）．

设 X 为连续型随机变量，其分布函数、概率密度分别为 $F_X(x)$ 与 $f_X(x)$，随机变量 $Y=g(X)$ 是 X 的函数，则 Y 的分布函数或概率密度可用下面两种方法求得．

①分布函数法．

直接由定义求 Y 的分布函数

此不等式的几何意义：曲线 $Y=g(X)$ 在直线 $Y=y$ 下方，由此可通过作图得出 X 的取值范围，在 $Y=g(X)$ 是非单调函数时，一般此解析法方便．

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{\underline{g(X)\leqslant y}\}=\int_{g(x)\leqslant y}f_X(x)\mathrm{d}x.$$

如果$F_Y(y)$连续，且除有限个点外，$F_Y'(y)$存在且连续，则Y的概率密度$f_Y(y)=F_Y'(y)$.

②公式法.

根据上面的分布函数法，若$y=g(x)$在(a,b)上是关于x的严格单调可导函数，则存在$x=h(y)$是$y=g(x)$在(a,b)上的可导反函数.

若$y=g(x)$严格单调增加，则$x=h(y)$也严格单调增加，即$h'(y)>0$，且

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant h(y)\}=\int_{-\infty}^{h(y)} f_X(x)\mathrm{d}x,$$

故$f_Y(y)=F_Y'(y)=f_X[h(y)]\cdot h'(y)$.

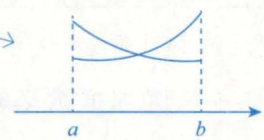
若$y=g(x)$严格单调减少，则$x=h(y)$也严格单调减少，即$h'(y)<0$，且

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{g(X)\leqslant y\}=P\{X\geqslant h(y)\}=\int_{h(y)}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x,$$

故$f_Y(y)=F_Y'(y)=-f_X[h(y)]\cdot h'(y)=f_X[h(y)]\cdot[-h'(y)]$.

综上，

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X[h(y)]\cdot|h'(y)|, & \alpha<y<\beta, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$



其中$\alpha=\min\left\{\lim\limits_{x\to a^+}g(x),\ \lim\limits_{x\to b^-}g(x)\right\}$，$\beta=\max\left\{\lim\limits_{x\to a^+}g(x),\ \lim\limits_{x\to b^-}g(x)\right\}$.

例 2.14 设随机变量X的分布律为

$$P\{X=-1\}=\frac{1}{4},\ P\{X=0\}=\frac{1}{2},\ P\{X=1\}=\frac{1}{4},$$

求$Y=X^2$的分布.

解 离散型随机变量的函数仍属于离散型随机变量范畴，求解其分布问题仍然按照计算离散型随机变量分布的三个步骤进行.

注意到Y的可能取值为0，1，于是有

$$P\{Y=0\}=P\{X^2=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{2},$$

$$\begin{aligned} P\{Y=1\}&=P\{X^2=1\}=P\{X=1\cup X=-1\} \\ &=P\{X=1\}+P\{X=-1\}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

或

$$P\{Y=1\}=1-P\{Y=0\}=\frac{1}{2},$$

即有

$$Y\sim\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

例 2.15 设随机变量X的分布函数$F_X(x)$是严格单调增加函数，其反函数$F_X^{-1}(y)$存在，$Y=F_X(X)$.证明：Y服从区间$(0,1)$上的均匀分布.

证明　$Y=F_X(X)$是在区间$(0,1)$上取值的随机变量，故

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

当$y\geqslant 1$时，$F_Y(y)=1$；

当$0\leqslant y<1$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{F_X(X)\leqslant y\}=P\{X\leqslant F_X^{-1}(y)\}=F_X[F_X^{-1}(y)]=y .$$

综上所述，$Y=F_X(X)$的分布函数为

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ y, & 0\leqslant y<1,\\ 1, & y\geqslant 1,\end{cases}$$

这是在区间$(0,1)$上的均匀分布函数，所以$Y\sim U(0,1)$．

【注】(1) 题设条件中的“$F_X(x)$严格单调增加”是充分条件，事实上只需要$F_X(x)$在X的正概率密度区间上严格单调增加即可．

(2) 本题是一个重要结论，即在满足$F_X(x)$在X的正概率密度区间上严格单调增加时，若$X\sim F_X(x)$，则$Y=F_X(X)\sim U(0,1)$．这一结论考研中常用．

例 2.16　在区间$(0,2)$上随机取一点，将该区间分成两段，较短一段的长度记为X，较长一段的长度记为Y．令$Z=\dfrac{Y}{X}$．

(1) 求X的概率密度；

(2) 求Z的概率密度．

用已知来表示未知

解　(1) 设随机取的点的坐标记为V，则$V\sim U(0,2)$，$X=\min\{V,2-V\}$，X的分布函数记为$F_X(x)$．由于$P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=1$，故

已知　　未知，且 $Y=2-X$

V　$2-V$

0　V　2

当$x<0$时，$F_X(x)=0$；当$x\geqslant 1$时，$F_X(x)=1$；

当$0\leqslant x<1$时，

$$\begin{aligned}F_X(x)&=P\{X\leqslant x\}\\&=P\{\min\{V,2-V\}\leqslant x\}\\&=1-P\{\min\{V,2-V\}>x\}\\&=1-P\{x<V<2-x\}\\&=1-\frac{(2-x)-x}{2}=x .\end{aligned}$$

$V>x$ 且 $2-V>x\Rightarrow x<V<2-x$

0　x　$2-x$　2

$\dfrac{2-2x}{2}=1-x$

所以X的分布函数为$F_X(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ x, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$

故X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$

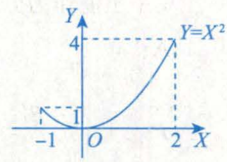
(2) 由条件知，$Z=\dfrac{Y}{X}=\dfrac{2-X}{X}$ 能一元，不要多元 . 由于函数$z=\dfrac{2-x}{x}$在$(0,1)$内严格单调减少且可导，反函数为

$x=\dfrac{2}{1+z}$，且$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{2}{(1+z)^2}$，故$Z$的概率密度为

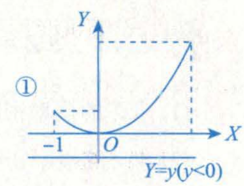
$$f_Z(z)=\begin{cases}f_X\left(\dfrac{2}{1+z}\right)\left|-\dfrac{2}{(1+z)^2}\right|, & z>1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$z(0)\to\infty$, $z(1)=1$

$$=\begin{cases}\dfrac{2}{(1+z)^2}, & z>1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



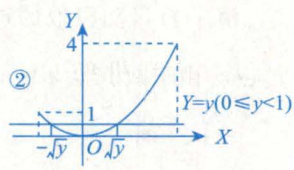
例 2.17 设随机变量X的概率密度为$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & -1<x<0,\\ \dfrac{1}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$ 令$Y=X^2$，求Y的概率密度$f_Y(y)$.



解 Y的分布函数为$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X^2\leqslant y\}$.

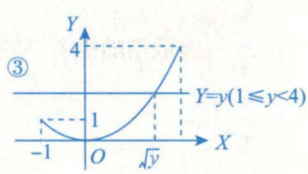
①当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；

②当$0\leqslant y<1$时，



$$F_Y(y)=P\{-\sqrt{y}\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=P\{-\sqrt{y}\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{y}+\frac{1}{4}\sqrt{y}=\frac{3}{4}\sqrt{y}；$$

③当$1\leqslant y<4$时，

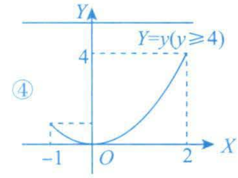


$$F_Y(y)=P\{-1\leqslant X<0\}+P\{0\leqslant X\leqslant\sqrt{y}\}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\sqrt{y}；$$

④当$y\geqslant 4$时，$F_Y(y)=1$.

故Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{8\sqrt{y}}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{8\sqrt{y}}, & 1<y<4,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$



基础习题精练

习 题

2.1 已知$F(x)$是分布函数，下列函数：

① $aF(x)(a>0, a\neq 1)$；② $F(x)+F(-x)$；③ $F(x)-F(-x)$；④ $F(x)\cdot F(-x)$.

其中不能作为分布函数的个数是（　　）.

(A)1　　(B)2　　(C)3　　(D)4

2.2 设$X\sim B(2, p)$, $Y\sim B(4, p)$，且$P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}$，则$P\{Y\geqslant 1\}=$（　　）.

(A) $\dfrac{65}{81}$　　(B) $\dfrac{16}{81}$　　(C) 1　　(D) $\dfrac{4}{7}$

2.3 设随机变量X服从正态分布$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，随机变量Y服从正态分布$N(\mu_2, \sigma_2^2)$, $\sigma_1, \sigma_2>0$，且$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$，则必有（　　）.

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$　　(C) $\mu_1<\mu_2$　　(D) $\mu_1>\mu_2$

2.4 设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x}, & x\geqslant 1,\end{cases}$则$P\{0\leqslant X\leqslant 1\}=$______，$P\{0<X<1\}=$______.

2.5 离散型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.4, & -1\leqslant x<2,\\ 0.8, & 2\leqslant x<3,\\ 1, & x\geqslant 3,\end{cases}$$

则X的分布列为______，$P\{X\leqslant 3.2\}=$______；方程$x^2+Xx+1=0$有实根的概率为______.

2.6 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{A}{x^2}, & x>100,\\ 0, & x\leqslant 100,\end{cases}$$

则 $A=$______，$P\{100<X\leqslant 150\}=$______，$P\{X\geqslant 1000\}=$______，$P\{X=1000\}=$______，X的分布函数 $F(x)=$______.

2.7 设连续型随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-a,\\ A+B\arcsin\dfrac{x}{a}, & -a\leqslant x<a,\\ 1, & x\geqslant a,\end{cases}$$

则 $A=$______，$B=$______，X的概率密度$f(x)=$______，$P\left\{-\dfrac{a}{2}<X<\dfrac{a}{2}\right\}=$______.

2.8 设随机变量X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，且二次方程$y^2+4y+X=0$无实根的概率为$\dfrac{1}{2}$，则$\mu=$______.

2.9 设随机变量X服从区间$(2,5)$上的均匀分布，则对X进行3次独立观测中，至少有2次的观测值大于3的概率为______.

2.10 设随机变量X的概率密度为$f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ Y表示对X的3次独立重复试验中事件$\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$出现的次数，则$P\{Y=2\}=$______.

2.11 设随机变量X和Y同分布，X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3}{8}x^2, & 0<x<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

已知事件$A=\{X>a\}$和$B=\{Y>a\}$独立，且$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，则常数$a=$______.

2.12 已知X为随机变量，$Y=X^2+X+1$，已知X的概率分布为$P\{X=-1\}=P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{3}$，则$Y$的分布函数$F_Y(y)=$______.

2.13 设X服从0—1分布，其分布律为$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$，$k=0,1$，$0<p<1$，求X的分布函数，并作出其图形 .

2.14 20个产品中有5个不合格品，若从中随机取出8个，求其中不合格品数X的概率分布 .

2.15 已知离散型随机变量X的正概率点为$-1,0,2$，它们各自的概率互不相等且成等差数列 .

(1) 求X的分布律；

(2) 求 X 的分布函数；

(3) 求 $P\{|X|\leqslant 1 | X\geqslant 0\}$.

2.16 随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x<1, \\ 2-x, & 1\leqslant x<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求 X 的分布函数 $F(x)$.

2.17 设连续型随机变量 X 的概率密度 $f(x)$ 是一个偶函数，$F(x)$ 为 X 的分布函数，证明：对任意实数 $a>0$ ，有

(1) $F(-a)=1-F(a)=0.5-\int_0^a f(x)\mathrm{d}x$;

(2) $P\{|X|<a\}=2F(a)-1$;

(3) $P\{|X|>a\}=2[1-F(a)]$.

2.18 设随机变量 X 的概率密度为 $f_X(x)=\dfrac{k}{1+x^2}$ $(x\in\mathbf{R})$. 求：

(1) 常数 k ;

(2) 随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度 $f_Y(y)$.

2.19 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^x)^2}$, $-\infty<x<+\infty$，令 $Y=\mathrm{e}^X$.

(1) 求 X 的分布函数；

(2) 求 Y 的概率密度 .

2.20 设随机变量 $X\sim U(-1,2)$，求 $Y=|X|$ 的概率密度 .

解 答

2.1 (D) **解** 应用分布函数的充要条件求解 . 由于

① $$aF(+\infty)=a\neq 1,$$

② $$F(-\infty)+F(+\infty)=1\neq 0,$$

③ $$F(-\infty)-F(+\infty)=-1\neq 0,$$

④ $$F(+\infty)\cdot F(-\infty)=0\neq 1,$$

故①，②，③，④都不能作为分布函数，故答案选 (D).

2.2 (A) **解** 由题设 $P\{X\geqslant 1\}=\dfrac{5}{9}=1-P\{X=0\}=1-\mathrm{C}_2^0p^0(1-p)^2$ ，即 $(1-p)^2=\dfrac{4}{9}$，解得 $p=\dfrac{1}{3}$，从

而有

$$P\{Y\geqslant 1\}=1-P\{Y=0\}=1-C_4^0p^0(1-p)^4=1-\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{65}{81},$$

故选择 (A).

2.3 (A) **解** 所有有关正态分布不等式的判别都应先标准化，即由

$$P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\},$$

有

$$P\left\{\frac{|X-\mu_1|}{\sigma_1}<\frac{1}{\sigma_1}\right\}>P\left\{\frac{|Y-\mu_2|}{\sigma_2}<\frac{1}{\sigma_2}\right\},$$

从而有

$$\varPhi\left(\frac{1}{\sigma_1}\right)>\varPhi\left(\frac{1}{\sigma_2}\right).$$

又由函数 $\varPhi(x)$ 的单调增加性，有 $\frac{1}{\sigma_1}>\frac{1}{\sigma_2}>0$，即 $\sigma_1<\sigma_2$，故选择 (A).

2.4 $1-e^{-1}$; 0 **解**
$$\begin{aligned}P\{0\leqslant X\leqslant 1\}&=P\{X\leqslant 1\}-P\{X<0\}=F(1)-F(0-0)\\&=1-e^{-1}-0=1-e^{-1};\end{aligned}$$

$$P\{0<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\leqslant 0\}=F(1-0)-F(0)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0.$$

2.5 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix}$; 1; 0.6 **解** 分布函数的分段点即为离散型随机变量的正概率点，正概率点的概率即为对应点跃度，即 $X=-1, 2, 3$，分布列为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 0.4 & 0.4 & 0.2\end{pmatrix},$$

$$P\{X\leqslant 3.2\}=F(3.2)=1.$$

方程 $x^2+Xx+1=0$ 有实根，即 $X^2-4\geqslant 0$，从而有

$$P\{X^2-4\geqslant 0\}=P\{X\leqslant -2\}+P\{X\geqslant 2\}=F(-2)+1-F(2-0)=1-0.4=0.6.$$

2.6 100; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{10}$; 0; $\begin{cases}0, & x<100,\\ 1-\frac{100}{x}, & x\geqslant 100\end{cases}$ **解** 根据连续型随机变量概率密度的性质，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\int_{100}^{+\infty}\frac{A}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{A}{x}\bigg|_{100}^{+\infty}=\frac{A}{100}=1,\ A=100,$$

于是

$$P\{100<X\leqslant 150\}=\int_{100}^{150}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{100}{x}\bigg|_{100}^{150}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X\geqslant 1\,000\}=\int_{1\,000}^{+\infty}\frac{100}{x^2}\mathrm{d}x=-\frac{100}{x}\bigg|_{1\,000}^{+\infty}=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=1\,000\}=0,$$

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\begin{cases}0, & x<100,\\ \int_{100}^{x}\frac{100}{t^2}\mathrm{d}t, & x\geqslant 100\end{cases}=\begin{cases}0, & x<100,\\ 1-\frac{100}{x}, & x\geqslant 100.\end{cases}$$

2.7 $\frac{1}{2}$；$\frac{1}{\pi}$；$\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & 其他；\end{cases}$ $\frac{1}{3}$ **解** 根据连续型随机变量分布函数的连续性，有

$$F(-a)=F(-a-0),\ F(a)=F(a-0),$$

即有
$$\begin{cases}A+B\cdot\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0,\\ A+B\cdot\frac{\pi}{2}=1,\end{cases}$$

解得 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{\pi}$.

于是

$$f(x)=\begin{cases}F'(x), & -a<x<a,\\ 0, & 其他\end{cases}=\begin{cases}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}, & -a<x<a,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$$P\left\{-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right\}=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{3},$$

或
$$P\left\{-\frac{a}{2}<X<\frac{a}{2}\right\}=F\left(\frac{a}{2}-0\right)-F\left(-\frac{a}{2}\right)=\frac{1}{\pi}\left[\arcsin\frac{1}{2}-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right]=\frac{1}{3}\ .$$

2.8 4 **解** 二次方程 $y^2+4y+X=0$ 无实根的充要条件是 $4-X<0$. 故由条件知

$$P\{X>4\}=\frac{1}{2},$$

于是有
$$\frac{1}{2}=P\{X>4\}=1-P\{X\leqslant 4\}=1-P\left\{\frac{X-\mu}{\sigma}\leqslant\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}=1-P\left\{Y\leqslant\frac{4-\mu}{\sigma}\right\}=1-\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{4-\mu}{\sigma}\right)=\frac{1}{2},$$

其中 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}\sim N(0,1)$，$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\mathrm{d}t$. 又 $\Phi(0)=\frac{1}{2}$，所以 $\frac{4-\mu}{\sigma}=0$，$\mu=4$.

【注】事实上，根据正态分布的对称性，直接可得 $\mu=4$.

2.9 $\dfrac{20}{27}$ **解** 在一次观测中，观测值大于3的概率为

$$p=P\{X>3\}=\int_3^5\frac{1}{3}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

记 $Y=\{3$ 次独立观测中 X 的观测值大于3的次数$\}$，由 $Y\sim B\left(3,\dfrac{2}{3}\right)$ 得

$$P\{Y\geqslant 2\}=1-P\{Y=0\}-P\{Y=1\}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^3-3\times\frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{20}{27}.$$

2.10 $\dfrac{9}{64}$ **解** 依题意得 $Y\sim B(3,p)$，其中 $p=P\left\{X\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}=\int_0^{\frac{1}{2}}2x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{4}$，故

$$P\{Y=2\}=\mathrm{C}_3^2p^2(1-p)=\frac{9}{64}.$$

2.11 $\sqrt[3]{4}$ **解** 由 X 和 Y 同分布可得 $P(A)=P(B)$，从而

$$\frac{3}{4}=P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)=2P(A)-[P(A)]^2,$$

由此解得 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，则 $0<a<2$．又

$$\frac{1}{2}=P(A)=P\{X>a\}=\int_a^2\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x=\frac{1}{8}x^3\Big|_a^2=1-\frac{1}{8}a^3,$$

解得 $a=\sqrt[3]{4}$．

【注】随机变量 X 与 Y 同分布，并不意味着 $X=Y$，但反之成立，即若 $X=Y$，则 X 与 Y 同分布．

2.12 $\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{2}{3}, & 1\leqslant y<3,\\ 1, & y\geqslant 3\end{cases}$ **解** 由题设知 Y 为离散型随机变量，当 $X=-1$ 时，Y 取1；当 $X=0$ 时，Y 取1；当 $X=1$ 时，Y 取3. 则 Y 的概率分布为

$$P\{Y=1\}=P\{X=-1\}+P\{X=0\}=\frac{2}{3},\ P\{Y=3\}=P\{X=1\}=\frac{1}{3}.$$

故 Y 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=\begin{cases}0, & y<1,\\ \dfrac{2}{3}, & 1\leqslant y<3,\\ 1, & y\geqslant 3.\end{cases}$$

2.13 **解** 当 $x<0$ 时，$F(x)=P\{X\leqslant x\}=0$；

当 $0\leqslant x<1$ 时，

$$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}=1-p\,;$$

当$x\geqslant 1$时，

$F(x)=P\{X\leqslant x\}=P\{X=0\}+P\{X=1\}=(1-p)+p=1$.

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1-p, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1.\end{cases}$$

作图，如图 2-10 所示 .

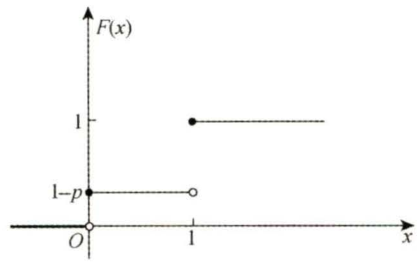


图 2-10

2.14 解 按题意有$N=20$, $M=5$, $n=8$. 由“三、1.(5) 注”中的 (*) 式可算得

$$P\{X=0\}=\frac{C_{15}^{8}}{C_{20}^{8}}=\frac{6\,435}{125\,970}=0.0511,$$

$$P\{X=1\}=\frac{C_5^1C_{15}^7}{C_{20}^{8}}=\frac{32\,175}{125\,970}=0.255\,4,$$

$$P\{X=2\}=\frac{C_5^2C_{15}^6}{C_{20}^{8}}=\frac{50\,050}{125\,970}=0.397\,3.$$

类似可得$X=3$, 4, 5 的概率，则X的概率分布为

X	0	1	2	3	4	5
P	0.0511	0.255 4	0.397 3	0.238 4	0.054 2	0.003 6

【注】由此分布可算得各种事件的概率 . 譬如，不合格品不多于 3 个的概率为

$$\begin{aligned}P\{X\leqslant 3\}&=P\{X=0\}+P\{X=1\}+P\{X=2\}+P\{X=3\}\\&=0.0511+0.255\,4+0.397\,3+0.238\,4=0.942\,2\ .\end{aligned}$$

2.15 解 (1)设$P\{X=-1\}=a+d$, $P\{X=0\}=a$, $P\{X=2\}=a-d$,其中$0<a+d<1$, $0<a<1$, $0<a-d<1$，由离散型随机变量X分布律的性质，有

$$a+d+a+a-d=3a=1,$$

解得$a=\frac{1}{3}$，且$-\frac{1}{3}<d<\frac{1}{3}$, $d\neq 0$，因此$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ \frac{1}{3}+d & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}-d\end{pmatrix}$，其中$-\frac{1}{3}<d<\frac{1}{3}$, $d\neq 0$.

(2) 由 (1) 可知，

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ \frac{1}{3}+d, & -1\leqslant x<0,\\ \frac{2}{3}+d, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

(3) 由条件概率公式及 (1) 可知，$P\{|X|\leqslant 1|X\geqslant 0\}=\dfrac{P\{0\leqslant X\leqslant 1\}}{P\{X\geqslant 0\}}=\dfrac{1}{2-3d}$.

2.16 解 由题设知，当$x<0$时，$F(x)=0$；

当$0\leqslant x<1$时，

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{x}t\mathrm{d}t=\frac{1}{2}t^2\Big|_0^x=\frac{x^2}{2}；$$

当$1\leqslant x<2$时，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{1}^{x}(2-t)\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t\\&=\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^x+\frac{t^2}{2}\Big|_0^1=2x-\frac{x^2}{2}-1；\end{aligned}$$

当$x\geqslant 2$时，

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_{-\infty}^{x}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{1}t\mathrm{d}t+\int_{1}^{2}(2-t)\mathrm{d}t\\&=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1+\left(2t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_1^2=1 .\end{aligned}$$

所以

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{x^2}{2}, & 0\leqslant x<1,\\ 2x-\dfrac{x^2}{2}-1, & 1\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

2.17 证明 因为$f(x)$是一个偶函数，所以$f(-x)=f(x)$，且$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$，可得

$$\int_{0}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=0.5 .$$

(1) $F(-a)=\int_{-\infty}^{-a}f(x)\mathrm{d}x$，令$x=-t$，则$F(-a)=\int_{+\infty}^{a}f(t)(-\mathrm{d}t)=\int_{a}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=1-F(a)$.

$$\begin{aligned}F(-a)&=\int_{a}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t=\int_{0}^{+\infty}f(t)\mathrm{d}t-\int_{0}^{a}f(t)dt\\&=0.5-\int_{0}^{a}f(x)\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}P\{|X|<a\}&=P\{-a<X<a\}=F(a-0)-F(-a)\\&=F(a)-[1-F(a)]\\&=2F(a)-1 .\end{aligned}$$

(3)
$$P\{|X|>a\}=P\{X<-a\}+P\{X>a\}=F(-a-0)+1-F(a)$$

$$=1-F(a)+1-F(a)$$

$$=2[1-F(a)].$$

2.18 解 (1) 由于

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{k}{1+x^2}\mathrm{d}x=k\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}=k\pi=1,$$

因此 $k=\dfrac{1}{\pi}$.

(2) X的概率密度为$f_X(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}(x\in\mathbf{R})$. 随机变量 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的分布函数为

$$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{1-\sqrt[3]{X}\leqslant y\}=P\{X\geqslant(1-y)^3\}$$

$$=\int_{(1-y)^3}^{+\infty} f_X(x)\mathrm{d}x=\int_{(1-y)^3}^{+\infty}\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{\pi}\arctan x\Big|_{(1-y)^3}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan(1-y)^3\right](y\in\mathbf{R}),$$

由此可得 $Y=1-\sqrt[3]{X}$ 的概率密度为$f_Y(y)=F_Y'(y)=\dfrac{3(1-y)^2}{\pi[1+(1-y)^6]}(y\in\mathbf{R})$.

2.19 解 (1) X的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{e}^t}{(1+\mathrm{e}^t)^2}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x}\frac{\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^t)}{(1+\mathrm{e}^t)^2}$$

$$=-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\Big|_{-\infty}^{x}=1-\frac{1}{1+\mathrm{e}^x}(-\infty<x<+\infty).$$

(2) 函数$y=\mathrm{e}^x$单调且反函数为$x=\ln y(y>0)$，从而Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{y}f(\ln y), & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1+y)^2}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

2.20 解 X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3}, & -1<x<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

记X的分布函数为$F_X(x)$，先求Y的分布函数$F_Y(y)$.

当$y<0$时，$F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=0$；

当$y \geqslant 0$时，$F_Y(y)=P\{|X| \leqslant y\}=P\{-y \leqslant X \leqslant y\}=F_X(y)-F_X(-y-0)$.

将$F_Y(y)$关于y求导可得Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(y)+f_X(-y), & y>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

当$0 \leqslant y<1$时，$-1<-y \leqslant 0$，因而$f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=\frac{1}{3}$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3};$$

当$1 \leqslant y<2$时，$-2<-y \leqslant -1$，因而$f_X(y)=\frac{1}{3}$，$f_X(-y)=0$，此时

$$f_Y(y)=\frac{1}{3};$$

当$y \geqslant 2$时，$-y \leqslant -2$，因而$f_X(y)=0$，$f_X(-y)=0$，此时$f_Y(y)=0$. 故Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} \frac{2}{3}, & 0 \leqslant y<1, \\ \frac{1}{3}, & 1 \leqslant y<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

第3讲 多维随机变量及其分布

基础知识结构

- n维随机变量及其分布函数
  - 概念
  - 联合分布函数
    - 概念
    - 性质
  - 边缘分布函数
- 常见的两类二维随机变量
  - 二维离散型随机变量
    - 联合分布律
    - 边缘分布律
    - 条件分布律
  - 二维连续型随机变量
    - 联合概率密度
    - 边缘概率密度
    - 条件概率密度
    - 二维均匀分布
    - 二维正态分布
- 独立性
  - 概念
  - 相互独立的充要条件
    - $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$
    - $p_{ij}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}$
    - $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
  - 性质
  - 判断
- 多维随机变量函数的分布
  - 概念
  - 求法
    - 分布函数法
    - 卷积公式

基础内容精讲

一、n 维随机变量及其分布函数

1. n 维随机变量的概念

如果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是定义在同一个样本空间 Ω 上的 n 个随机变量，则称 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 **n 维随机变量或 n 维随机向量**，$X_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 称为第 i 个分量．

当 $n=2$ 时，称 (X, Y) 为**二维随机变量或二维随机向量**．

2. n 维随机变量的分布函数的概念和性质

(1) 概念．

对任意的 n 个实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，称 n 元函数

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=P\{X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2, \cdots, X_n \leqslant x_n\}$$

为 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**分布函数**或随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的**联合分布函数**．

当 $n=2$ 时，对任意的实数 x, y，称二元函数

$F(x, y)$ 是事件 $A=\{X \leqslant x\}$ 与 $B=\{Y \leqslant y\}$ 同时发生的概率

$$F(x, y)=P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}$$

为二维随机变量 (X, Y) 的**分布函数**或随机变量 X 和 Y 的**联合分布函数**，记为 $(X, Y) \sim F(x, y)$．

(2) 性质．

类似“偏”导数处，固定一个字母；看另一个字母的变化

①**单调性**　$F(x, y)$ 是 x, y 的单调不减函数：

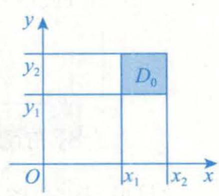
对任意固定的 y，当 $x_1<x_2$ 时，$F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y)$；

对任意固定的 x，当 $y_1<y_2$ 时，$F(x, y_1) \leqslant F(x, y_2)$．

②**右连续性**　$F(x, y)$ 是 x, y 的右连续函数：

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x, y)=F(x_0+0, y)=F(x_0, y);$$

$$\lim_{y \to y_0^+} F(x, y)=F(x, y_0+0)=F(x, y_0).$$



③**有界性**　$F(-\infty, y)=F(x, -\infty)=F(-\infty, -\infty)=0, F(+\infty, +\infty)=1$．

④**非负性**　对任意的 $x_1<x_2, y_1<y_2$，有

$$\underline{P\{x_1<X \leqslant x_2, y_1<Y \leqslant y_2\}}=F(x_2, y_2)-F(x_2, y_1)-F(x_1, y_2)+F(x_1, y_1) \geqslant 0.$$

实质上是 $(x, y) \in D_0$ 的概率 $\geqslant 0$

3. 边缘分布函数

设二维随机变量(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，随机变量X与Y的分布函数$F_X(x)$与$F_Y(y)$分别称为(X, Y)关于X和关于Y的**边缘分布函数**. 由概率性质得

$$
\begin{aligned}
F_X(x) &= P\{X \leqslant x\} = P\{X \leqslant x, Y < +\infty\} \\
&= \lim_{y \to +\infty} P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\} \\
&= \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = F(x, +\infty) .
\end{aligned}
$$

同理，有$F_Y(y) = F(+\infty, y)$.

二、常见的两类二维随机变量——离散型随机变量与连续型随机变量

(一) 二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布和条件分布

1. 概率分布

(1) 如果二维随机变量(X, Y)的可能取值是有限对值或可列无限对值，则称(X, Y)为**二维离散型随机变量**.

称
$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i, j = 1, 2, \cdots$$
为(X, Y)的**分布律**或随机变量X和Y的**联合分布律**，记为$(X, Y) \sim p_{ij}$. 联合分布律常用表格形式表示 .

X \ Y	y_1	$\cdots$	y_j	$\cdots$	$P\{X = x_i\}$
x_1	p_{11}	$\cdots$	p_{1j}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
x_i	p_{i1}	$\cdots$	p_{ij}	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$P\{Y = y_j\}$	$p_{\cdot 1}$	$\cdots$	$p_{\cdot j}$	$\cdots$	1

(2) 数列$\{p_{ij}\}, i, j = 1, 2, \cdots$是某一二维离散型随机变量的概率分布的充分必要条件为

$$p_{ij} \geqslant 0, \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 .$$

2. 联合分布函数、边缘分布、条件分布

(1) 联合分布函数 .

设(X, Y)的概率分布为$p_{ij}, i, j = 1, 2, \cdots$，则$(X, Y)$的分布函数或$X$和$Y$的联合分布函数为

$$F(x, y)=P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}=\sum_{x_i \leqslant x} \sum_{y_j \leqslant y} p_{ij} .$$

【注】它是以(x, y)为顶点的左下角平面上(X, Y)取所有可能值的概率的和.

设G是平面上的某个区域，则

$$P\{(X, Y) \in G\}=\sum_{(x_i, y_j) \in G} p_{ij} .$$

【注】(X, Y)落入G的概率等于(X, Y)在G内取所有可能值的概率的和.

(2) 边缘分布.

X, Y的**边缘分布**分别为

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}(i=1,2, \cdots) ;$$

$$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}(j=1,2, \cdots) .$$

(3) 条件分布.

如果$(X, Y) \sim p_{ij}(i, j=1,2, \cdots)$，对固定的$j$，如果$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$，则称

$$P\{X=x_i | Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}(i=1,2, \cdots)$$

为X在“$Y=y_j$”条件下的**条件分布**.

同理，对固定的i，如果$p_{i\cdot}>0$，可定义Y在“$X=x_i$”条件下的条件分布

$$P\{Y=y_j | X=x_i\}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}(j=1,2, \cdots) .$$

(二)二维连续型随机变量的概率密度、边缘概率密度和条件概率密度

1. 概率密度

(1) 概念.

如果二维随机变量(X, Y)的分布函数$F(x, y)$可以表示为

$$F(x, y)=\int_{-\infty}^{y} \mathrm{d} v \int_{-\infty}^{x} f(u, v) \mathrm{d} u,(x, y) \in \mathbf{R}^{2},$$

其中$f(x, y)$是非负可积函数，则称(X, Y)为**二维连续型随机变量**，称$f(x, y)$为(X, Y)的**概率密度**，记为$(X, Y) \sim f(x, y)$.

(2) 二元函数$f(x, y)$是概率密度的充分必要条件为

$$f(x, y) \geqslant 0, \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d} y \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x=1 .$$

【注】改变$f(x, y)$的有限个点的值（仍取非负值），$f(x, y)$仍然是概率密度．

2. 联合分布函数与概率密度、边缘概率密度、条件概率密度

(1) 联合分布函数与概率密度．

设(X, Y)的分布函数为$F(x, y)$，概率密度为$f(x, y)$，则

①$F(x, y)$为(x, y)的二元连续函数，且

$$F(x, y)=P\{X \leqslant x, Y \leqslant y\}=\int_{-\infty}^{y} \mathrm{d} v \int_{-\infty}^{x} f(u, v) \mathrm{d} u ;$$

②设G为平面上某个区域，则

$$P\{(X, Y) \in G\}=\iint_{G} f(x, y) \mathrm{d} x \mathrm{d} y ;$$

③若$f(x, y)$在点(x, y)处连续，则$\dfrac{\partial^{2} F(x, y)}{\partial x \partial y}=f(x, y)$；

④若$F(x, y)$连续且可导，则(X, Y)是连续型随机变量，且$\dfrac{\partial^{2} F(x, y)}{\partial x \partial y}$是它的概率密度．

(2) 边缘概率密度．

设$(X, Y) \sim f(x, y)$，则X的边缘分布函数为

$$F_{X}(x)=F(x,+\infty)=\int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) \mathrm{d} v\right] \mathrm{d} u,$$

所以X是连续型随机变量，其概率密度为

$$f_{X}(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} y,$$

称$f_{X}(x)$为(X, Y)关于X的**边缘概率密度**．

同理，Y也是连续型随机变量，其概率密度为$f_{Y}(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \mathrm{d} x$．

(3) 条件概率密度．

设$(X, Y) \sim f(x, y)$，边缘概率密度$f_{X}(x)>0$，则称

$$f_{Y \mid X}(y \mid x)=\frac{f(x, y)}{f_{X}(x)}$$

为Y在“$X=x$”条件下的**条件概率密度**．

同理，可定义X在“$Y=y$”条件下的条件概率密度

$$f_{X \mid Y}(x \mid y)=\frac{f(x, y)}{f_{Y}(y)}\left(f_{Y}(y)>0\right) .$$

由以上讨论可知，若$f_{X}(x)>0$，$f_{Y}(y)>0$，则有概率密度乘法公式

$$f(x, y)=f_{X}(x) f_{Y \mid X}(y \mid x)=f_{Y}(y) f_{X \mid Y}(x \mid y) .$$

【注】称

$$F_{Y|X}(y|x)=\int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(y|x)\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{y}\frac{f(x,y)}{f_X(x)}\mathrm{d}y$$

为 Y 在“$X=x$”条件下的**条件分布函数**.

同理，可定义 X 在“$Y=y$”条件下的条件分布函数

$$F_{X|Y}(x|y)=\int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(x|y)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{x}\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}\mathrm{d}x .$$

3. 常见的二维分布

(1) 二维均匀分布.

如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{S_D}, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 S_D 为区域 D 的面积，则称 (X,Y) 在平面有界区域 D 上服从**均匀分布**.

(2) 二维正态分布.

如果 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]\right\},$$

其中 $\mu_1\in\mathbf{R}$, $\mu_2\in\mathbf{R}$, $\sigma_1>0$, $\sigma_2>0$, $-1<\rho<1$，则称 (X,Y) 服从参数为 $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ 的**二维正态分布**，记为 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$. 此时有

①若 $(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;\rho)$，则

$$X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2),\quad X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2).$$

恰好说明：
联合分布 ⇒ 边缘分布
⇍

②若 $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$，$X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ 且 X_1，X_2 相互独立，则

独立 ⇒ 不相关，故 $\rho=0$

$$(X_1,X_2)\sim N(\mu_1,\mu_2;\sigma_1^2,\sigma_2^2;0).$$

③ $(X_1,X_2)\sim N\Rightarrow k_1X_1+k_2X_2\sim N$（$k_1$，$k_2$ 是不全为 0 的常数）.

例 3.1 将两封信投入 3 个信箱，设 X_1，X_2 分别表示第一个和第二个信箱投进的信的数量，求：

(1) (X_1,X_2) 的分布律、边缘分布；

(2) 在条件 $X_2=1$ 下，X_1 的条件分布.

解 (1) X_1 与 X_2 可能取值为 0, 1, 2，样本点总数为 $3^2=9$，则

$$p_{00}=P\{X_1=0,X_2=0\}=\frac{1}{9},\ p_{01}=P\{X_1=0,X_2=1\}=\frac{2}{9},$$

$$p_{02}=P\{X_1=0,X_2=2\}=\frac{1}{9},\ p_{10}=P\{X_1=1,X_2=0\}=\frac{2}{9},$$

$$p_{11}=P\{X_1=1, X_2=1\}=\frac{2}{9}, \ p_{12}=P\{X_1=1, X_2=2\}=0,$$

$$p_{20}=P\{X_1=2, X_2=0\}=\frac{1}{9}, \ p_{21}=p_{22}=0,$$

于是(X_1, X_2)的分布律与边缘分布为

X_1 \ X_2	0	1	2	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{4}{9}$
2	$\frac{1}{9}$	0	0	$\frac{1}{9}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

(2)
$$P\{X_1=0 \mid X_2=1\}=\frac{p_{01}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2}, \ P\{X_1=1 \mid X_2=1\}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot 1}}=\frac{\frac{2}{9}}{\frac{4}{9}}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X_1=2 \mid X_2=1\}=0,$$

所以在条件$X_2=1$下，X_1的条件分布为$X_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

例 3.2 二维随机变量(X, Y)的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

若随机事件$\{X=0\}$与$\{X+Y=1\}$相互独立，则（　　）.

(A) $a=0.2, b=0.3$　　(B) $a=0.1, b=0.4$　　(C) $a=0.3, b=0.2$　　(D) $a=0.4, b=0.1$

解 应选 (D).

由联合分布、边缘分布及条件分布的性质，有

$$P\{X=0\}=p_{00}+p_{01}=0.4+a,$$

$$P\{X+Y=1\}=p_{01}+p_{10}=a+b,$$

$$p_{00}+p_{01}+p_{10}+p_{11}=a+b+0.5=1\Rightarrow a+b=0.5,$$

$$P\{X=0,\ X+Y=1\}=P\{X=0,\ Y=1\}=a\ .$$

又 $\{X=0\}$ 与 $\{X+Y=1\}$ 相互独立，故

$$\begin{aligned}P\{X=0,\ X+Y=1\}&=P\{X=0\}\cdot P\{X+Y=1\}\\&=(0.4+a)(a+b)=0.5(0.4+a)\ .\end{aligned}$$

因此 $0.5(0.4+a)=a$，解得 $a=0.4,\ b=0.5-0.4=0.1$，故选择 (D).

例 3.3 已知二维随机变量 $(X,\ Y)$ 在 G 上服从均匀分布，G 由直线 $x-y=0,\ x+y=2$ 与 $y=0$ 围成，求：

(1) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$；

(2) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x\mid y)$.

解 $(X,\ Y)$ 的正概率密度区域如图 3-1 所示 .

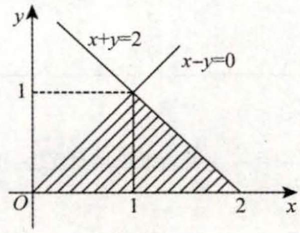


图 3-1

由题设，$(X,\ Y)$ 的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}1, & 0\leqslant y\leqslant 1,\ y\leqslant x\leqslant 2-y,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1)
$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}y=\begin{cases}\int_0^x 1\mathrm{d}y, & 0<x<1,\\\int_0^{2-x}1\mathrm{d}y, & 1<x<2,\\0, & \text{其他}\end{cases}$$

求边缘概率密度口诀：
求谁不积谁，
不积先定限，
限内画条线，
先交写下限，
后交写上限.

$$=\begin{cases}x, & 0<x<1,\\2-x, & 1<x<2,\\0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ y)\mathrm{d}x=\begin{cases}\int_y^{2-y}1\mathrm{d}x, & 0<y<1,\\0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-2y, & 0<y<1,\\0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(2) 在 $0<y<1$ 的条件下，条件概率密度

$$f_{X|Y}(x\mid y)=\frac{f(x,\ y)}{f_Y(y)}=\frac{1}{2-2y},$$

所以在 $Y=y(0<y<1)$ 的条件下，X 的条件概率密度为 $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-2y}, & y\leqslant x\leqslant 2-y,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

例 3.4　已知随机变量 X 在区间 $[0,1]$ 上服从均匀分布，在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $[0,x]$ 上服从均匀分布，求：

(1) (X,Y) 的概率密度；

(2) Y 的概率密度；

(3) 概率 $P\{X+Y>1\}$.

解　(1) 由题设，X 的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}1, & 0<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

在 $X=x(0<x<1)$ 的条件下，随机变量 Y 在区间 $[0,x]$ 上的条件概率密度为

$$f_{Y|X}(y|x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

因此，当 $0<y<x<1$ 时，$f(x,y)=f_X(x)f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{1}{x}$，故 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & 0<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

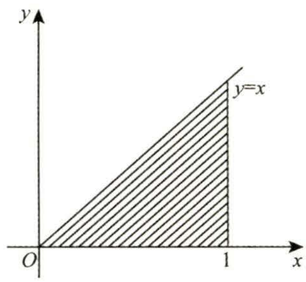


图 3-2

(2) (X,Y) 的正概率密度区域如图 3-2 所示 .

当 $0<y<1$ 时，$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x=\int_y^1\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x=-\ln y$；

当 $y\leqslant 0$ 或 $y\geqslant 1$ 时，$f_Y(y)=0$.

从而有
$$f_Y(y)=\begin{cases}-\ln y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(3) $P\{X+Y>1\}=\iint\limits_{x+y>1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}x\int_{1-x}^{x}\dfrac{1}{x}\mathrm{d}y=1-\ln 2$.

【注】第 (1) 问中，当 $f_X(x)>0$ 时，才有 $f_{Y|X}(y|x)=\dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$，所以 $f(x,y)=f_X(x)\cdot f_{Y|X}(y|x)$ 是在 $f_X(x)>0$ 时的表达式，故最终结果要加上 $f_X(x)=0$ 时的定义，一般说来，在分段表达式的“其他”中也就定义全面了 .

三、随机变量的相互独立性

1. 概念

(1) 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，边缘分布函数分别为 $F_X(x)$, $F_Y(y)$，如果对任意的实数 x, y 都有

$$F(x, y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)\text{（即事件}\{X\leqslant x\}\text{与}\{Y\leqslant y\}\text{相互独立）},$$

则称 X 与 Y **相互独立**，否则称 X 与 Y **不相互独立**.

(2) 如果 n 维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的分布函数等于边缘分布函数的乘积，即

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=F_1(x_1)\cdot F_2(x_2)\cdot\cdots\cdot F_n(x_n),$$

其中 $F_i(x_i)(i=1, 2, \cdots, n)$ 为 X_i 的边缘分布函数，x_i 为任意实数，则称 X_1, X_2, $\cdots$, X_n **相互独立**.

(3) 如果对任意实数 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 与 $y_j(j=1, 2, \cdots, m)$，有

$$\begin{aligned}&P\{X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n; Y_1\leqslant y_1, Y_2\leqslant y_2, \cdots, Y_m\leqslant y_m\}\\=&P\{X_1\leqslant x_1, X_2\leqslant x_2, \cdots, X_n\leqslant x_n\}\cdot P\{Y_1\leqslant y_1, Y_2\leqslant y_2, \cdots, Y_m\leqslant y_m\},\end{aligned}$$

即联合分布函数等于各自的分布函数相乘：

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n, y_1, y_2, \cdots, y_m)=F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\cdot F_2(y_1, y_2, \cdots, y_m),$$

则两个多维随机变量 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 与 $(Y_1, Y_2, \cdots, Y_m)$ 相互独立.

2. 相互独立的充要条件

(1) n 个随机变量 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 相互独立

$\Leftrightarrow$ 对任意的 n 个实数 $x_i(i=1, 2, \cdots, n)$, n 个事件 $\{X_1\leqslant x_1\}$, $\{X_2\leqslant x_2\}$, $\cdots$, $\{X_n\leqslant x_n\}$ 相互独立.

(2) ①设 (X, Y) 为二维离散型随机变量，则 X 与 Y 相互独立

$\Leftrightarrow$ 联合分布等于边缘分布相乘，即

如例3.1中，由于 $p_{00}\neq p_{0\cdot}p_{\cdot 0}$，故 X_1 与 X_2 不独立.

$$P\{X=x_i, Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\}(i, j=1, 2, \cdots).$$

② n 个离散型随机变量 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 相互独立

$\Leftrightarrow$ 对任意的 $x_i\in D_i=\{X_i\text{的一切可能值}\}(i=1, 2, \cdots, n)$，有

$$P\{X_1=x_1, \cdots, X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{X_i=x_i\}.$$

(3) ①设 (X, Y) 为二维连续型随机变量，则 X 与 Y 相互独立

$\Leftrightarrow$ 概率密度等于边缘概率密度相乘，即

$$f(x, y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

②设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$为n维连续型随机变量，则$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立

$\Leftrightarrow$概率密度等于边缘概率密度相乘，即

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f_1(x_1) \cdot f_2(x_2) \cdot \cdots \cdot f_n(x_n),$$

其中$f_i(x_i)$为X_i的边缘概率密度 .

3. 相互独立的性质

(1) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则其中任意$k(2 \leqslant k \leqslant n)$个随机变量也相互独立 .

(2) ①设(X, Y)为二维离散型随机变量，X与Y独立，则条件分布等于边缘分布：

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = P\{X = x_i\}(P\{Y = y_j\} > 0),$$

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = P\{Y = y_j\}(P\{X = x_i\} > 0) .$$

②设(X, Y)为二维连续型随机变量，X与Y独立，则条件概率密度等于边缘概率密度：

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = f_X(x)(f_Y(y) > 0),$$

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = f_Y(y)(f_X(x) > 0) .$$

③若$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，$g_1(x), g_2(x), \cdots, g_n(x)$为一元连续函数，则$g_1(X_1), g_2(X_2), \cdots, g_n(X_n)$相互独立 .

一般地，若$X_{11}, \cdots, X_{1t_1}, X_{21}, \cdots, X_{2t_2}, \cdots, X_{n1}, \cdots, X_{nt_n}$相互独立，$g_i$是$t_i(i = 1, 2, \cdots, n)$元连续函数，则$g_1(X_{11}, \cdots, X_{1t_1}), g_2(X_{21}, \cdots, X_{2t_2}), \cdots, g_n(X_{n1}, \cdots, X_{nt_n})$也相互独立 .

4. X与Y不独立的判断与证明

X与Y不独立$\Leftrightarrow$存在x_0, y_0，使$A = \{X \leqslant x_0\}$与$B = \{Y \leqslant y_0\}$不独立，即

$$F(x_0, y_0) \neq F_X(x_0) \cdot F_Y(y_0) .$$

也即取合适的x_0, y_0，使$P\{X \leqslant x_0\} \cdot P\{Y \leqslant y_0\} \neq P\{X \leqslant x_0, Y \leqslant y_0\}$. 如：取x_0, y_0，使$0 < P\{X \leqslant x_0\} < 1$，$0 < P\{Y \leqslant y_0\} < 1$，但$\{X \leqslant x_0\} \subset \{Y \leqslant y_0\}$或$\{Y \leqslant y_0\} \subset \{X \leqslant x_0\}$或$\{X \leqslant x_0, Y \leqslant y_0\} = \varnothing$等 .

例 3.5　设随机变量$X \sim N(0, 1)$，在$X = x$的条件下，随机变量$Y \sim N(x, 1)$，则(X, Y)的概率密度$f(x, y) =$______.

解　应填$\frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2x^2 + y^2 - 2xy}{2}}$.

由题意知
$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},\ f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(y-x)^2}{2}},$$

故
$$f(x, y) = f_X(x) \cdot f_{Y|X}(y | x) = \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\frac{2x^2 + y^2 - 2xy}{2}} .$$

例 3.6 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x\in(-\infty,+\infty),$$

证明：X与$|X|$不独立 .

证明 取$x_0=1$，则

$$P\{X\leqslant 1\}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{1}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1},$$

$$P\{|X|\leqslant 1\}=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-\mathrm{e}^{-1}.$$

又事件$\{|X|\leqslant 1\}\subset\{X\leqslant 1\}$，即$\{|X|\leqslant 1\}\cap\{X\leqslant 1\}=\{|X|\leqslant 1\}$，故有

$$P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}=P\{|X|\leqslant 1\}=1-\mathrm{e}^{-1},$$

从而有

$$P\{X\leqslant 1,|X|\leqslant 1\}\neq P\{X\leqslant 1\}\cdot P\{|X|\leqslant 1\},$$

因此，X与$|X|$不独立 .

【注】本题中x_0可取任意正数 .

四、多维随机变量函数的分布

1. 概念

设X,Y为随机变量，$g(x,y)$是二元函数，则以随机变量X,Y作为变量的函数$Z=g(X,Y)$也是随机变量，称为**随机变量X,Y的函数**. 例如：$Z=X+Y$, $Z=\begin{cases}1, & X<Y,\\ 0, & X\geqslant Y\end{cases}$等 .

常考问题：已知(X,Y)的分布，求$Z=g(X,Y)$的分布；又$U=h(X,Y)$，求(Z,U)的分布 .

2. 求法

已知(X,Y)的分布，求函数$Z=g(X,Y)$的分布 . 首先要确定X,Y的类型，而后采用相应的公式计算 .

(1) 如果(X,Y)是二维离散型随机变量，则$Z=g(X,Y)$也是离散型的，先确定Z的值，而后求其相应的概率，即可求得Z的分布，具体见例 3.7.

(2) 如果X,Y其中一个是离散型的，另一个是非离散型的，将事件对离散型的一切可能值进行全集分解，而后应用全概率公式求得Z的分布，具体见例 3.10.

(3) 如果(X,Y)是二维连续型随机变量，即$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$Z=g(X,Y)$的分布函数

$$F(z)=P\{g(X,Y)\leqslant z\}=\iint\limits_{g(x,y)\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

要求概率密度$f(z)$，亦可直接用下面的“四、3.”中所讲公式，具体见例 3.8，例 3.9.

3. 相互独立随机变量函数的分布及卷积公式

(1) 和的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(2) 差的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$Z=X-Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y+z,y)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+z)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(3) 积的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$Z=XY$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f\left(\frac{z}{y},y\right)\mathrm{d}y$$

$$\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y\left(\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X\left(\frac{z}{y}\right)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

(4) 商的分布.

设$(X,Y)\sim f(x,y)$，则$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y\xlongequal{\text{独立}}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

【注】以上四组公式，可用“口诀”来记忆：“积谁不换谁，换完求偏导.”

如$Z=X-Y$的$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)\mathrm{d}x$中.

先用第一句：“积谁不换谁”. 对x积分，则不换x，写成$f(x,\square)$，换$y=x-z$，为$f(x,x-z)$.

再用第二句：“换完求偏导”. $\dfrac{\partial(x-z)}{\partial z}=-1$，因概率密度非负，要加绝对值，即为$|-1|=1$. 这样便记住了公式.

(5) $\max\{X, Y\}$ 分布 .

设 $(X, Y) \sim F(x, y)$，则 $Z=\max\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$F_{\max}(z)=P\{\max\{X, Y\} \leqslant z\}=P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\}=F(z, z) .$$

当 X 与 Y 独立时,

$$F_{\max}(z)=F_X(z) \cdot F_Y(z) .$$

(6) $\min\{X, Y\}$ 分布 .

设 $(X, Y) \sim F(x, y)$，则 $Z=\min\{X, Y\}$ 的分布函数为

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= P\{\min\{X, Y\} \leqslant z\}=P\{\{X \leqslant z\} \cup\{Y \leqslant z\}\} \\ &= P\{X \leqslant z\}+P\{Y \leqslant z\}-P\{X \leqslant z, Y \leqslant z\} \\ &= F_X(z)+F_Y(z)-F(z, z) . \end{aligned}$$

当 X 与 Y 独立时,

$$\begin{aligned} F_{\min}(z) &= F_X(z)+F_Y(z)-F_X(z) F_Y(z) \\ &= 1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)] . \end{aligned}$$

【注】 上述结果容易推广到 n 个相互独立的随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的情况，即

$$F_{\max}(z)=F_{X_1}(z) F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z),$$

$$F_{\min}(z)=1-[1-F_{X_1}(z)][1-F_{X_2}(z)] \cdots[1-F_{X_n}(z)] .$$

特别地，当 $X_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 相互独立且有相同的分布函数 $F(x)$ 与概率密度 $f(x)$ 时,

$$F_{\max}(x)=[F(x)]^n,$$

$$f_{\max}(x)=n[F(x)]^{n-1} f(x) .$$

$$F_{\min}(x)=1-[1-F(x)]^n,$$

$$f_{\min}(x)=n[1-F(x)]^{n-1} f(x) .$$

这些结果在数理统计部分是要用到的 .

(7) 常见分布的可加性 .

有些相互独立且服从同类型分布的随机变量，其和的分布也是同类型的，它们是二项分布、泊松分布、正态分布与 χ^2 分布 .

设随机变量 X 与 Y 相互独立，则

若 $X \sim B(n, p), Y \sim B(m, p)$，则 $X+Y \sim B(n+m, p)$ (注意 p 相同);

若 $X \sim P(\lambda_1), Y \sim P(\lambda_2)$，则 $X+Y \sim P(\lambda_1+\lambda_2)$;

若 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$，则 $X+Y \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$；

若 $X \sim \chi^2(n), Y \sim \chi^2(m)$，则 $X+Y \sim \chi^2(n+m)$. 第6讲再讲

【注】 上述结果对 n 个相互独立的随机变量也成立．

例 3.7 将两封信投入 3 个信箱，设 X_1，X_2 分别表示第一个和第二个信箱投进的信的数量，求随机变量 $Y_1 = X_1 + X_2$ 和 $Y_2 = X_1 - X_2$ 的分布．

解 由例 3.1 知 (X_1, X_2) 的分布律，则 $Y_1 = X_1 + X_2$ 的可能取值为 0, 1, 2，于是

$$P\{Y_1=0\} = p_{00} = \frac{1}{9},\ P\{Y_1=1\} = p_{01}+p_{10} = \frac{4}{9},\ P\{Y_1=2\} = p_{02}+p_{11}+p_{20} = \frac{4}{9},$$

从而有
$$Y_1 \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

又 $Y_2 = X_1 - X_2$ 的可能取值为 $-2, -1, 0, 1, 2$，于是

$$P\{Y_2=-2\} = p_{02} = \frac{1}{9},\ P\{Y_2=-1\} = p_{01} = \frac{2}{9},\ P\{Y_2=0\} = p_{00}+p_{11} = \frac{1}{3},$$

$$P\{Y_2=1\} = p_{10} = \frac{2}{9},\ P\{Y_2=2\} = p_{20} = \frac{1}{9},$$

从而有
$$Y_2 \sim \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{3} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

例 3.8 设随机变量 X, Y 相互独立，它们的概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x>0, \\ 0, & 其他, \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 2y, & 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

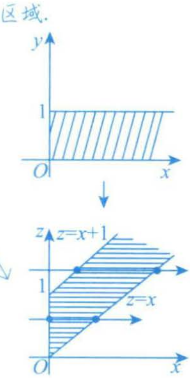
(1) 求 (X, Y) 的概率密度；

(2) 求 $Z = X+Y$ 的概率密度．

解 (1) 由于 X, Y 相互独立，则 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} 2y e^{-x}, & x>0,\ 0<y<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

用卷积公式"三部曲"：
①换字母. $x>0,\ 0<z-x<1 \Rightarrow x>0,\ x<z<x+1$.
②换区域.



(2) 在 X, Y 相互独立的条件下，用公式 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx$ 计算，有

$$f_X(x) f_Y(z-x) = \begin{cases} 2(z-x)e^{-x}, & x>0,\ 0<z-x<1, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

当$z<0$时，$f_Z(z)=0$；

当$0<z<1$时，$f_Z(z)=\int_0^z 2(z-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2z+2\mathrm{e}^{-z}-2$；

当$z>1$时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^z 2(z-x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2\mathrm{e}^{-z}$.

③背口诀.
求z不积z，
不积先定限，
限内画条线，
先交写下限，
后交写上限.

因此$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z+2\mathrm{e}^{-z}-2, & 0<z<1,\\ 2\mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

【注】本题亦可用分布函数法 . (X,Y)的正概率区域D与所求概率$F_Z(z)=P\{X+Y\leqslant z\}$的积分区域的公共部分有三种不同的组合形式 (见图 3-3)，于是：

当$z<0$时，$F_Z(z)=0$；

当$0\leqslant z<1$时，$F_Z(z)=\int_0^z\mathrm{d}x\int_0^{z-x}2y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}y=z^2-2z-2\mathrm{e}^{-z}+2$；

当$z\geqslant 1$时，$F_Z(z)=1-\int_0^1\mathrm{d}y\int_{z-y}^{+\infty}2y\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1-2\mathrm{e}^{-z}$.

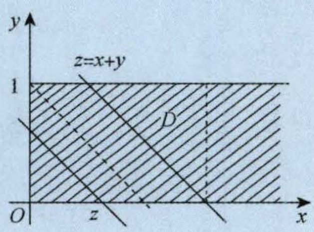


图 3-3

因此$Z=X+Y$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}2z+2\mathrm{e}^{-z}-2, & 0<z<1,\\ 2\mathrm{e}^{-z}, & z>1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

例 3.9 设二维随机变量(X,Y)在矩形区域$D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1\}$上服从均匀分布，求边长为$X$和$Y$的矩形面积$Z$的概率密度 .

解 由题设$Z=XY$，(X,Y)的概率密度为

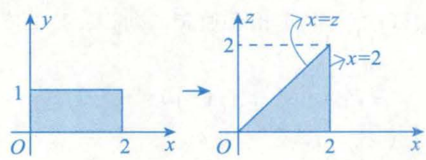
用卷积公式"三部曲"：
①换字母.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\ 0\leqslant y\leqslant 1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

$y\to\frac{z}{x}$

$0<x\leqslant 2,\ 0\leqslant\frac{z}{x}\leqslant 1\Rightarrow 0<x\leqslant 2,\ 0\leqslant z\leqslant x.$

②换区域.



用卷积公式

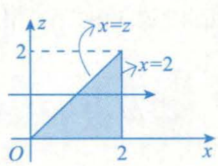
$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f\left(x,\frac{z}{x}\right)\mathrm{d}x,\quad 0\leqslant z\leqslant x\leqslant 2 .$$

当$z\leqslant 0$或$z\geqslant 2$时，$f_Z(z)=0$；

当$0<z<2$时，

$$f_Z(z)=\frac{1}{2}\int_z^2\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(\ln 2-\ln z) .$$

③背口诀.
求z不积z，
不积先定限，
限内画条线，
先交写下限，
后交写上限.



因此$Z=XY$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

【注】本题亦可用分布函数法．

正概率密度区域 D 与所求概率 $F_Z(z)=P\{XY\leqslant z\}$ 的积分区域的公共部分有三种不同的组合形式（见图 3-4），于是：

当 $z\leqslant 0$ 时，$F_Z(z)=0$；

当 $0<z<2$ 时，

$$F_Z(z)=\int_0^z \mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{2}\mathrm{d}y+\int_z^2\mathrm{d}x\int_0^{\frac{z}{x}}\frac{1}{2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}z(1-\ln z+\ln 2);$$

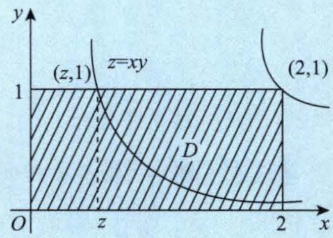


图 3-4

当 $z\geqslant 2$ 时，$F_Z(z)=1$．

因此 $Z=XY$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(\ln 2-\ln z), & 0<z<2,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

例 3.10　设随机变量 X_1，X_2，X_3 相互独立，其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布，X_3 的概率分布为 $P\{X_3=0\}=P\{X_3=1\}=\dfrac{1}{2}$，$Y=X_3X_1+(1-X_3)X_2$．

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数，结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示；

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布．

(1) **解**　记 (X_1, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$，则对任意实数 x 和 y，都有

$$F(x,y)=P\{X_1\leqslant x, Y\leqslant y\}$$

$$=P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\}$$

$=P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y, \Omega\}$

$=P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y, (X_3=0\cup X_3=1)\}$

$$=P\{X_3=0\}P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+$$
$$P\{X_3=1\}P\{X_1\leqslant x, X_3X_1+(1-X_3)X_2\leqslant y\mid X_3=1\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y\mid X_3=0\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_1\leqslant y\mid X_3=1\}$$

独立性　　独立性

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_1\leqslant y\}$$

$$=\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant x, X_2\leqslant y\}+\frac{1}{2}P\{X_1\leqslant \min\{x, y\}\}$$

$$=\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\}).$$

(2) **证明** 由 (1) 知，Y的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Y(y)&=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\Phi(x)\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(\min\{x,y\})\right]\\&=\frac{1}{2}\Phi(y)+\frac{1}{2}\Phi(y)=\Phi(y),\end{aligned}$$

所以Y服从标准正态分布.

例 3.11 设随机变量X,Y相互独立，且都在区间$[a,b]$上服从均匀分布，求$Z=\max\{X,Y\}$的概率密度.

解 由题意可知X,Y相互独立，且

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant x\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\leqslant y\leqslant b,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

所以(X,Y)的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)^2}, & a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

由(X,Y)的取值区域$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$，可知$Z=\max\{X,Y\}$的取值区间为$[a,b]$.

当$z<a$或$z>b$时，有$f_Z(z)=0$.

当$a\leqslant z\leqslant b$时，有

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}\\&=\iint\limits_{x\leqslant z,y\leqslant z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^z\mathrm{d}x\int_a^z\frac{1}{(b-a)^2}\mathrm{d}y\\&=\frac{(z-a)^2}{(b-a)^2},\end{aligned}$$

所以

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{2(z-a)}{(b-a)^2}.$$

综上，$Z=\max\{X,Y\}$的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2(z-a)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

基础习题精练

习题

3.1 设二维随机变量(X_1, Y_1)和(X_2, Y_2)的概率密度分别为$f_1(x, y)$与$f_2(x, y)$，令

$$f(x, y)=af_1(x, y)+bf_2(x, y),$$

若$f(x, y)$是某二维连续型随机变量的概率密度，则a, b满足条件（　　）.

(A) $a+b=1$　　(B) $a>0$且$b>0$

(C) $0\leqslant a\leqslant 1, 0\leqslant b\leqslant 1$　　(D) $a\geqslant 0, b\geqslant 0$且$a+b=1$

3.2 设随机变量X, Y相互独立，且均服从标准正态分布$N(0, 1)$，则（　　）.

(A) $P\{X+Y\geqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$　　(B) $P\{X-Y\geqslant 1\}=\dfrac{1}{2}$

(C) $P\{\max\{X, Y\}\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$　　(D) $P\{\min\{X, Y\}\geqslant 0\}=\dfrac{1}{4}$

3.3 设随机变量X和Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则$Z=\max\{X, Y\}$的分布函数为（　　）.

(A) $F^2(z)$　　(B) $F(x)F(y)$　　(C) $1-[1-F(z)]^2$　　(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

3.4 如果二维随机变量(X, Y)的分布函数为

$$F(x, y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda_1 x}-e^{-\lambda_2 y}+e^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x, y\}}, & x>0, y>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_{12}>0$，则$X$和$Y$的边缘分布函数分别为______.

3.5 随机变量(X, Y)的概率密度

$$f(x, y)=\frac{1+\sin x\sin y}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}(-\infty<x, y<+\infty)$$

的两个边缘概率密度$f_1(x)$, $f_2(y)$分别为______.

3.6 设随机变量X_1, X_2, X_3, X_4相互独立且同分布，$P\{X_i=0\}=0.6$, $P\{X_i=1\}=0.4$, $i=1, 2, 3, 4$,

则行列式 $X=\begin{vmatrix} X_1 & X_2 \\ X_3 & X_4 \end{vmatrix}$ 的概率分布为______.

3.7 设 X 与 Y 相互独立，下表是随机变量 X 与 Y 的联合分布律以及两个边缘分布律中的部分数值，试将其余数值填入表中空白处 .

$X \backslash Y$	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1		$\frac{1}{8}$		
x_2	$\frac{1}{8}$			
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$			1

3.8 袋中有编号为 1，1，2，3 的四个球，现从中无放回地取两次，每次任取一个，设 X_1，X_2 分别为第一次、第二次取到的球的号码，求：

(1) (X_1, X_2) 的分布律，并判断 X_1 与 X_2 的独立性；

(2) 在 $X_2=2$ 的条件下，X_1 的条件分布；

(3) 随机变量 $Y=X_1X_2$ 的分布 .

3.9 已知 (X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	1
-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$
1	0	$\frac{1}{6}$

(1) 求 $Z=X-Y$ 的概率分布；

(2) 设 $U_1=XY, V_1=\frac{X}{Y}$，求 (U_1, V_1) 的概率分布；

(3) 设 $U_2=\max\{X, Y\}, V_2=\min\{X, Y\}$，求 (U_2, V_2) 的概率分布，U_2V_2 的概率分布 .

3.10 求以下给出的 (X, Y) 的概率密度的边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$：

(1) $f_1(x, y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y, \\ 0, & 其他; \end{cases}$

(2) $f_2(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{5}{4}(x^2+y), & 0<y<1-x^2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

3.11　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}k, & 0<x^2<y<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求常数k；

(2) 求$P\left\{X>\dfrac{1}{2}\right\}$和$P\left\{Y<\dfrac{1}{2}\right\}$.

3.12　已知随机变量(X,Y)的概率密度

$$f(x,\ y)=\begin{cases}A\mathrm{e}^{-y}, & 0<x<y,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

求常数A，并计算概率$P\{X+Y\geqslant 1\}$，$P\left\{\dfrac{X}{Y}\leqslant\dfrac{1}{2}\right\}$.

3.13　已知随机变量X与Y相互独立，X服从参数为λ的指数分布，$P\{Y=-1\}=\dfrac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\dfrac{3}{4}$，求概率$P\{X-Y\leqslant 1\}$，$P\{XY\leqslant 2\}$.

3.14　设二维随机变量(X,Y)的概率密度为

$$f(x,\ y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1,\ 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

(1) 求$P\{X>2Y\}$；

(2) 求$Z=X+Y$的概率密度$f_Z(z)$.

3.15　设随机变量X,Y相互独立，且都服从指数分布，它们的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x\geqslant 0,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y}, & y\geqslant 0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求$Z=\dfrac{X}{Y}$的概率密度 .

3.16　设随机变量X,Y相互独立，且都在区间$[a,\ b]$上服从均匀分布，求$Z=\min\{X,\ Y\}$的概率密度 .

3.17　设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$. 在给定$X=i$的条件下，随机变量Y服从均匀分布$U(0,\ i)(i=1,\ 2)$. 求Y的分布函数$F_Y(y)$和概率密度$f_Y(y)$.

解答

3.1 (D) **解** 函数$f(x,y)$为某二维连续型随机变量的概率密度的充分必要条件是

$$f(x,y)\geqslant 0,\ \int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=1,$$

即同时有
$$f(x,y)=af_1(x,y)+bf_2(x,y)\geqslant 0,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=a\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x,y)\mathrm{d}y+b\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{+\infty}f_2(x,y)\mathrm{d}y=a+b=1,$$

故选择 (D).

3.2 (D) **解** 因为 X,Y 相互独立，且均服从标准正态分布 $N(0,1)$，所以 $U=X+Y\sim N(0,2)$, $V=X-Y\sim N(0,2)$，排除 (A)，(B). 又

$$P\{\max\{X,Y\}\geqslant 0\}=1-P\{\max\{X,Y\}<0\}=1-P\{X<0,Y<0\}=\frac{3}{4},$$

$$P\{\min\{X,Y\}\geqslant 0\}=P\{X\geqslant 0,Y\geqslant 0\}=\frac{1}{4},$$

故应选择 (D).

3.3 (A) **解** 由于X和Y独立同分布，且X的分布函数为$F(x)$，则Z的分布函数为

$$G(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\max\{X,Y\}\leqslant z\}=P\{X\leqslant z,Y\leqslant z\}=P\{X\leqslant z\}P\{Y\leqslant z\}=F^2(z),$$

故选择 (A).

3.4 $F_X(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他};\end{cases}$ $F_Y(y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$ **解** 因为

$$\lim_{y\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}+\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}})=1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x},$$

$$\lim_{x\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}+\mathrm{e}^{-\lambda_1 x-\lambda_2 y-\lambda_{12}\max\{x,y\}})=1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y},$$

所以X和Y的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, & x>0,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\lambda_2 y}, & y>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

3.5 $f_1(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$; $f_2(y)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}$ **解** 由边缘概率密度的公式，有

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}y=\frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y+\frac{\sin x}{2\pi}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\sin y\cdot\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}},$$

即$f_1(x)$是标准正态概率密度．由对称性知$f_2(y)$也是标准正态概率密度，所以$f_2(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{y^2}{2}}$．

3.6 $X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{pmatrix}$ **解** 因为$X=X_1X_4-X_2X_3$，所以X的可能取值为$-1,0,1$．

易知$Z_1=X_1X_4$与$Z_2=X_2X_3$独立同分布，且

$$P\{Z_1=1\}=P\{X_1=1,X_4=1\}=0.4^2=0.16,$$

$$P\{Z_1=0\}=1-P\{Z_1=1\}=0.84,$$

同理，得$P\{Z_2=1\}=0.16$，$P\{Z_2=0\}=0.84$．由此得

$$P\{X=-1\}=P\{Z_1=0,Z_2=1\}=P\{Z_1=0\}P\{Z_2=1\}=0.84\times0.16=0.1344,$$

$$P\{X=1\}=P\{Z_1=1,Z_2=0\}=P\{Z_1=1\}P\{Z_2=0\}=0.16\times0.84=0.1344,$$

$$P\{X=0\}=1-P\{X=-1\}-P\{X=1\}=1-2\times0.1344=0.7312.$$

所以X的概率分布为

$$X\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0.1344 & 0.7312 & 0.1344\end{pmatrix}.$$

3.7 **解** 由于X与Y相互独立，因此

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}P\{Y=y_j\}=p_{i\cdot}p_{\cdot j}\ (i=1,2;\ j=1,2,3).$$

由边缘分布的性质，有

$$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}=\sum_{j=1}^{3}p_{ij},\ p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}=\sum_{i=1}^{2}p_{ij},$$

于是

$$p_{11}=p_{\cdot1}-p_{21}=\frac{1}{6}-\frac{1}{8}=\frac{1}{24},$$

$$p_{1\cdot}=\frac{p_{11}}{p_{\cdot1}}=\frac{1}{24}\div\frac{1}{6}=\frac{1}{4},\ p_{2\cdot}=1-p_{1\cdot}=\frac{3}{4},$$

$$p_{\cdot2}=\frac{p_{12}}{p_{1\cdot}}=\frac{1}{8}\div\frac{1}{4}=\frac{1}{2},\ p_{\cdot3}=1-p_{\cdot1}-p_{\cdot2}=\frac{1}{3},$$

$$p_{22}=p_{2\cdot}p_{\cdot2}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{8},\ p_{13}=p_{1\cdot}p_{\cdot3}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

$$p_{23}=p_{2\cdot}p_{\cdot3}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

因此所得数值填空如下表：

X \ Y	y_1	y_2	y_3	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\mathbf{\frac{1}{24}}$	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{1}{12}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$
x_2	$\frac{1}{8}$	$\mathbf{\frac{3}{8}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{3}{4}}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{1}{6}$	$\mathbf{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	1

3.8 解 (1) X_1与X_2的可能取值为1, 2, 3，则

$$p_{11}=P\{X_1=1,\ X_2=1\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ p_{12}=P\{X_1=1,\ X_2=2\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{13}=P\{X_1=1,\ X_2=3\}=\frac{2}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6},\ p_{21}=P\{X_1=2,\ X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{22}=0,\ p_{23}=P\{X_1=2,\ X_2=3\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\ p_{31}=P\{X_1=3,\ X_2=1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$p_{32}=P\{X_1=3,\ X_2=2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},\ p_{33}=0\ .$$

于是(X_1,X_2)的分布律为

X_1 \ X_2	1	2	3	$p_{i\cdot}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

因为$p_{11}\neq p_{\cdot 1}\cdot p_{1\cdot}$，所以$X_1$与$X_2$不相互独立．

(2) 由于

$$P\{X_1=1|X_2=2\}=\frac{p_{12}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}=\frac{2}{3},$$

$$P\{X_1=2|X_2=2\}=0,\ P\{X_1=3|X_2=2\}=\frac{p_{32}}{p_{\cdot 2}}=\frac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{4}}=\frac{1}{3},$$

因此在$X_2=2$的条件下，X_1的条件分布为$X_1\sim\begin{pmatrix}1 & 3\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

(3) $Y=X_1X_2$的可能取值为1, 2, 3, 6，于是

$$P\{Y=1\}=p_{11}=\frac{1}{6},\ P\{Y=2\}=p_{12}+p_{21}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Y=3\}=p_{13}+p_{31}=\frac{1}{3},\ P\{Y=6\}=p_{23}+p_{32}=\frac{1}{6}$$

从而有
$$Y\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 6\\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6}\end{pmatrix}.$$

3.9 解 由题设得

p_{ij}	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
(X,Y)	$(-1,-1)$	$(-1,1)$	$(0,-1)$	$(0,1)$	$(1,-1)$	$(1,1)$
$Z=X-Y$	0	-2	1	-1	2	0
$U_1=XY$	1	-1	0	0	-1	1
$V_1=X/Y$	1	-1	0	0	-1	1
$U_2=\max\{X,Y\}$	-1	1	0	1	1	1
$V_2=\min\{X,Y\}$	-1	-1	-1	0	-1	1
U_2V_2	1	-1	0	0	-1	1

(1) 由上表可得$Z=X-Y$的概率分布为

$Z=X-Y$	-2	-1	0	1
$P\{Z=k\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

(2) (U_1,V_1)的概率分布为

U_1 \ V_1	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	0	0
0	0	$\frac{1}{2}$	0
1	0	0	$\frac{1}{3}$

(3) (U_2, V_2)的概率分布为

U_2 \ V_2	-1	0	1
-1	$\frac{1}{6}$	0	0
0	$\frac{1}{3}$	0	0
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

U_2V_2的概率分布为

U_2V_2	-1	0	1
$P\{U_2V_2=k\}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

3.10 解 (1) 当$x>0$时，有$f_X(x)=\int_x^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\mathrm{e}^{-x}$，所以$X$的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-x}, & x>0,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

这是指数分布$E(1)$.

当$y>0$时，有$f_Y(y)=\int_0^y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{-y}$，所以$Y$的边缘概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}y\mathrm{e}^{-y}, & y>0,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

(2) 因为$f_2(x,y)$的非零区域如图3-5阴影部分所示，所以当$-1<x<1$时，有

$$f_X(x)=\int_0^{1-x^2}\frac{5}{4}(x^2+y)\mathrm{d}y=\frac{5}{4}x^2(1-x^2)+\frac{5}{8}(1-x^2)^2=\frac{5}{8}(1-x^4),$$

所以X的边缘概率密度为

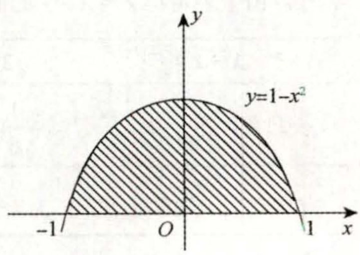


图 3-5

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{5}{8}(1-x^4), & -1<x<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

又因为当$0<y<1$时，有

$$f_Y(y)=\int_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}\frac{5}{4}(x^2+y)\mathrm{d}x=\frac{5}{12}x^3\Big|_{-\sqrt{1-y}}^{\sqrt{1-y}}+\frac{5}{2}y\sqrt{1-y}$$

$$=\frac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y),$$

所以 Y 的边缘概率密度为 $f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{5}{6}\sqrt{1-y}(1+2y), & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

3.11 解 (1) $f(x,y)$ 的非零区域如图 3-6(a) 阴影部分所示 .

由 $k\int_0^1 dx\int_{x^2}^x dy = k\int_0^1 (x-x^2)dx=\dfrac{k}{6}=1$，解得 $k=6$.

(2) $f(x,y)$ 的非零区域与 $x>\dfrac{1}{2}$ 的交集如图 3-6(b) 阴影部分所示，所以

$$P\left\{X>\frac{1}{2}\right\}=6\int_{\frac{1}{2}}^1 dx\int_{x^2}^x dy=6\int_{\frac{1}{2}}^1 (x-x^2)dx=6\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^1=\frac{1}{2}.$$

又因为 $f(x,y)$ 的非零区域与 $y<\dfrac{1}{2}$ 的交集如图 3-6(c) 阴影部分所示，所以

$$P\left\{Y<\frac{1}{2}\right\}=6\int_0^{\frac{1}{2}} dy\int_y^{\sqrt{y}} dx=6\int_0^{\frac{1}{2}}(\sqrt{y}-y)dy=\sqrt{2}-\frac{3}{4}.$$

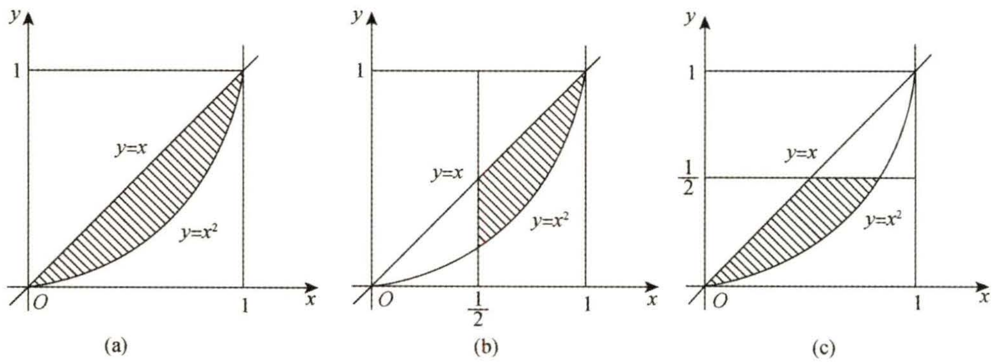


图 3-6

3.12 解 由于

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}dx\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\int_0^{+\infty}dx\int_x^{+\infty}Ae^{-y}dy=A\int_0^{+\infty}e^{-x}dx=A,$$

因此 $A=1$.

$$P\{X+Y\geqslant 1\}=1-P\{X+Y<1\}=1-\iint\limits_{x+y<1}f(x,y)dxdy$$

$$=1-\int_0^{\frac{1}{2}}dx\int_x^{1-x}e^{-y}dy=1-\int_0^{\frac{1}{2}}(e^{-x}-e^{x-1})dx$$

$$=1-\left(1+e^{-1}-2e^{-\frac{1}{2}}\right)=2e^{-\frac{1}{2}}-e^{-1},$$

积分区域如图 3-7 中阴影部分所示 .

$$P\left\{\frac{X}{Y}\leqslant\frac{1}{2}\right\}=\iint\limits_{\frac{x}{y}\leqslant\frac{1}{2}}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_{2x}^{+\infty}\mathrm{e}^{-y}\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

积分区域如图 3-8 中阴影部分所示 .

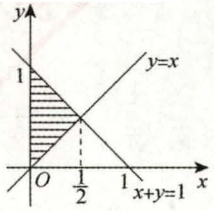


图 3-7

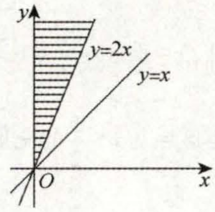


图 3-8

3.13 解 由于 Y 是离散型随机变量，X 与 Y 相互独立，因此计算与 X，Y 有关的事件 A 的概率时，自然想到将 A 对 Y 的可能值作全集分解，应用全概率公式计算 $P(A)$.

已知 $X\sim f(x)=\begin{cases}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\leqslant 0,\end{cases}$ $P\{Y=-1\}=\frac{1}{4}$，$P\{Y=1\}=\frac{3}{4}$，X 与 Y 独立，所以由全概率公式得

$$\begin{aligned}P\{X-Y\leqslant 1\}&=P\{X-Y\leqslant 1,\ Y=1\}+P\{X-Y\leqslant 1,\ Y=-1\}\\&=P\{X-1\leqslant 1,\ Y=1\}+P\{X+1\leqslant 1,\ Y=-1\}\\&=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 2\}+P\{Y=-1\}P\{X\leqslant 0\}\\&=\frac{3}{4}\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=\frac{3}{4}(1-\mathrm{e}^{-2\lambda}),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P\{XY\leqslant 2\}&=P\{XY\leqslant 2,\ Y=1\}+P\{XY\leqslant 2,\ Y=-1\}\\&=P\{X\leqslant 2,\ Y=1\}+P\{-X\leqslant 2,\ Y=-1\}\\&=P\{Y=1\}P\{X\leqslant 2\}+P\{Y=-1\}P\{X\geqslant -2\}\\&=\frac{3}{4}\int_0^2\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x+\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}\mathrm{d}x=1-\frac{3}{4}\mathrm{e}^{-2\lambda}.\end{aligned}$$

3.14 解 (1) $P\{X>2Y\}=\iint\limits_{x>2y}f(x,\ y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(x-\frac{5}{8}x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{7}{24}$.

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,\ z-x)\mathrm{d}x$，其中

$$f(x,\ z-x)=\begin{cases}2-x-(z-x), & 0<x<1,\ 0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他}\end{cases}=\begin{cases}2-z, & 0<x<1,\ 0<z-x<1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $z\leqslant 0$ 或 $z\geqslant 2$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $0<z<1$ 时，$f_Z(z)=\int_0^z(2-z)\mathrm{d}x=z(2-z)$；

当 $1\leqslant z<2$ 时，$f_Z(z)=\int_{z-1}^1(2-z)\mathrm{d}x=(2-z)^2$.

所以 Z 的概率密度为
$$f_Z(z)=\begin{cases} z(2-z), & 0<z<1, \\ (2-z)^2, & 1\leqslant z<2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

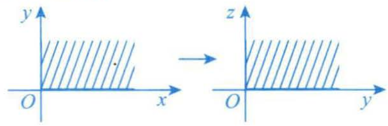
3.15 解 由于 X,Y 相互独立，(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)=\begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}, & x\geqslant 0,\ y\geqslant 0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

用卷积公式"三部曲"：

①换字母. $yz\geqslant 0,\ y\geqslant 0 \Rightarrow y\geqslant 0,\ z\geqslant 0$.

②换区域.



用卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)\mathrm{d}y,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\ .$$

当 $z\leqslant 0$ 时，$f_Z(z)=0$；

当 $z>0$ 时，

$$f_Z(z)=\int_0^{+\infty} y\cdot\lambda^2 e^{-\lambda(yz+y)}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{(1+z)^2}\int_0^{+\infty}\lambda(1+z)ye^{-\lambda(1+z)y}\mathrm{d}[\lambda(1+z)y]$$

$$\xlongequal{t=\lambda(1+z)y}\frac{1}{(1+z)^2}\int_0^{+\infty}te^{-t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{(1+z)^2}\ .$$

③背口诀.
求z不积z
不积先定限
限内画条线
先交写下限
后交写上限

因此 $Z=\dfrac{X}{Y}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases} \dfrac{1}{(1+z)^2}, & z>0, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

3.16 解 由例 3.11 可知 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)^2}, & a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

又由 (X,Y) 的取值区域 $\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant y\leqslant b\}$，可知 $Z=\min\{X,Y\}$ 的取值区间为 $[a,b]$.

当 $z<a$ 或 $z>b$ 时，有 $f_Z(z)=0$.

当 $a\leqslant z\leqslant b$ 时，有

$$F_Z(z)=P\{Z\leqslant z\}=P\{\min\{X,Y\}\leqslant z\}=1-P\{X>z,Y>z\}$$

$$=1-\iint\limits_{x>z,y>z}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1-\int_z^b\mathrm{d}x\int_z^b\frac{1}{(b-a)^2}\mathrm{d}y$$

$$=1-\frac{(b-z)^2}{(b-a)^2},$$

所以

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{2(b-z)}{(b-a)^2}.$$

综上，$Z=\min\{X,Y\}$ 的概率密度为

$$f_Z(z)=\begin{cases}\dfrac{2(b-z)}{(b-a)^2}, & a\leqslant z\leqslant b,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

3.17 解 $F_Y(y)=P\{Y\leqslant y\}=P\{X=1\}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+P\{X=2\}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}$

$$=\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\leqslant y\mid X=2\}.$$

当$y<0$时，$F_Y(y)=0$；当$0\leqslant y<1$时，$F_Y(y)=\frac{3y}{4}$；当$1\leqslant y<2$时，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{y}{4}$；当$y\geqslant 2$时，$F_Y(y)=1$.

所以随机变量Y的分布函数为$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0,\\ \dfrac{3y}{4}, & 0\leqslant y<1,\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{y}{4}, & 1\leqslant y<2,\\ 1, & y\geqslant 2.\end{cases}$概率密度为$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{3}{4}, & 0<y<1,\\ \dfrac{1}{4}, & 1<y<2,\\ 0, & 其他.\end{cases}$

第4讲　随机变量的数字特征

基础知识结构

- 一维随机变量的数字特征
  - 数学期望
    - 概念
    - 性质
  - 方差、标准差
    - 概念
    - 性质
- 二维随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 协方差与相关系数
    - 概念
    - 性质
- 独立性与不相关性的判定、切比雪夫不等式
  - 用分布判定独立性
  - 用数字特征判定不相关性
  - 切比雪夫不等式

基础内容精讲

一、一维随机变量的数字特征

（一）随机变量的数学期望

1. 概念

设X是随机变量，Y是X的函数，$Y=g(X)$（g为连续函数）.

(1) 如果X是离散型随机变量，其分布列为$p_i=P\{X=x_i\}(i=1,2,\cdots)$．若级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$绝对收敛，则

称随机变量X的数学期望存在，并将级数$\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i$的和称为随机变量$X$的**数学期望**，记为$E(X)$或$EX$，即

$$EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_i p_i,$$

否则称X的数学期望不存在.

若级数$\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$绝对收敛，则称$Y=g(X)$的数学期望$E[g(X)]$存在，且$E[g(X)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$，否则称$g(X)$的数学期望不存在.

(2) 如果X是连续型随机变量，其概率密度为$f(x)$. 若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则称$X$的数学期望存在，且$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x$，否则称$X$的数学期望不存在.

若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$绝对收敛，则称$g(X)$的数学期望存在，且$E[g(X)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)\mathrm{d}x$，否则称$g(X)$的数学期望不存在.

【注】(1) 数学期望又称为概率平均值，常常简称期望或均值. 数学期望是描述随机变量平均取值状况特征的指标，它刻画随机变量的一切可能值的集中位置.

(2) 在数学期望的定义中要求级数（或积分）绝对收敛，否则称期望不存在.

2. 性质

①$Ea=a$，$E(EX)=EX$.

无条件打开

②$E(aX+bY)=aEX+bEY$，$E\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_iEX_i$.

③若X，Y相互独立，则$E(XY)=EXEY$.

（二）随机变量的方差、标准差

1. 概念

设X是随机变量，如果$E[(X-EX)^2]$存在，则称$E[(X-EX)^2]$为X的方差，记为DX，即

$$DX=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2.$$

称$\sqrt{DX}$为X的标准差或均方差，记为$\sigma(X)$，称随机变量$X^*=\dfrac{X-EX}{\sqrt{DX}}$为$X$的标准化随机变量，此时$EX^*=0$，$DX^*=1$.

2. 性质

①$DX\geqslant 0$，$E(X^2)=DX+(EX)^2\geqslant(EX)^2$.

②$Dc=0$（c为常数）.

$DX=0 \Leftrightarrow X$几乎处处为某个常数a，即$P\{X=a\}=1$.

③$D(aX+b)=a^2DX$.

④$D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2\mathrm{Cov}(X,Y)$，$D\left(\sum\limits_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2DX_i+2\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}a_ia_j\mathrm{Cov}(X_i,X_j)$.

⑤如果X与Y相互独立，则

$$D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY,$$

$$D(XY)=DXDY+DX(EY)^2+DY(EX)^2\geqslant DXDY .$$

【注】证明 因为X,Y相互独立，故X^2，Y^2也相互独立，即有

$$E(XY)=EXEY,$$

$$E(X^2Y^2)=E(X^2)E(Y^2),$$

$$\begin{aligned}D(XY)&=E(X^2Y^2)-[E(XY)]^2=E(X^2)E(Y^2)-(EX)^2(EY)^2\\&=[DX+(EX)^2][DY+(EY)^2]-(EX)^2(EY)^2\\&=DXDY+(EX)^2DY+(EY)^2DX .\end{aligned}$$

又$(EX)^2DY+(EY)^2DX\geqslant 0$，所以$D(XY)\geqslant DXDY$.

一般地，如果X_1，X_2，…，X_n相互独立，$g_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$为x的连续函数，则

$$D\left(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i\right)=\sum_{i=1}^{n}a_i^2DX_i,$$

$$D\left[\sum_{i=1}^{n}g_i(X_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}D[g_i(X_i)] .$$

⑥对任意常数c，有$DX=E[(X-EX)^2]\leqslant E[(X-c)^2]$.

【注】证明

$$\begin{aligned}E[(X-c)^2]&=E(X^2-2cX+c^2)\\&=E(X^2)-2cEX+c^2\\&\xlongequal{令}g(c) .\end{aligned}$$

由

$$g'(c)=-2EX+2c\xlongequal{令}0,$$

得$c=EX$，又$g''(c)=2>0$，故$c=EX$是$g(c)$的最小值点 .

我们将常用分布的数学期望和方差列表如下 .

分布	分布列p_k或概率密度$f(x)$	数学期望	方差
0—1分布	$P\{X=k\}=p^k(1-p)^{1-k}$, $k=0,1$	p	$p(1-p)$
二项分布$B(n,p)$	$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,\cdots,n$	np	$np(1-p)$
泊松分布$P(\lambda)$	$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k=0,1,\cdots$	λ	λ
几何分布$G(p)$	$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$, $k=1,2,\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
正态分布$N(\mu,\sigma^2)$	$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$, $-\infty<x<+\infty$	μ	σ^2
均匀分布$U(a,b)$	$f(x)=\frac{1}{b-a}$, $a<x<b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布$E(\lambda)$	$f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

注：表中仅列出各分布概率密度的非零区域．

例 4.1 设一次试验成功的概率为p，进行100次独立重复试验，则成功次数的标准差的最大值为______.

解 应填5.

设成功次数为X，则$X\sim B(100,p)$，X的标准差为$\sqrt{DX}=\sqrt{100p(1-p)}$．

由于$p(1-p)\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当$p=\frac{1}{2}$时等号成立，故当$p=\frac{1}{2}$时成功次数的标准差最大，且其最大值为$\sqrt{100\times\frac{1}{4}}=5$．

例 4.2 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}, & 0\leqslant x<\pi,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

对X独立观察4次，用Y表示观察值大于$\frac{\pi}{3}$的次数，求Y^2的数学期望．

解 由题意知$P\left\{X>\frac{\pi}{3}\right\}=\int_{\frac{\pi}{3}}^{+\infty}f(x)dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\pi}\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}dx=\frac{1}{2}$，所以$Y\sim B\left(4,\frac{1}{2}\right)$，于是

$$EY=4\times\frac{1}{2}=2,\ DY=4\times\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)=1,$$

所以 $$E(Y^2)=DY+(EY)^2=1+4=5\ .$$

例 4.3 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty),$$

则EX（　　）.

(A) 等于 0　　(B) 等于 1　　(C) 等于 π　　(D) 不存在

解 应选 (D).

由连续型随机变量数学期望的定义，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\pi(1+x^2)}\mathrm{d}x=\frac{1}{2\pi}\ln(1+x^2)\Big|_{-\infty}^{+\infty},$$

由于该积分发散，因此EX不存在，故选择 (D).

例 4.4 设连续型随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}(-\infty<x<+\infty),$$

则$EX\cdot\sqrt{DX}=$______.

解 应填$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

由 $$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}\right\},$$

知$EX=1$, $\sqrt{DX}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，故$EX\cdot\sqrt{DX}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

例 4.5 设随机变量X的概率分布为$P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}$, $k=0, 1, 2, \cdots$，则$E(|X-EX|)=$______.

解 应填$\dfrac{2}{\mathrm{e}}$.

利用性质$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=1$.因为$\sum\limits_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{C}{k!}=C\mathrm{e}=1$，所以$C=\mathrm{e}^{-1}$.可知随机变量X服从参数为 1 的泊松分布 . 于是

$$EX=1,\ E(X-EX)=E(X-1)=EX-1=0\ ,$$

而 $$\begin{aligned}E(|X-EX|)&=E(|X-1|)\\&=P\{X=0\}\cdot|0-1|+\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}\cdot|k-1|\end{aligned}$$

$$=\frac{e^{-1}}{0!}+\sum_{k=1}^{\infty}P\{X=k\}\cdot(k-1)$$

$$=\frac{1}{e}+\left[\sum_{k=0}^{\infty}P\{X=k\}\cdot(k-1)-P\{X=0\}\cdot(0-1)\right]$$

$$=\frac{1}{e}+\left(0+\frac{1}{e}\right)$$

$$=\frac{2}{e}.$$

【注】由泊松分布的分布列 $P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k=0,1,2,\cdots$，与本题给出的分布列 $P\{X=k\}=\frac{C}{k!}, k=0,1,2,\cdots$，比较可以看出题目中的随机变量 X 就是服从参数 $\lambda=1$ 的泊松分布．

例 4.6 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0<x<2,\\ 0, & \text{其他,}\end{cases}$ $F(x)$ 为 X 的分布函数，EX 为 X 的数学期望，则 $P\{F(X)>EX-1\}=$______.

解 应填 $\frac{2}{3}$．

令 $Y=F(X)$，因为 $F(x)$ 严格单调增加，所以 $Y\sim U(0,1)$，又 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3}$，则

由例2.15可得

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\left\{Y>\frac{1}{3}\right\}=\frac{2}{3}.$$

【注】本题若考生不知例 2.15 的结论，则可这样做．

由题意知，

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2\frac{x^2}{2}dx=\frac{4}{3}.$$

由 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$，得

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \frac{x^2}{4}, & 0\leqslant x<2,\\ 1, & x\geqslant 2.\end{cases}$$

从而，

$$P\{F(X)>EX-1\}=P\{F(X)>EX-1, X<0\}+P\{F(X)>EX-1, 0\leqslant X<2\}+$$

$$P\{F(X)>EX-1,\ X\geqslant 2\}=P\left\{\frac{X^2}{4}>\frac{1}{3},\ 0\leqslant X<2\right\}$$

$$=P\left\{\frac{2}{\sqrt{3}}<X<2\right\}=\int_{\frac{2}{\sqrt{3}}}^{2}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{2}{3}.$$

显然这解法比较复杂．

二、二维随机变量的数字特征

(一) 二维随机变量函数的数学期望

设X, Y为随机变量，$g(X,Y)$为X, Y的函数（g是连续函数）.

(1) 如果(X,Y)为离散型随机变量，其联合分布律为

$$p_{ij}=P\{X=x_i,Y=y_j\}(i,\ j=1,2,\cdots),$$

若级数$\sum\limits_i\sum\limits_j g(x_i,y_j)p_{ij}$绝对收敛，则定义

$$E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}.$$

(2) 如果(X,Y)为连续型随机变量，其概率密度为$f(x,y)$，若积分$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$绝对收敛，则定义

$$E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(二) 两个随机变量的协方差与相关系数

1. 概念

如果随机变量X与Y的方差存在且$DX>0$, $DY>0$，则称$E[(X-EX)(Y-EY)]$为随机变量X与Y的协方差，并记为$\mathrm{Cov}(X,Y)$，即

$$\mathrm{Cov}(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EX\cdot EY,$$

其中

$$E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jP\{X=x_i,Y=y_j\}\ (\text{离散型}),\\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ (\text{连续型}).\end{cases}$$

称$\rho_{XY}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}$为随机变量$X$与$Y$的相关系数．如果$\rho_{XY}=0$，则称$X$与$Y$**不相关**；如果$\rho_{XY}\neq 0$，则称$X$与$Y$**相关**．

【注】(1) 协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是描述随机变量 X 与 Y 之间偏差的关联程度的，比如研究父亲身高 X 与孩子身高 Y 之间的偏差程度，便可用 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 来刻画．相关系数 ρ_{XY} 描述随机变量 X 与 Y 之间的线性相依性，$|\rho_{XY}|$ 是刻画 X 与 Y 之间线性相关程度的一种度量．$\rho_{XY}=0$ 表示 X 与 Y 之间不存在线性关系，故称 X 与 Y 不相关，但这并不意味着 X 与 Y 之间不存在相依关系，它们之间还可能存在某种非线性关系．

如 $X\sim U(-1,1)$，$Y=\cos X$，则

$$EX=0,\ E(XY)=E(X\cos X)=\int_{-1}^{1}x\cos x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x=0.$$

故 $\rho_{XY}=0$，说明 X 与 Y 之间没有线性关系，但它们有函数关系．

(2) 随机变量的矩．

设 (X,Y) 是二维随机变量．如果 $E(X^kY^l)$ 存在，则称 $E(X^k)(k=1,2,\cdots)$ 为 X 的 k 阶原点矩；称 $E[(X-EX)^k](k=2,3,\cdots)$ 为 X 的 k 阶中心矩；称 $E(X^kY^l)(k,l=1,2,\cdots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩；称 $E[(X-EX)^k(Y-EY)^l](k,l=1,2,\cdots)$ 为 X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩．

从上述定义看出：数学期望 EX 是 X 的一阶原点矩，方差 DX 是 X 的二阶中心矩，协方差 $\mathrm{Cov}(X,Y)$ 是 X 与 Y 的二阶混合中心矩．

2. 性质

① $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{Cov}(Y,X)$．

② $\mathrm{Cov}(aX,bY)=ab\mathrm{Cov}(X,Y)$．

③ $\mathrm{Cov}(X_1+X_2,Y)=\mathrm{Cov}(X_1,Y)+\mathrm{Cov}(X_2,Y)$．

④ $|\rho_{XY}|\leqslant 1$．

⑤ $\rho_{XY}=1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a>0)$．

$\rho_{XY}=-1\Leftrightarrow P\{Y=aX+b\}=1(a<0)$．

【注】$Y=aX+b$，$a>0\Rightarrow\rho_{XY}=1$．

$Y=aX+b$，$a<0\Rightarrow\rho_{XY}=-1$．

例 4.7 设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Y	-1	0	1
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

且 $P\{X^2=Y^2\}=1$．

(1) 求随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(2) 求 $Z=XY$ 的概率分布；

(3) 求 X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY} .

解 (1) 由 $P\{X^2=Y^2\}=1$ ，知 $P\{X^2\neq Y^2\}=0$ ，即

$$P\{X=0, Y=-1\}=P\{X=0, Y=1\}=P\{X=1, Y=0\}=0,$$

从而有

$$P\{X=0, Y=0\}=P\{X=0\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1, Y=-1\}=P\{Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{3},$$

因此，(X, Y) 的概率分布为

$X \backslash Y$	-1	0	1	$p_{i\cdot}$
0	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

(2) $Z=XY$ 的可能取值为 $-1, 0, 1$.

$$P\{Z=-1\}=P\{X=1, Y=-1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=1, Y=1\}=\frac{1}{3},$$

$$P\{Z=0\}=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3},$$

所以

$$Z\sim\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}.$$

(3) 由于

$$EX=0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}, E(X^2)=\frac{2}{3}, DX=\frac{2}{3}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{2}{9},$$

$$EY=-1\times\frac{1}{3}+0\times\frac{1}{3}+1\times\frac{1}{3}=0, E(Y^2)=\frac{2}{3}, DY=\frac{2}{3},$$

$$E(XY)=-1\times1\times\frac{1}{3}+1\times1\times\frac{1}{3}=0,$$

因此

$$\rho_{XY}=\frac{E(XY)-EXEY}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=0.$$

例 4.8 甲、乙两人相约于某地在12:00~13:00会面，设X,Y分别是甲、乙到达超过12:00的时间(单位：小时)，且假设X和Y相互独立，已知X,Y的概率密度分别为

$$f_X(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}\quad f_Y(y)=\begin{cases}2y, & 0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

求先到达者需要等待的时间的数学期望.

解 由题意可得
$$f(x,y)=\begin{cases}6x^2y, & 0<x<1,0<y<1,\\ 0, & 其他.\end{cases}$$

根据题意可知，所求即为$|X-Y|$的数学期望，如图4-1所示，有

$$\begin{aligned}E(|X-Y|)&=\int_0^1\int_0^1|x-y|6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\iint\limits_{D_1}[-(x-y)6x^2y]\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}(x-y)6x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{1}{4}\ (小时).\end{aligned}$$

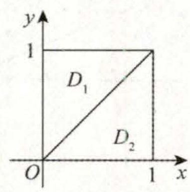


图 4-1

三、独立性与不相关性的判定、切比雪夫不等式

1. 独立性与不相关性的判定

(1) 随机变量X与Y相互独立，意指对任意实数x,y，事件$\{X\leqslant x\}$与$\{Y\leqslant y\}$相互独立，即(X,Y)的分布等于边缘分布相乘：$F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$.

若(X,Y)是离散型的，则X与Y独立的充要条件是

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\};$$

若(X,Y)是连续型的，则X与Y独立的充要条件是

$$f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y).$$

一般通过分布判定独立性.

(2) 随机变量X与Y不相关，意指X与Y之间不存在线性相依性，即$\rho_{XY}=0$，其充要条件是

$$\rho_{XY}=0\Leftrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y)=0\Leftrightarrow E(XY)=EX\cdot EY\Leftrightarrow D(X\pm Y)=DX+DY.$$

一般通过数字特征判定不相关性.

(3) 几个重要结论:

①如果X与Y独立，则X, Y不相关，反之不然；

②如果(X, Y)服从二维正态分布，则X, Y独立$\Leftrightarrow X$, Y不相关；

③由①知，如果X与Y相关，则X, Y不独立.

综上所述，我们在讨论随机变量X与Y的不相关性、独立性时，总是先计算$\mathrm{Cov}(X, Y)$，而后按下列程序进行判断或再计算:

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-EXEY\begin{cases}\neq 0 \Leftrightarrow X\text{与}Y\text{相关}\Rightarrow X\text{与}Y\text{不独立},\\ =0 \Leftrightarrow X\text{与}Y\text{不相关，通过分布推断}\begin{cases}X, Y\text{独立},\\ X, Y\text{不独立}.\end{cases}\end{cases}$$

【注】上述讨论均假设方差存在且不为零.

2. 切比雪夫不等式

如果随机变量X的期望EX和方差DX存在，则对任意$\varepsilon>0$，有

$$P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\frac{DX}{\varepsilon^2}\text{或}P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

【注】由切比雪夫不等式知，当DX愈小时，概率$P\{|X-EX|<\varepsilon\}$愈大，这表明方差是刻画随机变量与其期望值偏离程度的量，是描述随机变量X“分散程度”特征的指标.

例 4.9 设随机变量(X, Y)服从二维正态分布，则随机变量$U=X+Y$, $V=X-Y$不相关的充分必要条件为(　　).

(A) $EX=EY$　　　　(B) $E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$

(C) $E(X^2)=E(Y^2)$　　　　(D) $E(X^2)+(EX)^2=E(Y^2)+(EY)^2$

解 应选(B).

随机变量U, V不相关的充分必要条件是协方差$\mathrm{Cov}(U, V)=0$，由

$$E(UV)=E(X^2)-E(Y^2),\ EU=EX+EY,\ EV=EX-EY,$$

得
$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(U, V)&=E(UV)-EUEV=E(X^2)-E(Y^2)-(EX+EY)(EX-EY)\\&=E(X^2)-(EX)^2-[E(Y^2)-(EY)^2],\end{aligned}$$

因此，随机变量U, V不相关的充分必要条件为$E(X^2)-(EX)^2-[E(Y^2)-(EY)^2]=0$，即$E(X^2)-(EX)^2=E(Y^2)-(EY)^2$，故选择(B).

例 4.10 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|},\ x\in(-\infty, +\infty),$$

则(　　).

(A) X与$|X|$不相关，X与$|X|$不独立　　(B) X与$|X|$不相关，X与$|X|$独立

(C) X与$|X|$相关，X与$|X|$不独立　　(D) X与$|X|$相关，X与$|X|$独立

解　应选(A).

①由对称性，有

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=0,\ E(X|X|)=\int_{-\infty}^{+\infty}x|x|f(x)\mathrm{d}x=0,$$

因此，$\mathrm{Cov}(X,|X|)=E(X|X|)-EXE(|X|)=0$，知$X$与$|X|$不相关.

②由例3.6知，X与$|X|$不独立，故选(A).

例4.11　设X,Y为随机变量，数学期望都是2，方差分别为1和4，相关系数为0.5，则由切比雪夫不等式，$P\{|X-Y|\geqslant 6\}\leqslant$______.

解　应填$\dfrac{1}{12}$.

已知$EX=EY=2,\ DX=1,\ DY=4,\ \rho_{XY}=0.5=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}=\dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{2}$.记$U=X-Y$，则

$$EU=0,\ DU=D(X-Y)=DX+DY-2\mathrm{Cov}(X,Y)=1+4-2\times0.5\times2=3.$$

取$\varepsilon=6$，由切比雪夫不等式，得

$$P\{|X-Y|\geqslant 6\}\leqslant\frac{D(X-Y)}{6^2}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}.$$

基础习题精练

习题

4.1　已知连续型随机变量X与Y有相同的概率密度，且

$$X\sim f(x)=\begin{cases}2x\theta^2, & 0<x<\dfrac{1}{\theta},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}(\theta>0),\ E[a(X+2Y)]=\frac{1}{\theta},$$

则$a=$(　　).

(A) $\dfrac{2}{3}$　　(B) $\dfrac{1}{2}$　　(C) $\dfrac{1}{3}$　　(D) $\dfrac{1}{6}$

4.2　设随机变量(X,Y)服从二维正态分布，X与Y的期望值均为μ，方差均为σ^2，X,Y的相关系

数为$\rho_{XY}=0$，记$Z_1=2X+Y$，$Z_2=2X-Y$，则Z_1，Z_2的相关系数为（ ）.

(A)0　　(B) $\frac{3}{5}$　　(C) $\frac{3}{\sqrt{15}}$　　(D) $\frac{3}{\sqrt{10}}$

4.3 设二维随机变量(X,Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	2
−1	0.1	0.1	b
1	a	0.1	0.1

若事件$\{\max\{X,Y\}=2\}$与事件$\{\min\{X,Y\}=1\}$相互独立，则$\mathrm{Cov}(X,Y)=$（ ）.

(A)−0.6　　(B)−0.36　　(C)0　　(D)0.48

4.4 设随机变量X在$[-1,1]$上服从均匀分布，$Y=X^3$，则X与Y（ ）.

(A) 不相关且相互独立　　(B) 不相关且不相互独立

(C) 相关且相互独立　　(D) 相关且不相互独立

4.5 设随机变量X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<-1,\\ 0.2, & -1\leqslant x<0,\\ 0.8, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x\geqslant 1,\end{cases}$$

则$D(X^2)=$______.

4.6 设连续型随机变量X服从参数为1的指数分布，则$D(\mathrm{e}^{-2X})=$______.

4.7 已知连续型随机变量Y的概率密度为

$$f(y)=\begin{cases}\dfrac{y}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}, & y>0,\\ 0, & y\leqslant 0,\end{cases}\quad a>0,$$

则随机变量$Z=\dfrac{1}{Y}$的数学期望$EZ=$______.

4.8 设随机变量X服从参数为λ的泊松分布，且已知$E[(X-1)(X-2)]=1$，则$\lambda=$______.

4.9 已知随机变量$(X,Y)\sim N(0,0;1,1;0.5)$，$U=\max\{X,Y\}$，$V=\min\{X,Y\}$，则$E(U+V)=$______，$E(UV)=$______.

4.10 设X为随机变量，$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 0.9$，$DX=0.009$，用切比雪夫不等式估计$\varepsilon$的取值范围为______.

4.11 设一部机器一天内发生故障的概率为0.2，机器发生故障时，停止工作一天．若一周5个工作日里机器无故障可获利润10万元，发生一次故障仍可获利5万元，发生两次故障所获利润为零，发

生三次或三次以上故障亏损 2 万元，求一周内利润值的期望 .

4.12 设随机变量

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4}\end{pmatrix},\ Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix},$$

且 $\operatorname{Cov}(X,Y)=\frac{1}{8}$，求 X 与 Y 的联合分布律 .

4.13 设 A, B 为两个随机事件，且 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B\mid A)=\frac{1}{3}$，$P(A\mid B)=\frac{1}{2}$. 令

$$X=\begin{cases}1, & A\text{发生},\\ 0, & A\text{不发生},\end{cases}\quad Y=\begin{cases}1, & B\text{发生},\\ 0, & B\text{不发生},\end{cases}$$

求：(1) 二维随机变量 (X,Y) 的概率分布；

(2) X, Y 的相关系数 ρ_{XY}；

(3) $Z=X^2+Y^2$ 的概率分布 .

4.14 设连续型随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}(-\infty<x<+\infty),$$

求 $E(\min\{|X|,1\})$.

4.15 设 $X\sim N(0,\sigma^2)(\sigma>0)$, $Y=X^3$.

(1) 求 EY；

(2) 判断 X 与 Y 是否相关？是否独立？说明理由 .

解答

4.1 (B) **解** 由于 X 与 Y 有相同的概率密度，因此 $EX=EY$，于是

$$E[a(X+2Y)]=a(EX+2EY)=3aEX=3a\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=3a\int_0^{\frac{1}{\theta}}2x^2\theta^2\mathrm{d}x$$

$$=3a\cdot\frac{2}{3}x^3\theta^2\Big|_0^{\frac{1}{\theta}}=\frac{2a}{\theta}=\frac{1}{\theta},$$

解得 $a=\frac{1}{2}$，故选择 (B).

4.2 (B) **解** 利用已有的关系计算，不必从 (Z_1,Z_2) 的分布去考虑 .

由 $\rho_{XY}=0$，知 X 与 Y 不相关且相互独立 . 于是

$$DZ_1=4DX+DY=5\sigma^2,\ DZ_2=4DX+DY=5\sigma^2,$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)&=E[(2X+Y)(2X-Y)]-E(2X+Y)E(2X-Y)\\&=4E(X^2)-4(EX)^2-E(Y^2)+(EY)^2\\&=4DX-DY=3\sigma^2,\end{aligned}$$

因此，Z_1，Z_2的相关系数$\rho=\dfrac{\mathrm{Cov}(Z_1,Z_2)}{\sqrt{DZ_1}\sqrt{DZ_2}}=\dfrac{3}{5}$，故选择(B).

4.3 (B) **解** $P\{\max\{X,Y\}=2\}=P\{Y=2\}=b+0.1$，

$$P\{\min\{X,Y\}=1\}=P\{X=1,Y=1\}+P\{X=1,Y=2\}=0.2,$$

$$P\{\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=1\}=P\{X=1,Y=2\}=0.1,$$

由于事件$\{\max\{X,Y\}=2\}$与事件$\{\min\{X,Y\}=1\}$相互独立，从而有

$$P\{\max\{X,Y\}=2,\min\{X,Y\}=1\}=P\{\max\{X,Y\}=2\}P\{\min\{X,Y\}=1\},$$

即$0.1=(b+0.1)\times0.2$，解得$b=0.4$.

由分布律的性质知$0.1+0.1+b+a+0.1+0.1=1$，解得$a=0.2$.从而有

$$EX=-1\times(0.1+0.1+0.4)+1\times(0.2+0.1+0.1)=-0.2,$$

$$EY=0+1\times(0.1+0.1)+2\times(0.4+0.1)=1.2,$$

$$E(XY)=-1\times1\times0.1+1\times1\times0.1+(-1)\times2\times0.4+1\times2\times0.1=-0.6,$$

所以 $$\mathrm{Cov}(X,Y)=E(XY)-EXEY=-0.6-(-0.2)\times1.2=-0.36.$$

故选(B).

4.4 (D) **解** 显然，结论(C)对任意两个随机变量都不正确.又X与Y之间存在函数关系，因而不可能独立，结论(A)不正确.由题设，$EX=0$，$E(XY)=\int_{-1}^{1}x^4\cdot\frac{1}{2}\mathrm{d}x\neq0$，从而知$\mathrm{Cov}(X,Y)\neq0$，则$X$与$Y$必相关，也必不相互独立，故选择(D).

4.5 0.24 **解** 先求X的分布列，即有

$$X\sim\begin{pmatrix}-1&0&1\\0.2&0.6&0.2\end{pmatrix}.$$

因此

$$E(X^2)=(-1)^2\times0.2+0^2\times0.6+1^2\times0.2=0.4,$$

$$E(X^4)=(-1)^4\times0.2+0^4\times0.6+1^4\times0.2=0.4,$$

$$D(X^2)=E(X^4)-[E(X^2)]^2=0.4-0.4^2=0.24.$$

4.6 $\dfrac{4}{45}$ **解** 因为$E(\mathrm{e}^{-2X})=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-3x}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}$，且

$$E[(\mathrm{e}^{-2X})^2]=E(\mathrm{e}^{-4X})=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-4x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-5x}\mathrm{d}x=\frac{1}{5},$$

所以$D(\mathrm{e}^{-2X})=E[(\mathrm{e}^{-2X})^2]-[E(\mathrm{e}^{-2X})]^2=\frac{1}{5}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{45}$.

4.7 $\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}$ **解**

$$EZ=E\left(\frac{1}{Y}\right)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{y}\cdot f(y)\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2\pi}a}{2a^2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y=\frac{\sqrt{2\pi}}{2a}.$$

【注】上面是凑正态分布来处理$\int_0^{+\infty}\frac{1}{a^2}\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2a^2}}\mathrm{d}y$的，也可利用泊松积分$\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)$来完成.

4.8 1 **解** 由于随机变量X服从参数为λ的泊松分布，因此$EX=DX=\lambda$，从而有

$$E[(X-1)(X-2)]=E(X^2)-3EX+2=DX+(EX)^2-3EX+2=\lambda^2-2\lambda+2=1,$$

解得$\lambda=1$.

4.9 0; 0.5 **解** 由于

$$U=\max\{X,Y\}=\frac{1}{2}\left[(X+Y)+|X-Y|\right],$$

$$V=\min\{X,Y\}=\frac{1}{2}\left[(X+Y)-|X-Y|\right],$$

则

$$U+V=X+Y,\ UV=XY.$$

所以

$$E(U+V)=EX+EY=0.$$

$$E(UV)=E(XY)=\mathrm{Cov}(X,Y)+EXEY=0.5+0=0.5.$$

4.10 $\varepsilon\geqslant 0.3$ **解** 应用切比雪夫不等式$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$求解.由题设得

$$P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{0.009}{\varepsilon^2}\geqslant 0.9,$$

$$\varepsilon^2\geqslant 0.09,$$

$$\varepsilon\geqslant 0.3.$$

4.11 **解** 设一周内发生故障的次数为X，则$X\sim B(5,0.2)$，有

$$P\{X=0\}=\mathrm{C}_5^0\times 0.2^0\times 0.8^5=0.327\,68,$$

$$P\{X=1\}=\mathrm{C}_5^1\times 0.2\times 0.8^4=0.409\,6,$$

$$P\{X=2\}=\mathrm{C}_5^2\times 0.2^2\times 0.8^3=0.204\,8,$$

$$P\{X \geqslant 3\} = 1 - \sum_{k=0}^{2} P\{X = k\} = 0.057\,92 \ .$$

设一周内可获利润为Y万元，依题设有

$$Y = \begin{cases} 10, & X = 0, \\ 5, & X = 1, \\ 0, & X = 2, \\ -2, & X \geqslant 3, \end{cases}$$

所以

$$EY = 10 \times 0.327\,68 + 5 \times 0.409\,6 + 0 \times 0.204\,8 + (-2) \times 0.057\,92 = 5.208\,96 \text{（万元）}.$$

4.12 解 依题设，$EX = \dfrac{3}{4}$，$EY = \dfrac{1}{2}$，于是

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = E(XY) - EXEY = E(XY) - \frac{3}{8} = \frac{1}{8},$$

得$E(XY) = \dfrac{1}{2}$，即有

$$E(XY) = \frac{1}{2} = P\{X = 1, Y = 1\},$$

$$P\{X = 0, Y = 1\} = P\{Y = 1\} - P\{X = 1, Y = 1\} = 0,$$

$$P\{X = 0,\ Y = 0\} = P\{X = 0\} - P\{X = 0,\ Y = 1\} = \frac{1}{4},$$

$$P\{X = 1,\ Y = 0\} = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{4} \ .$$

因此，X与Y的联合分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

4.13 解 (1) (X, Y)的所有取值为$(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$，并有

$$P\{X = 0,\ Y = 0\} = P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A) - P(B) + P(AB),$$

其中，$P(AB) = P(A)P(B \mid A) = \dfrac{1}{12}$，$P(B) = \dfrac{P(AB)}{P(A \mid B)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{6}$，因此

$$P\{X=0, Y=0\}=1-\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=\frac{2}{3},$$

$$P\{X=0, Y=1\}=P(\overline{A}B)=P(B)-P(AB)=\frac{1}{6}-\frac{1}{12}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=1, Y=0\}=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=1, Y=1\}=P(AB)=\frac{1}{12},$$

从而(X, Y)的概率分布为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{1}{6}$	1

(2) 由X与Y的联合分布律，得X与Y的边缘分布律分别为

$$X\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}, Y\sim\begin{pmatrix}0 & 1\\ \frac{5}{6} & \frac{1}{6}\end{pmatrix},$$

从而
$$EX=\frac{1}{4}, E(X^2)=\frac{1}{4}, DX=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{3}{16},$$

$$EY=\frac{1}{6}, E(Y^2)=\frac{1}{6}, DY=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{36},$$

$$E(XY)=\frac{2}{3}\times0\times0+\frac{1}{12}\times0\times1+\frac{1}{6}\times1\times0+\frac{1}{12}\times1\times1=\frac{1}{12},$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y)=E(XY)-EXEY=\frac{1}{24},$$

因此
$$\rho_{XY}=\frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{1}{\sqrt{15}}=\frac{\sqrt{15}}{15}.$$

(3) $Z=X^2+Y^2$的可能取值为0, 1, 2，因此

$$P\{Z=0\}=P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Z=1\}=P\{X=0,Y=1\}+P\{X=1,Y=0\}=\frac{1}{4},$$

$$P\{Z=2\}=P\{X=1,Y=1\}=\frac{1}{12},$$

从而
$$Z\sim\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{12}\end{pmatrix}.$$

4.14 解 由对称性知，

$$\begin{aligned}E(\min\{|X|,1\})&=\int_{-\infty}^{+\infty}\min\{|x|,1\}f(x)\mathrm{d}x=2\int_{0}^{+\infty}\min\{x,1\}f(x)\mathrm{d}x\\&=2\left[\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{2}{\pi}\left(\int_0^1\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{\pi}\ln(1+x^2)\Big|_0^1+\frac{2}{\pi}\arctan x\Big|_1^{+\infty}\\&=\frac{1}{\pi}\ln 2+\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

4.15 解 (1) 已知X的概率密度$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}$，$f(x)$为$x$的偶函数，故

$$EY=E(X^3)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^3f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(2)
$$E(XY)=E(X^4)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^{+\infty}x^4\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sigma}\right)^2}\mathrm{d}x\neq 0,$$

故$EX\cdot EY\neq E(XY)$，故X与Y相关，从而可知X与Y不独立.

第5讲 大数定律与中心极限定理

基础知识结构

- 依概率收敛
- 大数定律
  - 切比雪夫大数定律
  - 伯努利大数定律
  - 辛钦大数定律
- 中心极限定理
  - 列维-林德伯格定理
  - 棣莫弗-拉普拉斯定理

基础内容精讲

一、依概率收敛

设随机变量X与随机变量序列$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$，如果对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|\geqslant\varepsilon\}=0\text{或}\lim_{n\to\infty}P\{|X_n-X|<\varepsilon\}=1,$$

则称随机变量序列$\{X_n\}$**依概率收敛于随机变量**X，记为

$$\lim_{n\to\infty}X_n=X(P)\text{或}X_n\xrightarrow{P}X(n\to\infty).$$

【注】(1) 以上定义中将随机变量X写成数a也成立．

(2) 设$X_n\xrightarrow{P}X$，$Y_n\xrightarrow{P}Y$，$g(x,y)$是二元连续函数，则$g(X_n,Y_n)\xrightarrow{P}g(X,Y)$．

一般地，对m元连续函数$g(x_1,x_2,\cdots,x_m)$，上述结论亦成立．

二、大数定律

定理1(切比雪夫大数定律)　假设$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$是相互独立的随机变量序列，如果方差DX_i $(i\geqslant1)$存在且一致有上界，即存在常数C，使$DX_i\leqslant C$对一切$i\geqslant1$均成立，则$\{X_n\}$服从大数定律：

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}EX_i .$$

定理2(伯努利大数定律)　假设μ_n是n重伯努利试验中事件A发生的次数，在每次试验中事件A发生的概率为$p(0<p<1)$，则$\frac{\mu_n}{n}\xrightarrow{P}p$，即对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{\mu_n}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1 .$$

【注】(仅数学三)在数理统计中，若$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$为总体样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的一个观测值，按大小顺序排列为$x_{(1)}\leqslant x_{(2)}\leqslant\cdots\leqslant x_{(n)}$．对任意实数$x$，称函数

$$F_n(x)=\frac{x_1,x_2,\cdots,x_n\text{中小于等于}x\text{的样本值个数}}{n}$$

$$=\begin{cases}0, & x<x_{(1)},\\ \dfrac{k}{n}, & x_{(k)}\leqslant x<x_{(k+1)}(k=1,2,\cdots,n-1),\\ 1, & x\geqslant x_{(n)}\end{cases}$$

为样本$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的**经验分布函数**．

这种考题是经常出现的，数学一和数学三均考过．

事实上，$F_n(x)$就是事件$\{X\leqslant x\}$在n次试验中出现的频率，而$P\{X\leqslant x\}=F(x)$是事件$\{X\leqslant x\}$出现的概率，由伯努利大数定律(即频率收敛于概率)可知，当n充分大时，$F_n(x)$可作为未知分布函数$F(x)$的一个近似，n越大，近似效果越好．

定理3(辛钦大数定律)　假设$\{X_n\}(n=1,2,\cdots)$是独立同分布的随机变量序列，如果数学期望$EX_i=\mu(i=1,2,\cdots)$存在，则$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\xrightarrow{P}\mu$，即对任意$\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1 .$$

【注】(仅数学一)在考查未知参数估计量是否具有一致性(相合性)时，常常要用到依概率收敛和大数定律．

例 5.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 是相互独立的随机变量序列，X_n 服从参数为 $n(n \geqslant 1)$ 的指数分布，则下列随机变量序列中不服从切比雪夫大数定律的是（　　）.

(A) $X_1, \frac{1}{2}X_2, \cdots, \frac{1}{n}X_n, \cdots$　　(B) $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$

(C) $X_1, 2X_2, \cdots, nX_n, \cdots$　　(D) $X_1, 2^2X_2, \cdots, n^2X_n, \cdots$

解　应选 (D).

切比雪夫大数定律要求 $\{X_n\}$ 相互独立，方差存在且一致有界，即 $DX_n \leqslant C$. 逐一验证各选项是否满足这一条件，从而确定正确选项 .

由题设知 $\{X_n\}$ 相互独立，且 $DX_n = \frac{1}{n^2} \leqslant 1$，所以选项 (B) 满足切比雪夫大数定律的条件 .

又

$$D\left(\frac{1}{n}X_n\right) = \frac{1}{n^2}DX_n = \frac{1}{n^4} \leqslant 1,\ D(nX_n) = n^2DX_n = 1 \leqslant 2,$$

由此可知，选项 (A)，(B)，(C) 均满足切比雪夫大数定律的条件，然而 $D(n^2X_n) = n^4DX_n = n^2$，选项 (D) 不满足切比雪夫大数定律的条件，故选择 (D).

例 5.2 （仅数学三）设 $(2, 1, 5, 2, 1, 3, 1)$ 是来自总体 X 的简单随机样本值，求总体 X 的经验分布函数 $F_7(x)$.

解　将各观测值按从小到大的顺序排列，得 1，1，1，2，2，3，5，则经验分布函数为

$$F_7(x) = \begin{cases} 0, & x < 1, \\ \frac{3}{7}, & 1 \leqslant x < 2, \\ \frac{5}{7}, & 2 \leqslant x < 3, \\ \frac{6}{7}, & 3 \leqslant x < 5, \\ 1, & x \geqslant 5. \end{cases}$$

例 5.3 设随机变量序列 $X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ 独立同分布，且 X_1 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则当 $n \to \infty$ 时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ 依概率收敛于（　　）.

(A) $\frac{1}{8}$　　(B) $\frac{1}{6}$　　(C) $\frac{1}{3}$　　(D) $\frac{1}{2}$

解　应选 (B).

$$E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} x^2(1-|x|)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 x^2(1-x)\mathrm{d}x = \frac{1}{6} .$$

依题意知随机变量序列$X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2, \cdots$独立同分布，从而由辛钦大数定律知，当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$依概率收敛于$E(X_1^2)$，即依概率收敛于$\frac{1}{6}$．故选(B).

三、中心极限定理

定理4(列维－林德伯格定理) 假设$\{X_n\}(n=1, 2, \cdots)$是独立同分布的随机变量序列，如果

$$EX_i=\mu,\ DX_i=\sigma^2>0(i=1, 2, \cdots)$$

存在，则对任意的实数x，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x)$$

【注】(1) 定理的三个条件“独立、同分布、期望和方差存在”，缺一不可．

(2) 只要X_n满足定理条件，那么当n很大时，独立同分布随机变量的和$\sum_{i=1}^{n}X_i$近似服从正态分布$N(n\mu, n\sigma^2)$，由此可知，当n很大时，有

$$P\left\{a<\sum_{i=1}^{n}X_i<b\right\}\approx\Phi\left(\frac{b-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n}\sigma}\right),$$

这常常是解题的依据．只要题目涉及独立同分布随机变量的和$\sum_{i=1}^{n}X_i$，我们就要考虑独立同分布中心极限定理．

定理5(棣莫弗－拉普拉斯定理) 假设随机变量$Y_n\sim B(n, p)(0<p<1, n\geqslant1)$，则对任意实数$x$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{Y_n-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\Phi(x).$$

【注】(1) 如果记$X_i\sim B(1, p)(0<p<1, i=1, 2, \cdots)$，即$X_i\sim\begin{pmatrix}1 & 0\\ p & 1-p\end{pmatrix}$且相互独立，则

$$Y_n=\sum_{i=1}^{n}X_i\sim B(n, p),$$

由列维－林德伯格定理推出棣莫弗－拉普拉斯定理．

(2) 二项分布概率计算的三种方法．

设$X\sim B(n, p)$．

①当 n 不太大时 ($n\leqslant 10$)，直接计算

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1,\cdots,n;$$

②当 n 较大且 p 较小时 ($n>10, p<0.1$)，$\lambda=np$ 适中，根据泊松定理有近似公式

$$P\{X=k\}=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}\approx\frac{\lambda^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda},\quad k=0,1,\cdots,n;$$

③当 n 较大而 p 不太大时 ($p<0.1, np\geqslant 10$)，根据中心极限定理，有近似公式

$$P\{a<X<b\}\approx\Phi\left(\frac{b-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)-\Phi\left(\frac{a-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right).$$

例 5.4 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，$S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$，则根据列维－林德伯格定理，当 n 充分大时，S_n 近似服从正态分布，只要 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ (　　).

(A) 有相同的期望和方差　　(B) 服从同一离散型分布

(C) 服从同一指数分布　　(D) 服从同一连续型分布

解 应选 (C).

列维－林德伯格定理的条件：随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 独立同分布，并且其数学期望和方差均存在．由于有相同的数学期望和方差未必服从相同的分布，可见选项 (A) 不满足定理条件．满足选项 (B) 和选项 (D) 的随机变量的数学期望或方差未必存在，故选项 (B) 和选项 (D) 也不满足定理条件．于是，只有选项 (C) 成立 (指数分布的数学期望和方差都存在).

例 5.5 设 X_n 表示将一枚硬币随意投掷 n 次出现“正面”的次数，则 (　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$　　(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-2n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

解 应选 (B).

由题设知 $X_n\sim B\left(n,\frac{1}{2}\right)$，根据棣莫弗－拉普拉斯定理，得

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{X_n-\frac{1}{2}n}{\sqrt{\frac{1}{4}n}}\leqslant x\right\}=\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{2X_n-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x),$$

故选择 (B).

例 5.6 生产线生产的产品成箱包装，每箱质量是随机的．假设平均每箱重 50 千克，标准差为 5 千克，若用载重为 5 吨的汽车承运，试用中心极限定理说明每辆汽车最多可以装多少箱，才能保证不

超载的概率大于 0.977. ($\Phi(2)=0.977$)

解 设 $X_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为“第 i 箱产品的质量(千克)”，由题意，X_i 独立同分布，且 $EX_i=50$，$\sqrt{DX_i}=5$，n 箱总质量为 $T_n=\sum_{i=1}^{n}X_i$，从而有

$$ET_n=50n,\ \sqrt{DT_n}=5\sqrt{n}.$$

由列维－林德伯格定理，知 $T_n \overset{\text{近似}}{\sim} N(50n,25n)$，因此有

$$P\{T_n\leqslant 5\,000\}=P\left\{\frac{T_n-50n}{5\sqrt{n}}\leqslant\frac{5\,000-50n}{5\sqrt{n}}\right\}\approx\Phi\left(\frac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}\right)>0.977,$$

即 $\dfrac{1\,000-10n}{\sqrt{n}}>2$，$n<98.019\,9$，所以每辆汽车最多可以装 98 箱，才能保证不超载的概率大于 0.977 .

基础习题精练

习 题

5.1 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$ 为独立同分布随机变量序列，且均服从参数为 $\lambda(\lambda>1)$ 的指数分布，记 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\lambda\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(B) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n\lambda}{\sqrt{\lambda n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(C) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\lambda\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

(D) $\lim\limits_{n\to\infty}P\left\{\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\lambda}{\sqrt{n\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$

5.2 设 $X_1,X_2,\cdots,X_{100}$ 为来自总体 X 的简单随机样本，其中 $P\{X=0\}=P\{X=1\}=\dfrac{1}{2}$. $\Phi(x)$ 表示标准正态分布函数，则利用中心极限定理可得 $P\left\{\sum\limits_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}$ 的近似值为(　　).

(A) $1-\Phi(1)$　　(B) $\Phi(1)$　　(C) $1-\Phi(0.2)$　　(D) $\Phi(0.2)$

5.3 设某种电气元件不能承受超负荷试验的概率为 0.05 . 现在对 100 个这样的元件进行超负荷试验，以 X 表示“不能承受试验而烧毁的元件数”，则根据中心极限定理，$P\{5\leqslant X\leqslant 10\}\approx$______.

($\Phi(2.29)=0.989$)

5.4 将一枚骰子重复掷n次，则当$n\to\infty$时，n次掷出点数的算术平均值$\overline{X}_n$依概率收敛于______.

5.5 假设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，已知$E(X^k)=\alpha_k(k=1, 2, 3, 4)$.

证明：当n充分大时，随机变量$Z_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i^2$近似服从正态分布，并指出其分布参数.

解答

5.1 (C) **解** 由于$E\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{n}{\lambda}, D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{n}{\lambda^2}$，因此$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{n}{\lambda}}{\frac{\sqrt{n}}{\lambda}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$，即

$\lim_{n\to\infty}P\left\{\frac{\lambda\sum_{i=1}^{n}X_i-n}{\sqrt{n}}\leqslant x\right\}=\Phi(x)$，故选择 (C).

5.2 (B) **解** 由总体的概率分布得总体的期望、方差分别为$EX=\frac{1}{2}, DX=\frac{1}{4}$，故

$$E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=50, D\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=25 .$$

由中心极限定理，$\sum_{i=1}^{100}X_i$近似服从正态分布$N(50, 25)$，从而有

$$P\left\{\sum_{i=1}^{100}X_i\leqslant 55\right\}=P\left\{\frac{\sum_{i=1}^{100}X_i-50}{5}\leqslant\frac{55-50}{5}\right\}\approx\Phi\left(\frac{55-50}{\sqrt{25}}\right)=\Phi(1),$$

故选 (B).

5.3 0.489 **解** 不能承受试验而烧毁的元件数$X\sim B(n, p)$. 根据棣莫弗－拉普拉斯定理，X近似服从正态分布$N(np, npq)$，其中$n=100$，$p=0.05$，$q=0.95$. 因此

$$P\{5\leqslant X\leqslant 10\}=P\left\{\frac{5-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{X-np}{\sqrt{npq}}\leqslant\frac{10-np}{\sqrt{npq}}\right\}=P\left\{0\leqslant\frac{X-5}{\sqrt{4.75}}\leqslant\frac{10-5}{\sqrt{4.75}}\right\}$$

$$=P\left\{0\leqslant\frac{X-5}{\sqrt{4.75}}\leqslant 2.29\right\}\approx\Phi(2.29)-\Phi(0)=0.489 .$$

5.4 $\frac{7}{2}$ **解** 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是各次掷出的点数，显然它们独立同分布，每次掷出点数的数学

期望等于$\frac{7}{2}$. 因此，根据辛钦大数定律，$\overline{X}_n$依概率收敛于$\frac{7}{2}$.

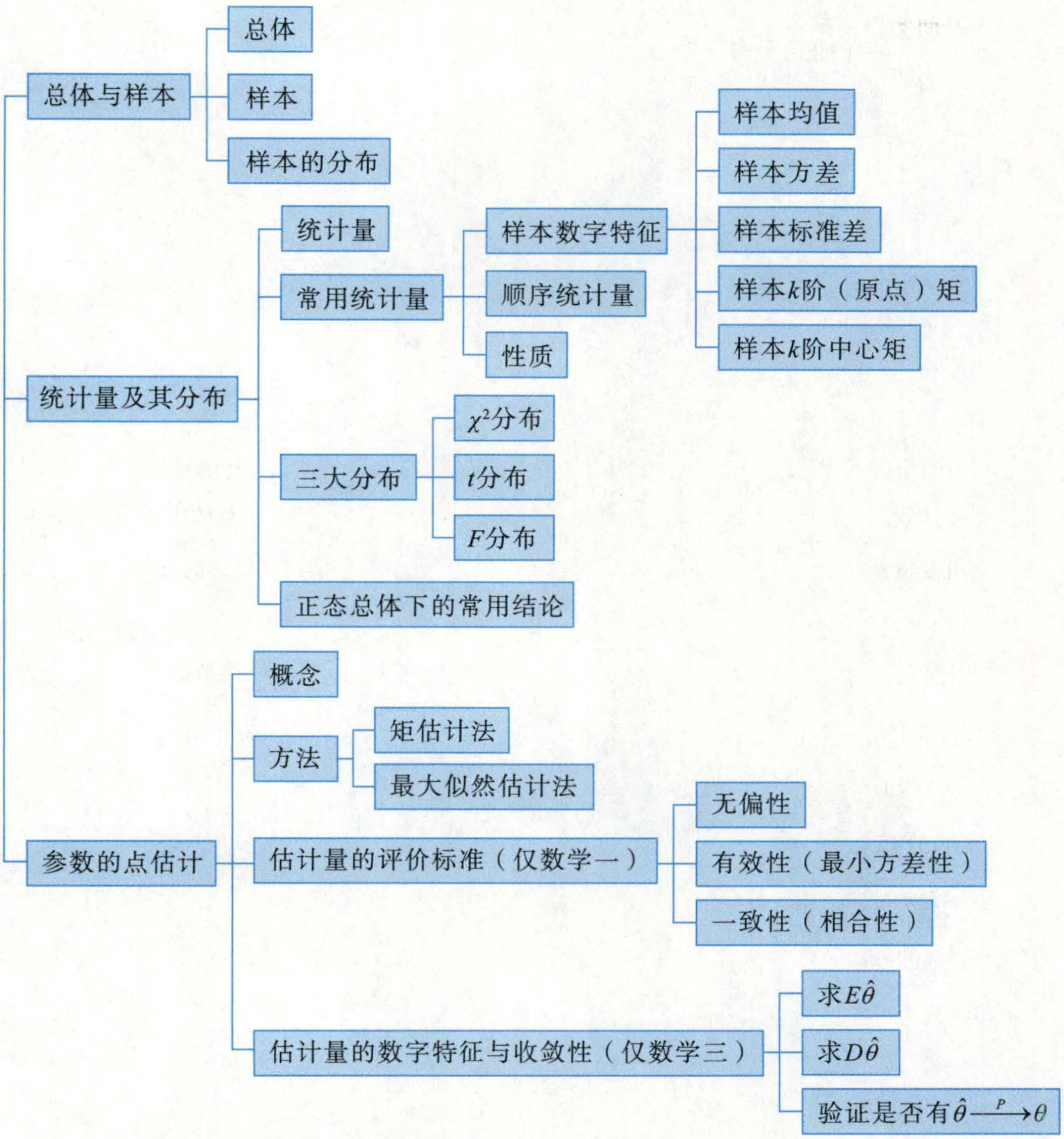
5.5 证明 依题意$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立同分布，可知$X_1^2, X_2^2, \cdots, X_n^2$也独立同分布且有

$$E(X_i^2)=\alpha_2,\ D(X_i^2)=E(X_i^4)-[E(X_i^2)]^2=\alpha_4-\alpha_2^2 .$$

由列维 - 林德伯格定理，$V_n=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-n\alpha_2}{\sqrt{n(\alpha_4-\alpha_2^2)}}=\frac{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2-\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4-\alpha_2^2)/n}}=\frac{Z_n-\alpha_2}{\sqrt{(\alpha_4-\alpha_2^2)/n}}$的极限分布是标准正态分布，所以当$n$充分大时，$V_n$近似服从标准正态分布，从而$Z_n=\sqrt{\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}}\cdot V_n+\alpha_2$近似服从参数为$\mu=\alpha_2$，$\sigma^2=\frac{\alpha_4-\alpha_2^2}{n}$的正态分布.

第6讲 数理统计

基础知识结构



- 参数的区间估计（仅数学一）
  - 概念
  - 单个正态总体均值和方差的置信区间
- 假设检验（仅数学一）
  - 概念
  - 原假设与备择假设
  - 小概率原理与显著性水平
  - 正态总体下的六大检验及拒绝域
- 两类错误（仅数学一）
  - 第一类错误
  - 第二类错误

基础内容精讲

一、总体与样本

1. 总体

研究对象的全体称为总体，组成总体的每一个元素称为**个体**．在对总体进行统计研究时，我们所关心的是表征总体状况的某个（或某几个）数量指标X（可以是向量）和该指标在总体中的分布情况．我们把总体与随机变量X等同起来，说"总体X"．所谓总体的分布就是指随机变量X的分布．

2. 样本

n个相互独立且与总体X具有相同概率分布的随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$所组成的整体$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$称为来自总体X、容量为n的一个**简单随机样本**，简称**样本**．一次抽样结果的n个具体数值$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$的一个**观测值**（或**样本值**）．

3. 样本的分布

对于容量为n的样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，有如下定理：

假设总体X的分布函数为$F(x)$（概率密度为$f(x)$，或概率分布为$p_i = P\{X = x_i\}$），则$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的分布函数为

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} F(x_i) .$$

相应地：

(1) 对于离散型随机变量的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，联合分布为

$$P\{X_1=x_1, X_2=x_2, \cdots, X_n=x_n\}=\prod_{i=1}^{n} P\{X_i=x_i\};$$

(2) 对于连续型随机变量的样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，联合概率密度为

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i).$$

二、统计量及其分布

(一) 统计量

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的一个样本，$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 n 元函数，如果 g 中不含任何未知参数，则称 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的一个**统计量**. 若 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为样本值，则称 $g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为 $g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 的**观测值**.

【注】(1) 直观上，统计量就是由统计数据计算得来的量. 数学上，统计量是样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的函数：$T=g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$. 统计量不依赖于任何未知参数.

(2) 统计量也是随机变量，且是样本的函数.

(二) 常用统计量

样本数字特征和顺序统计量都是常用的统计量. 统计量是统计分析和统计推断的重要工具.

1. 样本数字特征

数学期望(均值)、方差和标准差、矩等都是总体 X 最重要的数字特征. 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则相应的样本数字特征定义：

(1) **样本均值** $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$;

(2) **样本方差** $S^2=\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$;

样本标准差 $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2}$;

(3) **样本 k 阶(原点)矩** $A_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i^k\ (k=1, 2, \cdots)$;

(4) **样本 k 阶中心矩** $B_k=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^k\ (k=2, 3, \cdots)$.

2. 顺序统计量

将样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的 n 个观测量按其取值从小到大的顺序排列，得

$$X_{(1)} \leqslant X_{(2)} \leqslant \cdots \leqslant X_{(n)} .$$

随机变量 $X_{(k)}(k=1, 2, \cdots, n)$ 称作**第 k 顺序统计量**，其中 $X_{(1)}$ 是最小顺序统计量，而 $X_{(n)}$ 是最大顺序统计量：

$$X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}, X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} .$$

【注】(1) $X_{(n)}=\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{(n)}(x)=[F(x)]^n$$

（概率密度为 $f_{(n)}(x)=n[F(x)]^{n-1}f(x)$）.

(2) $X_{(1)}=\min\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ 的分布函数为

$$F_{(1)}(x)=1-[1-F(x)]^n$$

（概率密度为 $f_{(1)}(x)=n[1-F(x)]^{n-1}f(x)$）.

3. 性质

设总体 X 的期望 $EX=\mu$，方差 $DX=\sigma^2$，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X、容量为 n 的一个样本，$\overline{X}, S^2$ 分别为样本均值和样本方差，则

$$EX_i=\mu,\ DX_i=\sigma^2(i=1, 2, \cdots, n),\ E\overline{X}=EX=\mu,\ D\overline{X}=\frac{1}{n}DX=\frac{\sigma^2}{n},\ E(S^2)=DX=\sigma^2 .$$

（三）三大分布——χ^2 分布、t 分布和 F 分布

χ^2 分布、t 分布和 F 分布是统计推断中最常用的抽样分布．考生不必记忆 χ^2 分布、t 分布和 F 分布的概率密度，只需了解相应统计量的概念，以及它们的分布曲线的示意图和分位数，会查相应分位数的数值表．

1. χ^2 分布

(1) 概念．

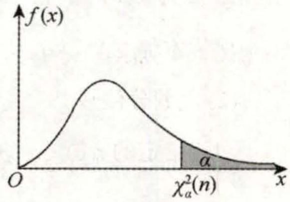
若随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从标准正态分布，则随机变量 $X=\sum_{i=1}^{n}X_i^2$ 服从自由度为 n 的 χ^2 分布，记为 $X \sim \chi^2(n)$．

(2) 上 α 分位数．　和式中独立变量的个数为自由度

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{\chi^2 > \chi_\alpha^2(n)\} = \int_{\chi_\alpha^2(n)}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \alpha$$

的$\chi_\alpha^2(n)$为$\chi^2(n)$分布的上α分位数（见图 6-1）. 对于不同的α，n，$\chi^2(n)$分布上α分位数可通过查表求得 .



$(n>2)$

图 6-1

(3) 性质 .

①若$X_1 \sim \chi^2(n_1)$，$X_2 \sim \chi^2(n_2)$，X_1与X_2相互独立，则

$$X_1 + X_2 \sim \chi^2(n_1 + n_2)$$

此结论可推广至有限多个的和 .

②若$X \sim \chi^2(n)$，则$EX = n$，$DX = 2n$.

2. t 分布

(1) 概念 .

设随机变量X~$N(0, 1)$，$Y \sim \chi^2(n)$，且X与Y相互独立，则随机变量$t = \dfrac{X}{\sqrt{Y/n}}$服从自由度为$n$的$t$分布，记为$t \sim t(n)$.

(2) 上α分位数 .

对于给定的$\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{t > t_\alpha(n)\} = \alpha$$

的$t_\alpha(n)$为$t(n)$分布的上α分位数（见图 6-2）.

(3) 性质 .

① t分布概率密度$f(x)$的图形关于$x=0$对称（见图 6-3），因此

$$Et = 0(n \geqslant 2) .$$

②由 t分布概率密度$f(x)$图形的对称性，知$P\{t > -t_\alpha(n)\} = P\{t > t_{1-\alpha}(n)\}$，故$t_{1-\alpha}(n) = -t_\alpha(n)$. 当α值在表中没有时，可用此式求得上α分位数 .

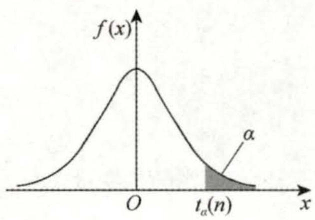


图 6-2

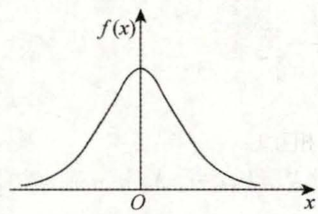


图 6-3

3. F 分布

(1) 概念 .

设随机变量$X \sim \chi^2(n_1)$，$Y \sim \chi^2(n_2)$，且X与Y相互独立，则$F = \dfrac{X/n_1}{Y/n_2}$服从自由度为(n_1, n_2)的F

分布，记为 $F \sim F(n_1, n_2)$，其中 n_1 称为第一自由度，n_2 称为第二自由度．F 分布的概率密度 $f(x)$ 的图形如图 6-4 所示．

(2) 上 α 分位数．

对于给定的 $\alpha(0<\alpha<1)$，称满足

$$P\{F > F_\alpha(n_1, n_2)\} = \alpha$$

的 $F_\alpha(n_1, n_2)$ 为 $F(n_1, n_2)$ 分布的上 α 分位数（见图 6-5）．

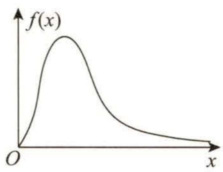


图 6-4

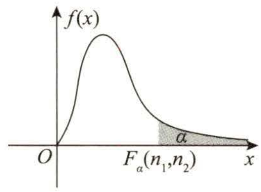


图 6-5

证明：设 $F \sim F(n_2, n_1)$，则

$P\{F > F_\alpha(n_2, n_1)\} = \alpha$，

$P\{F \leqslant F_\alpha(n_2, n_1)\} = 1-\alpha$，

$P\left\{\dfrac{1}{F} \geqslant \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}\right\} = 1-\alpha$，

因为 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_1, n_2)$，结合上 α 分位数的定义，可知 $\dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)} = F_{1-\alpha}(n_1, n_2)$．

(3) 性质．

①若 $F \sim F(n_1, n_2)$，则 $\dfrac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$．

② $F_{1-\alpha}(n_1, n_2) = \dfrac{1}{F_\alpha(n_2, n_1)}$，常用来求 F 分布表中未列出的上 α 分位数．

③若 $t \sim t(n)$，则 $t^2 \sim F(1, n)$．

（四）正态总体条件下的常用结论

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个样本，$\overline{X}$, S^2 分别是样本均值和样本方差，则

(1) $\overline{X} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，即 $\dfrac{\overline{X}-\mu}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{\sigma} \sim N(0,1)$；

(2) $\dfrac{1}{\sigma^2}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$；

(3) $\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(\dfrac{X_i-\overline{X}}{\sigma}\right)^2 \sim \chi^2(n-1)$（$\mu$ 未知时，在 (2) 中用 $\overline{X}$ 替代 μ）；

(4) $\overline{X}$ 与 S^2 相互独立，$\dfrac{\sqrt{n}(\overline{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$（$\sigma$ 未知时，在 (1) 中用 S 替代 σ）．进一步有

正态总体下才有此结论

$$\frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2} \sim F(1, n-1).$$

$$\frac{\left(\dfrac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right)^2 \Big/ 1}{\dfrac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\Big/(n-1)} = \frac{n(\overline{X}-\mu)^2}{S^2}$$

例 6.1 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n(n>2)$ 为独立同分布的随机变量，且均服从正态分布 $N(0,1)$，记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $Y_i=X_i-\overline{X}$, $i=1, 2, \cdots, n$.则 Y_i 的方差 $DY_i=$______.

解 应填 $\frac{n-1}{n}$.

$$\begin{aligned}DY_i&=D(X_i-\overline{X})\\&=D\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X_i-\frac{1}{n}\sum_{k\neq i}^{n}X_k\right]=\left(1-\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n-1}{n^2}\\&=\frac{n-1}{n}, i=1, 2, \cdots, n .\end{aligned}$$

例 6.2 已知总体 X 的期望 $EX=0$，方差 $DX=\sigma^2$，从总体 X 中抽取容量为 n 的简单随机样本，其样本均值、样本方差分别为 $\overline{X}$, S^2 .记 $S_k^2=\frac{n}{k}\overline{X}^2+\frac{1}{k}S^2(k=1, 2, 3, 4)$，则（　　）.

(A) $E(S_1^2)=\sigma^2$　　(B) $E(S_2^2)=\sigma^2$

(C) $E(S_3^2)=\sigma^2$　　(D) $E(S_4^2)=\sigma^2$

解 应选 (B).

由 $E\overline{X}=EX=0$, $D\overline{X}=\frac{DX}{n}=\frac{\sigma^2}{n}$, $E(S^2)=\sigma^2$，且 $E(\overline{X}^2)=D\overline{X}+(E\overline{X})^2=D\overline{X}=\frac{\sigma^2}{n}$，故

$$E(S_k^2)=\frac{n}{k}E(\overline{X}^2)+\frac{1}{k}E(S^2)=\frac{n}{k}\cdot\frac{\sigma^2}{n}+\frac{1}{k}\sigma^2=\frac{2}{k}\sigma^2 .$$

当 $k=2$ 时，$E(S_2^2)=\sigma^2$，选择 (B).

例 6.3 设 X_1, X_2, X_3, X_4 是来自正态总体 $N(0, 2^2)$ 的简单随机样本，记

$$X=a(X_1-2X_2)^2+b(3X_3-4X_4)^2,$$

若统计量 X 服从自由度为 2 的 χ^2 分布，则 $ab=$______.

解 应填 $\frac{1}{2\,000}$.

由条件知 X_1, X_2, X_3, X_4 相互独立且同服从正态分布 $N(0, 2^2)$.因此 X_1-2X_2 服从正态分布 $N(0, 20)$，而 $3X_3-4X_4$ 服从正态分布 $N(0, 100)$，并且相互独立 . 由 χ^2 分布的概念，知

$$T=\frac{(X_1-2X_2)^2}{20}+\frac{(3X_3-4X_4)^2}{100}$$

服从自由度为 2 的 χ^2 分布，从而 $a=\frac{1}{20}$, $b=\frac{1}{100}$，于是 $ab=\frac{1}{2\,000}$.

例 6.4 设总体 $X\sim N(0, 3^2)$, $X_1, X_2, \cdots, X_8$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{X_5^2+X_6^2+X_7^2+X_8^2}}$$

服从（　　）.

(A) $\chi^2(4)$　　(B) $t(4)$　　(C) $F(4, 4)$　　(D) $N(0, 4^2)$

解　应选 (B).

由于相互独立且服从正态分布的随机变量的线性组合仍然服从正态分布，易见

$$U=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{\sqrt{D(X_1+X_2+X_3+X_4)}}$$
$$=\frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{6}\sim N(0, 1)$$

作为相互独立且服从标准正态分布的随机变量的平方和，

$$V=\frac{X_5^2}{9}+\frac{X_6^2}{9}+\frac{X_7^2}{9}+\frac{X_8^2}{9}$$

服从 χ^2 分布，自由度为 4. 随机变量 U 和 V 显然相互独立 . 则随机变量 Y 可以表示为

$$Y=\frac{(X_1+X_2+X_3+X_4)/6}{\sqrt{\frac{X_5^2+X_6^2+X_7^2+X_8^2}{9}\Big/4}}=\frac{U}{\sqrt{V/4}}.$$

由 t 分布的概念，可知随机变量 Y 服从自由度为 4 的 t 分布，故选 (B).

例 6.5　设 $X_1, X_2, \cdots, X_{15}$ 是来自正态总体 $N(0, 9)$ 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{1}{2}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}$$

服从（　　）.

(A) $t(10)$　　(B) $t(15)$　　(C) $F(10, 5)$　　(D) $F(5, 10)$

解　应选 (C).

由 χ^2 分布的概念，知

$$\chi_1^2=\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{9}\text{和}\chi_2^2=\frac{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}{9}$$

分别服从自由度为 10 和 5 的 χ^2 分布，且相互独立 . 从而，由 F 分布的概念，知

$$Y=\frac{1}{2}\frac{X_1^2+X_2^2+\cdots+X_{10}^2}{X_{11}^2+X_{12}^2+\cdots+X_{15}^2}=\frac{\frac{\chi_1^2}{10}}{\frac{\chi_2^2}{5}}$$

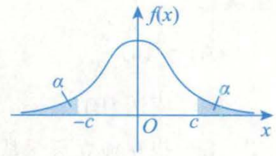
服从自由度为 (10, 5) 的 F 分布，故选 (C).

例 6.6　设随机变量 $X\sim t(n)$, $Y\sim F(1, n)$，给定 $\alpha(0<\alpha<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=\alpha$，则

$P\{Y>c^2\}=($　　$)$.

(A) α　　(B) $1-\alpha$　　(C) 2α　　(D) $1-2\alpha$

解 应选 (C).



由 $X\sim t(n)$，可得 $X^2\sim F(1,n)$，从而

$$P\{Y>c^2\}=P\{X^2>c^2\}=P\{X>c\}+P\{X<-c\}=2\alpha,$$

故正确选项为 (C).

【注】此题只能有概率 $P\{Y>c^2\}$ 与 $P\{X^2>c^2\}$ 相等，而不能说 $Y=X^2$，因为服从相同分布的随机变量并不一定相同.

三、参数的点估计

设总体 X 的分布函数为 $F(x;\theta)$（可以是多维的），其中 θ 是一个未知参数，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的一个样本．由样本构造一个适当的统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 作为参数 θ 的估计，则称统计量 $\hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$ 为 θ 的**估计量**.

如果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是样本的一个观测值，将其代入估计量 $\hat{\theta}$ 中得值 $\hat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，统计学中称这个值为未知参数 θ 的**估计值**.

建立一个适当的统计量作为未知参数 θ 的估计量，并以相应的观测值作为未知参数估计值的问题，称为参数 θ 的**点估计问题**.

1. 矩估计

(1) 对于一个参数 $\begin{cases} \text{①用一阶矩建立方程：令 } \overline{X}=EX, \\ \text{②若“①”不能用，用二阶矩建立方程：令 } \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2). \end{cases}$

一个方程解出一个参数即可作为矩估计.

(2) 对于两个参数，用一阶矩与二阶矩建立两个方程，即① $\overline{X}=EX$ 与② $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^2=E(X^2)$，两个方程解出两个参数即可作为矩估计.

【注】显然，一般情况下，将 $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i^k=E(X^k)(k=1,2,\cdots,m)$ 联立，即可求 m 个参数的矩估计．那么，若求一个参数的矩估计，是否 k 可任取一个正整数呢？答案是否定的，在统计的问题中，一般以低阶为原则，即取能解出参数的方程的最小 k 值.

2. 最大似然估计

对未知参数 θ 进行估计时，在该参数可能的取值范围内选取，使“样本获此观测值 $x_1, x_2, \cdots, x_n$”的概率最大的参数值 $\hat{\theta}$ 作为 θ 的估计，这样选定的 $\hat{\theta}$ 最有利于 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的出现，即“参数 $\theta =$？时，观测值出现的概率最大”．

(1) 写似然函数 $L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta)=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)\text{（这是离散型总体}X\text{取}x_1, x_2, \cdots, x_n\text{的概率）},\\ \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)\text{（这是连续型总体}X\text{取}x_1, x_2, \cdots, x_n\text{的联合概率密度）}.\end{cases}$

$\begin{cases}\text{独立：拆} \Rightarrow f = f_1 f_2 \cdots f_n;\ p = p_1 p_2 \cdots p_n,\\ \text{同分布：去下标} \Rightarrow f = \prod\limits_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta);\ p = \prod\limits_{i=1}^{n} p(x_i;\ \theta)\end{cases}$

(2) 求参数 $\begin{cases}\text{若似然函数有驻点，则令}\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}\theta}=0\text{或}\dfrac{\mathrm{d}(\ln L)}{\mathrm{d}\theta}=0\text{，解出}\hat{\theta},\\ \text{若似然函数无驻点(单调)，则用定义求}\hat{\theta},\\ \text{若似然函数为常数，则用定义求}\hat{\theta}\text{，此时}\hat{\theta}\text{不唯一}.\end{cases}$

(3) 最大似然估计量的不变性原则．

设 $\hat{\theta}$ 是总体分布中未知参数 θ 的最大似然估计，函数 $u=u(\theta)$ 具有反函数，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计，如 $\hat{\theta}$ 是 θ 的最大似然估计，则 $\mathrm{e}^{\hat{\theta}}$ 是 e^{θ} 的最大似然估计．

3. 估计量的评价标准（仅数学一）

(1) 无偏性．

对于估计量 $\hat{\theta}$，若 $E\hat{\theta}=\theta$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的无偏估计量．

(2) 有效性（最小方差性）.

判断有效性的前提

若 $E\hat{\theta}_1=\theta$，$E\hat{\theta}_2=\theta$，即 $\hat{\theta}_1$，$\hat{\theta}_2$ 均是 θ 的无偏估计量，当 $D\hat{\theta}_1 < D\hat{\theta}_2$ 时，称 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效．

(3) 一致性（相合性）（只针对大样本 $n\to\infty$）．

一般用以下两种方法：

$\begin{cases}\text{①切比雪夫不等式 } P\{|X-EX|\geqslant\varepsilon\}\leqslant\dfrac{DX}{\varepsilon^2},\\ \text{②辛钦大数定律（独立同分布、}EX\text{存在）}\\ \Rightarrow \overline{X}\xrightarrow{P} EX\end{cases}$

若 $\hat{\theta}$ 为 θ 的估计量，对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0,$$

或

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1,$$

即当 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$ 时，称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致（或相合）估计．

4. 估计量的数字特征与收敛性（仅数学三）

(1) 求 $E\hat{\theta}$．

(2) 求 $D\hat{\theta}$.

(3) 验证 $\hat{\theta}$ 是否依概率收敛到 θ，即是否有 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta$，即对任意 $\varepsilon>0$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|\geqslant\varepsilon\}=0 \text{ 或 } \lim_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1 .$$

例 6.7 设总体 X 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{1}{2}\right)$ 是未知参数，从总体 X 中抽取容量为 8 的一组样本，其样本值为 3, 1, 3, 0, 3, 1, 2, 3 . 求 θ 的矩估计值和最大似然估计值 .

解 由于总体分布仅含一个未知参数，因此矩法方程为 $EX=\overline{X}$，其中

$$\overline{X}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}X_i ,$$

$$EX=0\times\theta^2+1\times2\theta(1-\theta)+2\theta^2+3(1-2\theta)=3-4\theta ,$$

令 $3-4\theta=\overline{X}$，解得 θ 的矩估计量为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-\overline{X}}{4}$，由样本值算得

$$\bar{x}=\frac{1}{8}\times(3+1+3+0+3+1+2+3)=2 ,$$

所以 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{3-2}{4}=\dfrac{1}{4}$.

已知总体 X 的概率分布为 $p_i=P\{X=x_i\}=p(x_i;\ \theta)$，故样本值 $x_i(1\leqslant i\leqslant8)$ 的似然函数为

$$L(\theta)=L(x_1,\cdots,x_8;\ \theta)=\prod_{i=1}^{8}p(x_i;\ \theta)=\theta^2\left[2\theta(1-\theta)\right]^2\theta^2(1-2\theta)^4$$
$$=4\theta^6(1-\theta)^2(1-2\theta)^4 .$$

取对数，
$$\ln L(\theta)=\ln4+6\ln\theta+2\ln(1-\theta)+4\ln(1-2\theta) ,$$

令
$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{6}{\theta}-\frac{2}{1-\theta}-\frac{8}{1-2\theta}=\frac{24\theta^2-28\theta+6}{\theta(1-\theta)(1-2\theta)}=0 ,$$

即 $12\theta^2-14\theta+3=0$，解得 $\theta=\dfrac{7\pm\sqrt{13}}{12}$，因为 $\dfrac{7+\sqrt{13}}{12}>\dfrac{1}{2}$ 不合题意，故 θ 最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{7-\sqrt{13}}{12}$.

【注】似然方程满足条件的解 $\hat{\theta}$ 一般就认为是最大似然估计而不加以验证 . 原则上是需要证明的，然而有些问题证明是不容易的，甚至是不可能的 . 如果能断言 $L(\theta)$ 有最大值点，而且似然方程只有唯一解 $\hat{\theta}$，则 $\hat{\theta}$ 为最大似然估计，此外有些问题可用微积分方法来验证，如本例 . 事实上，由于

$$\frac{\mathrm{d}^2[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta^2}=\frac{-6}{\theta^2}-\frac{2}{(1-\theta)^2}-\frac{16}{(1-2\theta)^2}<0,$$

因此 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$ 使 $L(\theta)$ 达到最大，因而满足条件的解为 $\hat{\theta}=\frac{7-\sqrt{13}}{12}$.

例 6.8 设某种产品的使用寿命 T 的分布函数 $F(t)$ 满足方程 $F'(t)+\frac{2t}{\theta^2}[F(t)-1]=0,\ t\geqslant 0$ ，$F(0)=0$ ，其中 θ 为大于 1 的参数，且产品性能 $Q(\theta)=\frac{\theta^2}{2}\ln\theta-\frac{3}{4}\theta^2+\theta$.

(1) 求概率 $P\{T>t\}$ 与 $P\{T>s+t\mid T>s\}$ ，其中 $s>0,\ t>0$ ；

(2) 任取 n 个这种产品做寿命试验，测得它们的寿命分别为 $t_1,\ t_2,\ \cdots,\ t_n$，求 θ 的最大似然估计值 $\hat{\theta}$ ；

(3) 求产品性能 Q 的最大似然估计值 $\hat{Q}$.

解 首先求 $F(t)$，由 $F'(t)+\frac{2t}{\theta^2}F(t)=\frac{2t}{\theta^2}$，知

$$\begin{aligned}F(t)&=\mathrm{e}^{-\int\frac{2t}{\theta^2}\mathrm{d}t}\left[\int\mathrm{e}^{\int\frac{2t}{\theta^2}\mathrm{d}t}\frac{2t}{\theta^2}\mathrm{d}t+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}}\left[\int\mathrm{e}^{\frac{t^2}{\theta^2}}\mathrm{d}\left(\frac{t^2}{\theta^2}\right)+C\right]\\&=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}}\left(\mathrm{e}^{\frac{t^2}{\theta^2}}+C\right)=1+C\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}},\ t\geqslant 0\ .\end{aligned}$$

由 $F(0)=0$ ，知 $C=-1$ ，故

$$F(t)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}}, & t\geqslant 0,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(1) 由条件知

$$P\{T>t\}=\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}},$$

$$\begin{aligned}P\{T>s+t\mid T>s\}&=\frac{P\{T>s+t,\ T>s\}}{P\{T>s\}}\\&=\frac{P\{T>s+t\}}{P\{T>s\}}\\&=\mathrm{e}^{-\frac{t^2+2ts}{\theta^2}}\ .\end{aligned}$$

(2) 总体 T 的概率密度为

$$f(t;\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{2t}{\theta^2}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{\theta^2}}, & t>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

似然函数为

$$L(\theta)=\begin{cases}2^n\theta^{-2n}t_1t_2\cdots t_n\mathrm{e}^{-\frac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2}, & t_1,t_2,\cdots,t_n>0,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

当 $t_1,t_2,\cdots,t_n>0$ 时，$\ln L(\theta)=n\ln 2-2n\ln\theta+\sum\limits_{i=1}^{n}\ln t_i-\dfrac{1}{\theta^2}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2$.

令 $\dfrac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=0$，得

$$-\frac{2n}{\theta}+\frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n}t_i^2=0,$$

从而 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\left(\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

(3) 由

$$\begin{aligned}Q'(\theta)&=\theta\ln\theta+\frac{\theta}{2}-\frac{3}{2}\theta+1=\theta\ln\theta-\theta+1\\ &\xlongequal{\text{令 }\theta-1=u}(u+1)\ln(u+1)-u,\end{aligned}$$

根据不等式 $\dfrac{u}{u+1}<\ln(u+1),\ u>0$，知 $Q'(\theta)>0$. 于是 $Q=Q(\theta)$ 有反函数，且由 (2) 可知，Q 的最大似然估计值

$$\hat{Q}=\left(\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\right)\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{3}{4n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2+\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}t_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

例 6.9 设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自该总体的简单随机样本 .

(1) 求 θ 的矩估计量；

(2) 求 θ 的最大似然估计量 .

解 (1) 由于总体 X 服从区间 $[\theta,1]$ 上的均匀分布，因此 $EX=\dfrac{1+\theta}{2}$.

由 $\dfrac{1+\theta}{2}=\overline{X}$，其中 $\overline{X}$ 为样本均值，得 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}=2\overline{X}-1$.

(2) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的观测值，则似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leqslant x_i \leqslant 1 (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n), \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{(1-\theta)^n}, & \theta \leqslant \min\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\},\ x_i \leqslant 1, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

由此可知，当 $\theta=\min\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 时，$L(\theta)$ 达到最大，故 θ 的最大似然估计量为

$$\hat{\theta}=\min\{X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n\}\ .$$

例 6.10 （仅数学一）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，为使

$$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$$

成为总体方差 σ^2 的无偏估计量，则 $k=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{n-1}$　　(B) $\dfrac{1}{n}$　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　(D) $\dfrac{1}{2n}$

解 应选 (C).

由条件知 $E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$. 假如统计量 D 是总体方差 σ^2 的无偏估计量，则

$$ED=k\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]=k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1})$$

$$=k\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)$$

$$=2k(n-1)\sigma^2=\sigma^2,$$

于是，$k=\dfrac{1}{2(n-1)}$，故选 (C).

（仅数学三）设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，记

$$D=k\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2,$$

若 $ED=\sigma^2$，则 $k=$（　　）.

(A) $\dfrac{1}{n-1}$　　(B) $\dfrac{1}{n}$　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$　　(D) $\dfrac{1}{2n}$

解 应选 (C).

由条件知 $E(X^2)=\sigma^2+\mu^2$. 又 $ED=\sigma^2$，则

$$ED=k\sum_{i=1}^{n-1}E[(X_{i+1}-X_i)^2]=k\sum_{i=1}^{n-1}E(X_{i+1}^2+X_i^2-2X_iX_{i+1})$$

$$=k\sum_{i=1}^{n-1}(2\sigma^2+2\mu^2-2\mu^2)$$

$$=2k(n-1)\sigma^2=\sigma^2,$$

于是，$k=\dfrac{1}{2(n-1)}$，故选 (C).

例 6.11 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$, X_1, X_2, X_3是来自总体X的简单随机样本，记

$$\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}X_1+\frac{3}{10}X_2+\frac{1}{2}X_3,$$

$$\hat{\mu}_2=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{4}X_2+\frac{5}{12}X_3,$$

$$\hat{\mu}_3=\frac{1}{3}X_1+\frac{1}{6}X_2+\frac{1}{2}X_3.$$

(仅数学一)证明估计量$\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$都是μ的无偏估计，并指出它们中哪一个最有效.

(仅数学三)求估计量$\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$的数学期望与方差.

(仅数学一)**证明** 因

$$E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

故$\hat{\mu}_1$, $\hat{\mu}_2$, $\hat{\mu}_3$都是μ的无偏估计.

又

$$D\hat{\mu}_1=\frac{1}{25}DX_1+\frac{9}{100}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{38}{100}\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{25}{144}\right)\sigma^2=\frac{50}{144}\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}\right)\sigma^2=\frac{14}{36}\sigma^2,$$

所以$\hat{\mu}_2$最有效.

(仅数学三)**解** $$E\hat{\mu}_1=\frac{1}{5}EX_1+\frac{3}{10}EX_2+\frac{1}{2}EX_3=\left(\frac{1}{5}+\frac{3}{10}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{5}{12}\right)\mu=\mu,$$

$$E\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\right)\mu=\mu,$$

$$D\hat{\mu}_1=\frac{1}{25}DX_1+\frac{9}{100}DX_2+\frac{1}{4}DX_3=\frac{38}{100}\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_2=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{25}{144}\right)\sigma^2=\frac{50}{144}\sigma^2,$$

$$D\hat{\mu}_3=\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{4}\right)\sigma^2=\frac{14}{36}\sigma^2 .$$

例 6.12 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的一个简单随机样本，$EX=\mu$，$DX=\sigma^2$.

(仅数学一) 证明统计量 $Y=\frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}iX_i$ 是μ的无偏相合估计量 .

(仅数学三) 求统计量 $Y=\frac{2}{n(n+1)}\sum\limits_{i=1}^{n}iX_i$ 的数学期望，并证明 Y 依概率收敛到 μ .

证明 (仅数学一) 由于

$$\begin{aligned}EY&=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i\\&=\frac{2}{n(n+1)}(\mu+2\mu+\cdots+n\mu)\\&=\mu,\end{aligned}$$

从而知，Y是μ的无偏估计量 .

又因

$$\begin{aligned}DY&=\left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^2\sum_{i=1}^{n}i^2DX_i=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)\\&=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\\&=\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\sigma^2,\end{aligned}$$

于是由切比雪夫不等式，对任意实数$\varepsilon>0$，有

$$1\geqslant P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DY}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2},$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}1\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2}\right]=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

所以Y是μ的无偏相合估计量 .

(仅数学三)

$$EY=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}E(iX_i)=\frac{2}{n(n+1)}\sum_{i=1}^{n}iEX_i$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}(\mu+2\mu+\cdots+n\mu)$$

$$=\mu,$$

$$DY=\left[\frac{2}{n(n+1)}\right]^2\sum_{i=1}^{n}i^2DX_i=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)$$

$$=\frac{4\sigma^2}{n^2(n+1)^2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\sigma^2,$$

于是由切比雪夫不等式，对任意实数 $\varepsilon>0$，有

$$1\geqslant P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}\geqslant 1-\frac{DY}{\varepsilon^2}=1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2},$$

两边取极限，由 $\lim\limits_{n\to\infty}1\geqslant\lim\limits_{n\to\infty}\left[1-\frac{2}{3}\cdot\frac{(2n+1)\sigma^2}{n(n+1)\varepsilon^2}\right]=1$，有

$$\lim_{n\to\infty}P\{|Y-\mu|<\varepsilon\}=1,$$

所以 Y 依概率收敛到 μ.

四、参数的区间估计(仅数学一)

1. 概念

设 θ 是总体 X 的分布函数的一个未知参数，对于给定 $\alpha(0<\alpha<1)$，如果由样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 确定的两个统计量 $\hat{\theta}_1=\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，$\hat{\theta}_2=\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)$，使

$$P\{\hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n)<\theta<\hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n)\}=1-\alpha,$$

则称随机区间 $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$ 是 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的**置信区间**，$\hat{\theta}_1$ 和 $\hat{\theta}_2$ 分别称为 θ 的置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间的**置信下限**和**置信上限**，$1-\alpha$ 称为**置信度**或**置信水平**，α 称为显著性水平. 如果 $P\{\theta<\hat{\theta}_1\}=P\{\theta>\hat{\theta}_2\}=\frac{\alpha}{2}$，则称这种置信区间为等尾置信区间.

考前记一记，喝前摇一摇，即可.

2. 单个正态总体均值和方差的置信区间

设 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$，从总体 X 中抽取样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$，样本均值为 $\overline{X}$，样本方差为 S^2.

(1) σ^2 已知，μ 的置信水平是 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right).\xrightarrow{\text{记为}I_1}P\{\mu\in I_1\}=1-\alpha$$

(2) σ^2未知，μ的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).\xrightarrow{\text{记为}I_2}P\{\mu\in I_2\}=1-\alpha$$

(3) μ已知，σ^2的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n)},\ \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n)}\right).\xrightarrow{\text{记为}I_3}P\{\sigma^2\in I_3\}=1-\alpha$$

此种情况一般不出现

(4) μ未知，σ^2的置信水平是$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right).\xrightarrow{\text{记为}I_4}P\{\sigma^2\in I_4\}=1-\alpha$$

例 6.13 设总体$X\sim N(\mu,\sigma^2)$（σ^2已知），则在给定样本容量n及置信度$1-\alpha$的情况下，未知参数μ的置信区间长度随着样本均值$\overline{X}$的增加而（　　）.

(A) 增加　　(B) 减少　　(C) 不变　　(D) 不能确定增或减

解 应选 (C).

在给定条件下，未知参数μ的置信区间为$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right)$，其中$\Phi\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)=1-\frac{\alpha}{2}$，可见该区间长度$2\frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}$与$\overline{X}$无关，故选择 (C).

例 6.14 设总体X的方差为 1，根据来自X的容量为 100 的简单随机样本，测得样本均值为 5，又$\Phi(1.96)=0.975$，则X的数学期望的置信度近似等于 0.95 的置信区间为______.

解 应填$(4.804,\ 5.196)$.

尽管未说明X是否为正态总体，但是由于样本容量$n=100$属大样本，因此由中心极限定理易得

$$Z=\frac{\overline{X}-\mu}{1/\sqrt{100}}\overset{\text{近似}}{\sim}N(0,1),$$

又由$\Phi(1.96)=0.975$，故$P\{-1.96<Z<1.96\}=0.95$，即μ的置信度近似为 0.95 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{1}{10}\times1.96,\ \overline{X}+\frac{1}{10}\times1.96\right),$$

将$\overline{x}=5$代入上式得置信区间为$(4.804,\ 5.196)$.

五、假设检验（仅数学一）

1. 概念

关于总体（分布中的未知参数，分布的类型、特征、不相关性、独立性……）的每一种论断（“看法”）称为**统计假设**. 然后根据样本观察数据或试验结果所提供的信息去推断（检验）这个“看法”（即假设）是否成立，这类统计推断问题称为**假设检验**.

2. 原假设与备择假设

常常把没有充分理由不能轻易否定的假设取为**原假设**（**基本假设或零假设**），记为 H_0，将其否定的陈述（假设）称为**对立假设或备择假设**，记为 H_1 .

3. 小概率原理与显著性水平

(1) 小概率原理.

对假设进行检验的**基本思想**是采用**某种带有概率性质的反证法**. 这种方法的依据是小概率原理——概率很接近于 0 的事件在一次试验或观察中认为不会发生. 若小概率事件发生了，则拒绝原假设.

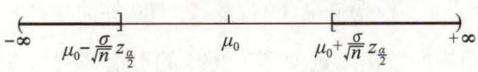
(2) 显著性水平 α .

小概率事件中的“小概率”的值没有统一规定，通常是根据实际问题的要求，规定一个界限 $\alpha(0<\alpha<1)$，当一个事件的概率不大于 α 时，即认为它是小概率事件. 在假设检验问题中，α 称为**显著性水平**，通常取 $\alpha=0.1$， 0.05， 0.01 等.

4. 正态总体下的六大检验及拒绝域

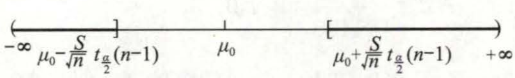
考前记一记，喝前摇一摇，即可.

(1) σ^2 已知，μ 未知. H_0: $\mu=\mu_0$， H_1: $\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为 $\left(-\infty,\ \mu_0-\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}\right]\cup\left[\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}},\ +\infty\right)$.



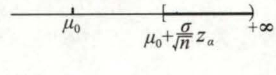
(2) σ^2 未知，μ 未知. H_0: $\mu=\mu_0$， H_1: $\mu\neq\mu_0$，则拒绝域为

$$\left(-\infty,\ \mu_0-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right]\cup\left[\mu_0+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ +\infty\right).$$



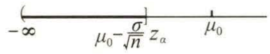
(3) σ^2 已知，μ 未知. H_0: $\mu\leqslant\mu_0$， H_1: $\mu>\mu_0$，则拒绝域为 $\left[\mu_0+\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}z_\alpha,\ +\infty\right)$.

（或写 $\mu=\mu_0$ ）



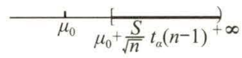
(4) σ^2已知，μ 未知．H_0: $\mu \geqslant \mu_0$，H_1: $\mu < \mu_0$，则拒绝域为$\left(-\infty, \mu_0 - \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} z_\alpha\right]$．

（或写 $\mu = \mu_0$ ）



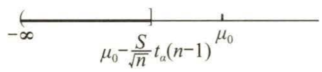
(5) σ^2未知，μ 未知．H_0: $\mu \leqslant \mu_0$，H_1: $\mu > \mu_0$，则拒绝域为$\left[\mu_0 + \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1), +\infty\right)$．

（或写 $\mu = \mu_0$ ）



(6) σ^2未知，μ 未知．H_0: $\mu \geqslant \mu_0$，H_1: $\mu < \mu_0$，则拒绝域为$\left(-\infty, \mu_0 - \dfrac{S}{\sqrt{n}} t_\alpha(n-1)\right]$．

（或写 $\mu = \mu_0$ ）



【注】拒绝域的“形式”与备择假设H_1的“形式”一致，便于记忆．

例 6.15 已知某机器生产出的零件长度X(单位：cm)服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，其中μ, σ^2均未知，现从中随意抽取容量为16的一个样本，测得样本均值$\bar{x}=10$，样本方差$s^2=0.16$. ($t_{0.025}(15)=2.132$)

(1) 求总体均值μ置信水平为0.95的置信区间；

(2) 在显著性水平为0.05下检验假设H_0: $\mu=9.7$, H_1: $\mu \neq 9.7$．

解 (1) 在总体方差未知条件下，总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right).$$

由样本均值$\bar{x}=10$，样本方差$s^2=0.16=0.4^2$，求得置信区间为

$$\left(10 - \frac{2.132 \times 0.4}{4},\ 10 + \frac{2.132 \times 0.4}{4}\right) = (9.786\,8,\ 10.213\,2).$$

(2) 在方差σ^2未知的条件下对总体均值进行检验．拒绝域为

$$\left(-\infty,\ \mu_0 - \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right] \cup \left[\mu_0 + \frac{S}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ +\infty\right),$$

代入数值，计算得$(-\infty, 9.486\,8] \cup [9.913\,2, +\infty)$，由$\bar{x}=10$知，落入拒绝域，故否定$H_0$，即认为$\mu \neq 9.7$．

六、两类错误(仅数学一)

第一类错误（“弃真”）：若H_0为真，按检验法则否定H_0，此时犯了“弃真”的错误，这种错误

称为第一类错误，犯第一类错误的概率为 $\alpha=P\{$拒绝$H_0|H_0$为真$\}$.

第二类错误（“取伪”）：若 H_0 不真，按检验法则接受 H_0，此时犯了“取伪”的错误，这种错误称为第二类错误，犯第二类错误的概率为 $\beta=P\{$接受$H_0|H_0$为假$\}=P\{$接受$H_0|H_1$为真$\}$.

【注】 犯两类错误的概率 α 与 β，并不满足 $\beta=1-\alpha$，在固定样本容量 n 的条件下，α 小，β 就大；β 小，α 就大. 在实际应用中，我们总是在控制 α 的条件下，尽量使 β 小，这是因为人们常常把拒绝 H_0 比错误地接受 H_0 看得更重要些.

例 6.16 假定 X 是连续型随机变量，U 是对 X 的一次观测值. 关于其概率密度 $f(x)$ 有如下假设：

$$H_0\text{: } f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}\quad H_1\text{: } f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 2,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

检验规则：当事件 $V=\left\{U>\frac{3}{2}\right\}$ 出现时，否定假设 H_0，接受 H_1. 则犯第一类错误的概率 α 与犯第二类错误的概率 β 分别为（　　）.

(A) $\frac{3}{4},\frac{7}{16}$　　(B) $\frac{7}{16},\frac{3}{4}$　　(C) $\frac{9}{16},\frac{1}{4}$　　(D) $\frac{1}{4},\frac{9}{16}$

解 应选 (D).

由 α 和 β 的意义，知

$$\alpha=P\left\{U>\frac{3}{2}\middle|H_0\right\}=\int_{\frac{3}{2}}^{2}\frac{1}{2}\mathrm{d}x=\frac{1}{4},$$

$$\beta=P\left\{U\leqslant\frac{3}{2}\middle|H_1\right\}=\int_{0}^{\frac{3}{2}}\frac{x}{2}\mathrm{d}x=\frac{9}{16}.$$

故选 (D).

基础习题精练

习题

6.1 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$，其中 μ 已知，σ^2 未知. $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本，则下列样本函数中不是统计量的是（　　）.

(A) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$　　(B) $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{X_i\}$

(C) $\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2$ (D) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$

6.2 设总体X与Y相互独立且都服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，$\overline{X}$，$\overline{Y}$是分别来自总体X，Y，容量都为n的样本的样本均值，则当n固定时，概率$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}$的值随$\sigma$的增大而（　　）.

(A) 单调增大 (B) 单调减小 (C) 保持不变 (D) 增减不定

6.3 设总体$X\sim N(\mu_1,4)$，$Y\sim N(\mu_2,5)$，X与Y相互独立，$X_1,\cdots,X_8$和$Y_1,\cdots,Y_{10}$是分别来自总体X和Y的两个样本，S_X^2与S_Y^2分别为两个样本的样本方差，则（　　）.

(A) $\frac{2S_X^2}{5S_Y^2}\sim F(7,9)$ (B) $\frac{5S_X^2}{2S_Y^2}\sim F(7,9)$ (C) $\frac{4S_X^2}{5S_Y^2}\sim F(7,9)$ (D) $\frac{5S_X^2}{4S_Y^2}\sim F(7,9)$

6.4 设X_1,X_2,X_3,X_4为来自总体$N\left(0,\frac{1}{2}\right)$的简单随机样本，则统计量$Y=\frac{X_1-X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}}$服从（　　）.

(A) $N(0,1)$ (B) $\chi^2(2)$ (C) $t(2)$ (D) $F(2,2)$

6.5 设总体X的概率分布为$P\{X=1\}=\frac{1-\theta}{2}$，$P\{X=2\}=P\{X=3\}=\frac{1+\theta}{4}$. 利用来自总体$X$的样本值1，3，2，2，1，3，1，2，可得$\theta$的最大似然估计值为（　　）.

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{8}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{5}{8}$

6.6 （仅数学一）一批零件的长度服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ，σ^2均未知. 现从中随机抽取16个零件，测得样本均值$\bar{x}=20\text{ cm}$，样本标准差$s=1\text{ cm}$，则μ的置信水平为0.90的置信区间为（　　）.

(A) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(16)\right)$ (B) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(16),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(16)\right)$

(C) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right)$ (D) $\left(20-\frac{1}{4}t_{0.1}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.1}(15)\right)$

6.7 （仅数学一）在假设检验中，显著性水平α的意义是（　　）.

(A) 原假设H_0成立，经检验被拒绝的概率

(B) 原假设H_0成立，经检验被接受的概率

(C) 原假设H_0不成立，经检验被拒绝的概率

(D) 原假设H_0不成立，经检验被接受的概率

6.8 设总体X的概率密度为$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}(-\infty<x<+\infty)$，$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自总体$X$的简单随机样本，其样本方差为$S^2$，则$E(S^2)=$______.

6.9 已知总体X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}(1+\theta)x^{\theta}, & 0<x<1,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

其中 $\theta>-1$ 是未知参数，设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，求 θ 的矩估计量和最大似然估计量 .

6.10 设总体 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6x}{\theta^3}(\theta-x), & 0<x<\theta,\\ 0, & 其他,\end{cases}$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是取自总体 X 的简单随机样本 . 求：

(1) θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；

(2) $\hat{\theta}$ 的方差 $D\hat{\theta}$.

6.11 设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{\alpha^2}, & 0\leqslant x\leqslant\alpha,\\ 0, & 其他,\end{cases}$ 其中 $\alpha>1$ 未知，$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本 .

(1) 求 $p=P\{0<X<\sqrt{\alpha}\}$；

(2) 求 p 的最大似然估计量 $\hat{p}$.

6.12 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的一个简单随机样本，记

$$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i,\ S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2,\ T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2 .$$

(仅数学一) 证明：T 是 μ^2 的无偏估计量 .

(仅数学三) 求 ET .

解答

6.1 (C) **解** 由统计量的定义“不含任何未知参数的样本函数”，即知不是统计量的选项应该是 (C)，因为选项 (C) 中含有未知参数 σ，故选择 (C).

6.2 (C) **解** 要计算概率需要知道 $\overline{X}-\overline{Y}$ 的分布 . 依题意 $\overline{X}\sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$，$\overline{Y}\sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ 且相互独立，故 $\overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(0, \dfrac{2\sigma^2}{n}\right)$，由此可知当 n 固定时，$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}=P\left\{\left|\dfrac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\right|>\sqrt{\dfrac{n}{2}}\right\}$ 与 σ 无关，故所求概率值保持不变，选择 (C). 事实上，

$$P\{|\overline{X}-\overline{Y}|>\sigma\}=1-P\left\{\left|\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{2}\sigma/\sqrt{n}}\right|\leqslant\sqrt{\frac{n}{2}}\right\}=1-\left[\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)-\Phi\left(-\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right]$$

$$=2\left[1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{2}}\right)\right].$$

6.3 (D) **解** 如果 $aQ\sim\chi^2(m)$, $bT\sim\chi^2(n)$, Q 与 T 独立，则 $\dfrac{aQ/m}{bT/n}=\dfrac{naQ}{mbT}\sim F(m,n)$. 依题意

$$\frac{7S_X^2}{4}\sim\chi^2(7),\ \frac{9S_Y^2}{5}\sim\chi^2(9).$$

S_X^2 与 S_Y^2 相互独立，因此服从 $F(7,9)$ 分布的统计量 $A\dfrac{S_X^2}{S_Y^2}$，其系数应是 $A=\dfrac{\frac{7}{4}\Big/7}{\frac{9}{5}\Big/9}=\dfrac{5}{4}$，选择 (D).

【注】通过 F 分布系数与自由度的关系确定选项 .

6.4 (C) **解** 取 $X=X_1-X_2$，则 $EX=0$, $DX=DX_1+DX_2=1$, $X\sim N(0,1)$.

又 $E(\sqrt{2}X_i)=0$, $D(\sqrt{2}X_i)=2DX_i=1$，知 $\sqrt{2}X_i\sim N(0,1)$，从而

$$Y_1=(\sqrt{2}X_3)^2+(\sqrt{2}X_4)^2\sim\chi^2(2),$$

又 X 与 Y_1 相互独立，因此 $Y=\dfrac{X}{\sqrt{\frac{Y_1}{2}}}\sim t(2)$，即 Y 服从自由度为 2 的 t 分布 .

6.5 (A) **解** 由题意可知，似然函数为

$$L(\theta)=P\{X_1=1,X_2=3,X_3=2,X_4=2,X_5=1,X_6=3,X_7=1,X_8=2\}$$

$$=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^3\left(\frac{1+\theta}{4}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2^{13}}(1-\theta)^3(1+\theta)^5.$$

对数似然函数为

$$\ln L(\theta)=-13\ln 2+3\ln(1-\theta)+5\ln(1+\theta).$$

令
$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=-\frac{3}{1-\theta}+\frac{5}{1+\theta}=0,$$

解得 $\theta=\dfrac{1}{4}$，从而 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}=\dfrac{1}{4}$. 故选 (A).

6.6 (C) **解** σ^2 未知，均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\right),$$

其中，在给定条件下，$\bar{x}=20$, $s=1$, $t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)=t_{0.05}(15)$，则所求参数$\mu$的置信水平为0.90的置信区间为

$$\left(20-\frac{1}{4}t_{0.05}(15),\ 20+\frac{1}{4}t_{0.05}(15)\right),$$

故选择 (C).

6.7 (A) **解** 显著性水平α是确定小概率事件的一个界限，由检验法则知，$\alpha=P\{$拒绝$H_0\mid H_0$为真$\}$，所以正确选项是 (A). 选项 (B) 所说的概率是$P\{$接受$H_0\mid H_0$为真$\}=1-\alpha$；选项 (D) 是$P\{$接受$H_0\mid H_0$不成立$\}=P\{$犯第二类错误$\}=\beta$；选项 (C) 是$P\{$拒绝$H_0\mid H_0$不成立$\}=1-\beta$.

6.8 2 **解** 因为样本方差的数学期望等于总体的方差，即$E(S^2)=DX$，而

$$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-|x|}\mathrm{d}x=0,$$

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=2,$$

故
$$E(S^2)=DX=E(X^2)-(EX)^2=2-0=2.$$

6.9 **解** $\mu_1=EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(1+\theta)x^{\theta+1}\mathrm{d}x=\dfrac{1+\theta}{2+\theta}$, $\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$.

令$\mu_1=\overline{X}$，即$\dfrac{1+\theta}{2+\theta}=\overline{X}$，解得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=\dfrac{2\overline{X}-1}{1-\overline{X}}$.

设$x_1, x_2, \cdots, x_n$为样本值，则似然函数为

$$L(\theta)=(1+\theta)^n\prod_{i=1}^{n}x_i^{\theta}(0<x_i<1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

取对数得
$$\ln L(\theta)=n\ln(1+\theta)+\theta\sum_{i=1}^{n}\ln x_i,$$

令
$$\frac{\mathrm{d}[\ln L(\theta)]}{\mathrm{d}\theta}=\frac{n}{1+\theta}+\sum_{i=1}^{n}\ln x_i=0,$$

解得唯一解$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}-1$，则$\theta$的最大似然估计量为$\hat{\theta}=-\dfrac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln X_i}-1$.

6.10 **解** (1) $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\dfrac{6x^2}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\dfrac{\theta}{2}$.

记$\overline{X}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i$，由$\dfrac{\theta}{2}=\overline{X}$，得$\theta$的矩估计量为$\hat{\theta}=2\overline{X}$.

(2) 由于
$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)\mathrm{d}x=\int_0^{\theta}\frac{6x^3}{\theta^3}(\theta-x)\mathrm{d}x=\frac{3\theta^2}{10},$$

$$DX = E(X^2) - (EX)^2 = \frac{3\theta^2}{10} - \left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = \frac{\theta^2}{20},$$

因此 $\hat{\theta} = 2\overline{X}$ 的方差为 $D\hat{\theta} = D(2\overline{X}) = 4D\overline{X} = \frac{4}{n}DX = \frac{\theta^2}{5n}$.

6.11 解 (1) $p = P\{0 < X < \sqrt{\alpha}\} = \int_0^{\sqrt{\alpha}} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}$.

(2) 当 $0 \leqslant x_1 \leqslant \alpha$, $0 \leqslant x_2 \leqslant \alpha$, $\cdots$, $0 \leqslant x_n \leqslant \alpha$ 时，似然函数为

$$L(\alpha) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n) = \frac{2^n}{\alpha^{2n}} x_1 x_2 \cdots x_n,$$

显然 $L(\alpha)$ 关于 α 单调减少，且 $\alpha \geqslant \max\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ ，则 α 的最大似然估计量为

$$\hat{\alpha} = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\} .$$

又由 (1) 知 $p = \frac{1}{\alpha}$ 关于 α 是单调函数，根据最大似然估计的不变性，有 p 的最大似然估计量为

$$\hat{p} = \frac{1}{\max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}} .$$

6.12 (仅数学一) **证明** 由于

$$\begin{aligned} ET &= E\left(\overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E(\overline{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2) \\ &= D\overline{X} + (E\overline{X})^2 - \frac{1}{n}E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \mu^2, \end{aligned}$$

从而知，T 是 μ^2 的无偏估计量 .

(仅数学三) **解**

$$\begin{aligned} ET &= E\left(\overline{X}^2 - \frac{1}{n}S^2\right) = E(\overline{X}^2) - \frac{1}{n}E(S^2) \\ &= D\overline{X} + (E\overline{X})^2 - \frac{1}{n}E(S^2) = \frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 - \frac{\sigma^2}{n} \\ &= \mu^2 . \end{aligned}$$

张宇

博士，全国著名考研数学辅导专家，教育部“国家精品课程建设骨干教师”，全国畅销书《张宇考研数学基础30讲》《张宇考研数学题源探析经典1000题》《张宇高等数学18讲》《张宇线性代数9讲》《张宇概率论与数理统计9讲》《张宇考研数学真题大全解》《考研数学命题人终极预测8套卷》《张宇考研数学最后4套卷》《张宇经济类综合能力数学通关优题库》作者，高等教育出版社原《全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲解析》及《全国硕士研究生招生考试经济类专业学位联考综合能力考试大纲解析》编者之一，北京、上海、广州、西安等全国著名考研数学辅导班首席主讲。

张宇考研数学系列丛书

教材类

张宇考研数学基础30讲·高等数学分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·线性代数分册 书课包

张宇考研数学基础30讲·概率论与数理统计分册 书课包

张宇高等数学18讲 书课包

张宇线性代数9讲 书课包

张宇概率论与数理统计9讲 书课包

题集类

张宇考研数学题源探析经典1000题（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学真题大全解（分数学一、数学二、数学三）

考研数学命题人终极预测8套卷（分数学一、数学二、数学三）

张宇考研数学最后4套卷（分数学一、数学二、数学三）

ISBN 978-7-5763-1430-4
01>
9 787576 314304

北京理工大学出版社网址：http://www.bitpress.com.cn

定价：69.80元